TRƯỜNG ĐẠI HỌC AN GIANG
KHOA SƯ PHẠM

TÀI LIỆU GIẢNG DẠY

HÌNH HỌC AFFINE VÀ EUCLIDE

LÊ NGỌC QUỲNH

AN GIANG, 07 - 2018

TRƯỜNG ĐẠI HỌC AN GIANG
KHOA SƯ PHẠM

TÀI LIỆU GIẢNG DẠY

HÌNH HỌC AFFINE VÀ EUCLIDE

LÊ NGỌC QUỲNH

AN GIANG, 07 - 2018

Giáo trình và tài liệu giảng dạy "Hình học Affine và Euclide", do tác giả Lê Ngọc Quỳnh, công tác tại Khoa Sư phạm thực hiện. Tác giả đã báo cáo nội dung và được Hội đồng Khoa học và Đào tạo Khoa thông qua ngày .../.../......và được Hội đồng Khoa học và Đào tạo Trường thông qua ngày .../.../.......

Tác giả biên soạn

Trưởng đơn vị **Trưởng bộ môn**

Hiệu trưởng

AN GIANG, 07 - 2018

LỜI CẢM TẠ

Tài liệu giảng dạy được thực hiện tại trường Đại học An Giang. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ủy ban nhân dân tỉnh An Giang, Ban giám hiệu trường Đại học An Giang, Ban chủ nhiệm khoa Sư phạm, Ban chủ nhiệm bộ môn Toán cùng các phòng ban chức năng của trường Đại học An Giang và anh chị, bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành tài liệu này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho đề tài này.

Lời cuối cùng, tác giả xin gửi lời tri ân sâu sắc đến gia đình, những người thân luôn tin tưởng, thương yêu, động viên và giúp đỡ tác giả vượt qua mọi khó khăn trong suốt quá trình thực hiện tài liệu giảng dạy.

Long Xuyên, tháng 7 năm 2018

Tác giả

TS. Lê Ngọc Quỳnh

LỜI CAM KẾT

Tôi xin cam đoan đây là giáo trình, tài liệu giảng dạy của riêng tôi. Nội dung giáo trình và tài liệu giảng dạy có xuất xứ rõ ràng.

Long Xuyên, tháng 7 năm 2018
Tác giả

TS. Lê Ngọc Quỳnh

MỤC LỤC

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị **2**

1.1. Không gian vectơ 2

1.1.1. Định nghĩa không gian vectơ 2

1.1.2. Hệ vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính 3

1.2. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ 3

1.2.1. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ 3

1.2.2. Tọa độ vectơ và công thức đổi cơ sở 4

1.3. Không gian vectơ con 5

1.3.1. Định nghĩa không gian vectơ con 5

1.3.2. Tổng và giao các không gian vectơ con 6

1.4. Ánh xạ tuyến tính 7

1.5. Phép biến đổi tuyến tính 8

1.6. Không gian con bất biến - Vectơ riêng và giá trị riêng 9

1.6.1. Không gian con bất biến 9

1.6.2. Vectơ riêng và giá trị riêng 9

1.6.3. Thuật toán tìm vectơ riêng và giá trị riêng 10

1.7. Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương 10

1.7.1. Dạng song tuyến tính 10

1.7.2. Dạng toàn phương 11

Chương 2. Hình học Affine **12**

2.1. Không gian affine 12

2.2. Mục tiêu và tọa độ affine 13

2.2.1. Hệ điểm độc lập 13

2.2.2. Mục tiêu affine 14

2.2.3. Tọa độ affine 14

2.2.4. Công thức đổi mục tiêu 15
2.3. Các phẳng trong không gian affine 16
2.3.1. Cái phẳng trong không gian affine 17
2.3.2. Phương trình tham số và tổng quát của m-phẳng 19
2.4. Vị trí tương đối giữa các phẳng 21
2.4.1. Phẳng tổng và phẳng giao 22
2.4.2. Vị trí tương đối giữa hai cái phẳng 24
2.5. Tâm tỉ cự - Tỉ số đơn 26
2.5.1. Tâm tỉ cự 26
2.5.2. Tỉ số đơn 27
2.5.3. Công thức tọa độ và ý nghĩa hình học của tỉ số đơn 28
2.6. Tập lồi trong không gian affine thực 29
2.6.1. Đoạn thẳng 29
2.6.2. Tập lồi và bao lồi 30
2.6.3. Hình hộp m-chiều 33
2.6.4. Đơn hình m-chiều 34
2.7. Ánh xạ affine - Phép biến đổi affine 36
2.7.1. Ánh xạ affine 36
2.7.2. Sự xác định ánh xạ affine 38
2.7.3. Phép biến đổi affine 40
2.7.4. Phép tịnh tiến 41
2.7.5. Phép vị tự 42
2.7.6. Phép chiếu song song 43
2.7.7. Thấu xạ affine 44
2.7.8. Biểu thức tọa độ của phép affine 48
2.8. Hình học của một nhóm - Hình học affine 50

2.9. Các siêu mặt bậc hai trong không gian affine ... 51
2.9.1. Định nghĩa siêu mặt bậc hai ... 51
2.9.2. Tâm của siêu mặt bậc hai ... 53
2.9.3. Đường tiệm cận của siêu mặt bậc hai ... 54
2.9.4. Tiếp tuyến và siêu tiếp diện của siêu mặt bậc hai ... 56
2.9.5. Siêu phẳng kính liên hợp ... 59
2.9.6. Phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai ... 61
2.9.7. Phân loại các siêu mặt bậc hai ... 64
Bài tập ... 66
Chương 3. Hình học Euclide ... 93
3.1. Không gian vectơ Euclide ... 93
3.1.1. Định nghĩa không gian vectơ Euclide ... 93
3.1.2. Khoảng cách và góc ... 94
3.1.3. Trực giao và trực chuẩn ... 96
3.1.4. Phép biến đổi trực giao ... 98
3.1.5. Phép biến đổi tự liên hợp ... 102
3.1.6. Ánh xạ tuyến tính đồng dạng của các không gian vectơ Euclide. 104
3.2. Không gian Euclide ... 105
3.2.1. Định nghĩa không gian Euclide ... 105
3.2.2. Mục tiêu - Tọa độ trực chuẩn ... 106
3.2.3. Trực giao trong không gian Euclide ... 107
3.2.4. Khoảng cách trong không gian Euclide ... 110
3.2.5. Góc trong không gian Euclide ... 116
3.2.6. Thể tích trong không gian Euclide ... 116
3.3. Hình học Euclide ... 118
3.3.1. Phép biến đổi đẳng cự ... 118

3.3.2. Phép dời hình 119
3.3.3. Hình học Euclide 122
3.3.4. Giải toán affine bằng phương tiện Euclide 123
3.4. Hình học đồng dạng 127
3.4.1. Phép biến đổi đồng dạng 127
3.4.2. Hình học đồng dạng 128
3.5. Siêu mặt bậc hai - Siêu cầu 128
3.5.1. Định nghĩa siêu mặt bậc hai 128
3.5.2. Phân loại Euclide các siêu mặt bậc hai 132
3.5.3. Gọi tên một số siêu mặt bậc hai 134
3.5.4. Khảo sát siêu mặt bậc hai Euclide bằng các bất biến 135
3.5.5. Phương chính và siêu phẳng kính chính 141
3.5.6. Siêu cầu - Miền trong và miền ngoài siêu cầu 143
3.5.7. Phương tích và siêu phẳng đẳng phương 145
3.5.8. Giao của siêu cầu với siêu phẳng 146
Bài tập 147
Tài liệu tham khảo **164**

LỜI NÓI ĐẦU

Hình học Affine và Euclide là một trong những nội dung trọng yếu trong chương trình học tập của sinh viên khoa Toán ở các trường Đại học Sư phạm. Để góp phần giúp sinh viên học tập môn này được thuận lợi, tác giả biên soạn tài liệu giảng dạy "Hình học Affine và Euclide".

Tài liệu gồm 3 chương: chương 1 dành cho việc nhắc lại các kiến thức nền tảng về Đại số tuyến tính để sinh viên nắm vững và tiếp thu tốt hơn các kiến thức hình học ở các chương tiếp theo; chương 2 dành cho hình học Affine và bài tập; chương 3 dành cho hình học Euclide và bài tập.

Tác giả hi vọng tài liệu này sẽ bổ ích đối với các bạn sinh viên theo học khoa Toán ở các trường Đại học Sư phạm. Sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm ngành Toán cũng có thể dùng giáo trình này làm tài liệu tham khảo, đặc biệt các giáo viên Toán ở các trường trung học phổ thông có thể dùng giáo trình này để ôn tập và củng cố các kiến thức cần thiết cho việc giảng dạy của mình.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn rằng tài liệu không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu chân tình của quý đồng nghiệp và bạn đọc để tài liệu được hoàn thiện hơn nữa.

Xin chân thành cảm ơn.

Long Xuyên, tháng 7 năm 2018

Tác giả

TS. Lê Ngọc Quỳnh

CHƯƠNG 1.
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 KHÔNG GIAN VECTƠ

1.1.1 Định nghĩa không gian vectơ

Định nghĩa 1.1. Cho trường $\mathbb{K}$ và tập $V \neq \emptyset$ mà các phần tử của nó gọi là các vectơ và kí hiệu là $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \cdots$. Trên V trang bị hai phép toán:

(i) Phép cộng hai vectơ là một ánh xạ $V \times V \to V$ cho bởi

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \mapsto \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},$$

(ii) Phép nhân vectơ với một số là một ánh xạ $\mathbb{K} \times V \to V$ cho bởi

$$(\lambda, \overrightarrow{a}) \mapsto \overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a},$$

thỏa 8 tiên đề sau:

(V_1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

(V_2) $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$;

(V_3) $\exists \overrightarrow{0} \in V : \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

(V_4) $\forall \overrightarrow{a} \in V, \exists \overrightarrow{b} \in V : \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, kí hiệu $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}$;

(V_5) $\lambda(\mu \overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;

(V_6) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}$;

(V_7) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{a}$;

(V_8) $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

thì V được gọi là một không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$.

Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian vectơ thực. Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì V được gọi là không gian vectơ phức. Trong khuôn khổ tài liệu này, nếu không nói gì thêm, ta chỉ xét không gian vectơ thực.

Ví dụ 1.1. Ta xét các ví dụ sau:

a) $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ thực với 2 phép toán:

+ Cộng hai vectơ: $(a_1, \cdots, a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$,

+ Nhân vectơ với một số: $\lambda(a_1, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n)$.

b) $C_{[a,b]}$ là tập hợp tất cả các hàm số thực $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$. Trên $C_{[a,b]}$, trang bị 2 phép toán:

+ Cộng hai vectơ f và g: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

+ Tích của một vectơ với một số: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,

thì $C_{[a,b]}$ là không gian vectơ thực.

c) V^3 là tập hợp các vectơ tự do trong không gian thông thường với hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số theo nghĩa thông thường thì V^3 cũng là không gian vectơ thực.

d) Kí hiệu $\mathbb{Q}[x]$ là tập các đa thức (một biến x) với hệ số hữu tỉ thì $\mathbb{Q}[x]$ cùng với phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số hữu tỉ tạo thành $\mathbb{Q}$ - không gian vectơ.

e) Tập hợp số phức $\mathbb{C}$ với phép cộng số phức và nhân số phức với một số thực là một không gian vectơ thực.

1.1.2 Hệ vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa 1.2. Trong không gian vectơ V, cho một hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$.

Nếu từ đẳng thức $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$, ta suy ra $\lambda_i = 0,\ \forall i = \overline{1,m}$ thì hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ được gọi là hệ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại ít nhất một $\lambda_i \neq 0$ để $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$.

Tính chất 1.1. *Từ định nghĩa trên, ta suy ra được một số tính chất sau:*

(i) Hệ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại một vectơ nào đó là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

(ii) Hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

(iii) Hệ con của hệ phụ thuộc tuyến tính chưa chắc phụ thuộc tuyến tính.

(iv) Một hệ vectơ bất kì chứa vectơ $\overrightarrow{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

1.2 CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

1.2.1 Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

Định nghĩa 1.3. Cho không gian vectơ V, một hệ vectơ $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ được gọi là một cơ sở của V nếu:

(i) $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ là hệ độc lập tuyến tính.

(ii) $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ là hệ sinh, nghĩa là mọi vectơ $\overrightarrow{x} \in V$ đều được biểu thị tuyến tính qua các vectơ $\overrightarrow{e_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Một không gian vectơ V có thể có nhiều cơ sở khác nhau và số phần tử trong các cơ sở là bằng nhau. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.4. Nếu một cơ sở của không gian vectơ V gồm có n vectơ thì mọi cơ sở khác của V cũng gồm có n vectơ. Khi đó, ta nói V là không gian vectơ có số chiều bằng n, kí hiệu V^n hay $\dim V = n$.

Nhận xét: Từ định nghĩa trên, ta có một số nhận xét:

(i) Hệ vectơ $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ là cơ sở của V^n khi và chỉ khi hệ $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ độc lập tuyến tính.

(ii) Trong V^n, mọi hệ độc lập gồm n vectơ đều là cơ sở của V^n. Mọi hệ gồm $n+1$ vectơ trở lên đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.1. *Trong V^n, cho hệ m vectơ độc lập tuyến tính $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ $(m < n)$. Khi đó ta có thể bổ sung vào hệ này $n - m$ vectơ nữa để được hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ là cơ sở của V^n.*

1.2.2 Tọa độ vectơ và công thức đổi cơ sở

Định nghĩa 1.5. Trong V^n, cho cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và vectơ $\overrightarrow{x} \in V^n$.

Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Bộ $(x_1, \cdots, x_n)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{x}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và kí hiệu là $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)/_{\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}}$

Trong V^n, cho cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})\}_{i=\overline{1,m}}$. Ta đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Định lý 1.2. *Điều kiện để hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính trong V^n là:*

+ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow rankA = m$.

+ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow rankA < m$.

Đặc biệt, nếu $m = n$ thì:

+ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *độc lập tuyến tính* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

+ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *phụ thuộc tuyến tính* $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Trong V^n, cho hai cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và $\{\overrightarrow{e_i'}\}_{i=\overline{1,n}}$. Khi đó ma trận A^* chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_i'}\}_{i=\overline{1,n}}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{e_2'} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{2n}\overrightarrow{e_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overrightarrow{e_n'} = a_{n1}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{e_n} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Suy ra ma trận chuyển cơ sở là $A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Lấy vectơ $\overrightarrow{x} \in V^n$. Giả sử tọa độ của $\overrightarrow{x}$ đối với hai cơ sở là:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)/_{\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}} \text{ và } \overrightarrow{x} = (x_1', \cdots, x_n')/_{\{\overrightarrow{e_i'}\}_{i=\overline{1,n}}}.$$

Định lý 1.3. *Công thức đổi cơ sở từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ sang $\{\overrightarrow{e_i'}\}_{i=\overline{1,n}}$ là:*

$$[x] = A^*[x'] \tag{1.1}$$

hoặc

$$[x'] = (A^*)^{-1}[x] \tag{1.2}$$

Ngược lại, mọi công thức dạng (1.1) hoặc (1.2) trong đó A^* là ma trận vuông cấp n không suy biến ($\det A^* \neq 0$) đều là công thức đổi cơ sở trong không gian vectơ V^n.

1.3 KHÔNG GIAN VECTƠ CON

1.3.1 Định nghĩa không gian vectơ con

Định nghĩa 1.6. Cho không gian vectơ V, $U \subset V$ và $U \neq \emptyset$. Khi đó U được gọi là không gian vectơ con của V nếu bản thân U lập thành một không gian vectơ đối với hai phép toán đã xác định trong V.

Định lý 1.4. *Tập hợp $U \neq \emptyset$, $U \subset V$ là không gian vectơ con của không gian vectơ V khi và chỉ khi $\lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{y} \in U$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in U$.*

1.3.2 Tổng và giao các không gian vectơ con

Định nghĩa 1.7. Cho $U_1, \cdots, U_k$ là các không gian vectơ con của không gian vectơ V. Khi đó:

$$U = \{\overrightarrow{x} \in V | \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \cdots + \overrightarrow{x_k};\ \overrightarrow{x_i} \in U_i,\ 1 \leq i \leq k\}$$

được gọi là không gian tổng của các không gian vectơ con $U_1, \cdots, U_k$ và kí hiệu là $U = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$.

Với $\overrightarrow{x} \in U$ và $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \overrightarrow{x_i},\ \overrightarrow{x_i} \in U_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ là sự phân tích duy nhất thì U được gọi là tổng trực tiếp của các không gian vectơ con $U_1, \cdots, U_k$ và kí hiệu là $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots + \oplus U_k$.

Giao của các không gian vectơ con $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ được hiểu theo nghĩa tập hợp là

$$\overrightarrow{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in U_i,\ \forall i = 1, \cdots, k.$$

Định lý 1.5. *Tổng và giao các không gian vectơ con của không gian vectơ V cũng là không gian vectơ con của V.*

Hệ quả 1.1. *Tổng các không gian vectơ con $U = U_1 + \cdots + U_k$ của V là không gian vectơ con bé nhất chứa tất cả các không gian vectơ con $U_1, \cdots, U_k$.*

Giao các không gian vectơ con $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ của V là không gian vectơ con lớn nhất chứa tất cả các không gian vectơ con $U_1, \cdots, U_k$.

Định lý 1.6. *Tổng các không gian vectơ con $\sum\limits_{i=1}^{k} U_i$ là tổng trực tiếp nếu và chỉ nếu một không gian vectơ con bất kì U_i $(1 \leq i \leq k)$ giao với tổng các không gian vectơ con còn lại đều bằng $\overrightarrow{0}$, tức là $U_i \bigcap \sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{k} U_j = \{\overrightarrow{0}\}$.*

Chẳng hạn, với hai không gian vectơ con $U_1, U_2 \subset V$, nếu $U_1 + U_2$ là tổng trực tiếp thì $U_1 \cap U_2 = \{\overrightarrow{0}\}$. Khi đó, ta kí hiệu tổng trực tiếp của hai không gian con U_1, U_2 là $U_1 \oplus U_2$.

Định lý 1.7. *Cho U_1, U_2 là hai không gian vectơ con của V. Khi đó:*

(i) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

(ii) $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

Định nghĩa 1.8. Trong không gian vectơ V^n cho hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ $(m \leq n)$. Khi đó $U = \left\{\overrightarrow{x}; \overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{a_i}\right\}$ được gọi là không gian vectơ con sinh bởi hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$. Ta kí hiệu: $U = L\langle\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}\rangle = L\langle\{\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_m}\}\rangle$.

Chú ý: Ta có một số chú ý như sau:

(i) $\dim U \leq m$

(ii) $\dim U = m \Leftrightarrow \{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ độc lập tuyến tính. Khi đó $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ là một cơ sở của U.

(iii) Trong V^n, cho hệ vectơ $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại duy nhất không gian vectơ con U của V^n nhận $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ làm cơ sở (sự xác định không gian vectơ con là duy nhất).

1.4 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 1.9. Cho hai không gian vectơ V và V'. Khi đó ánh xạ $\varphi : V \to V'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi:

(i) $\varphi(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{x}) + \varphi(\overrightarrow{y})$,

(ii) $\varphi(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{x})$.

Hai điều kiện trên có thể viết gọn lại như sau:

$$\varphi(\lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{y}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{x}) + \mu\varphi(\overrightarrow{y}),\ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V.$$

Tính chất 1.2. *Từ định nghĩa trên, ta suy ra một số tính chất sau:*

(i) $\varphi(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0'}$.

(ii) $\varphi(-\overrightarrow{a}) = -\varphi(\overrightarrow{a})$.

(iii) Nếu $U \subset V$ *thì* $\varphi(U) \subset V'$ *và* $\dim \varphi(U) \leq \dim U$.

(iv) Cho $\varphi : V \to V'$ *và* $\psi : V' \to V''$ *là các ánh xạ tuyến tính thì ánh xạ* $\psi_o\varphi : V \to V''$ *cũng là ánh xạ tuyến tính.*

Định lý 1.8. *Trong không gian vectơ* V^n *cho hệ vectơ* $\{\overrightarrow{a_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ *độc lập tuyến tính (cơ sở của* V^n*) và trong không gian vectơ* V' *cho hệ n vectơ* $\{\overrightarrow{a'_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ *bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính* $\varphi : V^n \to V'$ *sao cho* $\varphi(\overrightarrow{a_i}) = \overrightarrow{a'_i},\ i = 1, \cdots, n$.

Định nghĩa 1.10. Ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \to V'$ được gọi là đẳng cấu tuyến tính nếu φ là song ánh. Khi đó ta nói rằng không gian vectơ V đẳng cấu với không gian vectơ V' và kí hiệu là $V \cong V'$.

Định lý 1.9. *Đẳng cấu tuyến tính $\varphi : V \to V'$ sẽ biến một cơ sở của V thành một cơ sở của V' và do đó $\dim V = \dim V'$.*

Tích hai đẳng cấu tuyến tính là đẳng cấu tuyến tính và nghịch đảo của đẳng cấu tuyến tính cũng là đẳng cấu tuyến tính.

Quan hệ đẳng cấu giữa các không gian vectơ là một quan hệ tương đương (có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu).

1.5 PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 1.11. Một đẳng cấu tuyến tính $\varphi : V \to V$ từ không gian vectơ V lên chính nó được gọi là một phép biến đổi tuyến tính của V.

Ví dụ 1.2. a) $Id : V \to V$ là một phép biến đổi tuyến tính.

b) $V_k : V \to V$ xác định bởi $\overrightarrow{x} \mapsto k\overrightarrow{x}$ với $0 \neq k \in \mathbb{R}$ cũng là phép biến đổi tuyến tính và được gọi là phép vị tự tỉ số k.

Định lý 1.10. *Phép biến đổi tuyến tính là một đẳng cấu tuyến tính (ánh xạ tuyến tính + song ánh) nên ta có các tính chất sau:*

(i) Phép biến đổi tuyến tính biến hệ vectơ độc lập tuyến tính thành hệ vectơ độc lập tuyến tính, do đó sẽ biến cơ sở của V thành cơ sở của V.

(ii) Tích hai phép biến đổi tuyến tính là phép biến đổi tuyến tính và nghịch đảo của phép biến đổi tuyến tính cũng là phép biến đổi tuyến tính.

(iii) Nếu $U \subset V$ thì $\varphi(U) \subset V$ và $\dim \varphi(U) = \dim U$.

Định lý 1.11. *Cho hai cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và $\{\overrightarrow{e'_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ của không gian vectơ V^n. Khi đó tồn tại duy nhất một phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V^n \to V^n$ sao cho $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e'_i}$, $(i = 1, \cdots, n)$.*

Trong V^n với cơ sở đã chọn $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$, cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V^n \to V^n$. Khi đó ta có $\{\varphi(\overrightarrow{e_i})\}_{i=\overline{1,n}}$ cũng là cơ sở của V^n. Ma trận A^* chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ sang cơ sở $\{\varphi(\overrightarrow{e_i})\}_{i=\overline{1,n}}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{e_1}) = a_{11}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{e_n} \\ \varphi(\overrightarrow{e_2}) = a_{21}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{2n}\overrightarrow{e_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(\overrightarrow{e_n}) = a_{n1}\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{e_n} \end{cases} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lấy vectơ $\overrightarrow{x} \in V^n$. Giả sử tọa độ của $\overrightarrow{x}$ đối với hai cơ sở là:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)/_{\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}} \text{ và } \overrightarrow{x} = (x'_1, \cdots, x'_n)/_{\{\varphi(\overrightarrow{e_i})\}_{i=\overline{1,n}}}.$$

Định lý 1.12. *Phương trình của phép biến đổi tuyến tính* φ *đối với cơ sở* $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ *là:*

$$[x'] = A^*[x]$$

Ngược lại, mọi phương trình dạng $[x'] = B[x]$ *trong đó* B *là ma trận vuông cấp* n *không suy biến* $(\det B \neq 0)$ *đều là phương trình của một phép biến đổi tuyến tính nào đó trong không gian vectơ* V^n *và* B *là ma trận của phép biến đổi tuyến tính đó.*

1.6 KHÔNG GIAN CON BẤT BIẾN - VECTƠ RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

1.6.1 Không gian con bất biến

Định nghĩa 1.12. Cho $U \subset V$ và phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \to V$. Nếu $\varphi(U) \subset U$ thì U được gọi là không gian vectơ con bất biến đối với φ.

Ví dụ 1.3. a) Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \to V$, ta có: $\varphi(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$; $\varphi(V) = V$. Do đó $\{\overrightarrow{0}\}$ và V là các không gian vectơ con bất biến với mọi phép biến đổi tuyến tính.

b) $Id_V : V \to V$ là phép đồng nhất của không gian vectơ V thì mọi không gian vectơ con $U \subset V$ đều là không gian vectơ con bất biến của Id.

1.6.2 Vectơ riêng và giá trị riêng

Định nghĩa 1.13. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V^n \to V^n$. Nếu với $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{x} \in V^n$, tồn tại λ sao cho $\varphi(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$ thì $\overrightarrow{x}$ được gọi là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Nhận xét: Nếu $\overrightarrow{x}$ được gọi là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ thì $k\overrightarrow{x}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

Định lý 1.13. *Cho* $\overrightarrow{x}$ *và* $\overrightarrow{y}$ *lần lượt là các vectơ riêng ứng với giá trị riêng* λ *và* μ $(\lambda \neq \mu)$ *của cùng một phép biến đổi tuyến tính thì hệ vectơ* $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ *là độc lập tuyến tính.*

Định lý 1.14. *Cho phép biến đổi tuyến tính* $\varphi : V^n \to V^n$*, nếu* φ *có* n *vectơ riêng ứng với* n *giá trị riêng khác nhau thì trong* V^n *tồn tại một cơ sở gồm các vectơ riêng của* φ *sao cho ma trận của* φ *có dạng chéo*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Định lý 1.15. *Nếu $\overrightarrow{x}$ là vectơ riêng của φ thì không gian vectơ con sinh bởi vectơ $\overrightarrow{x}$ là không gian vectơ con bất biến của φ.*

Nhận xét: Như vậy, việc tìm không gian vectơ con bất biến của φ tương đương với việc tìm vectơ riêng của φ.

Định lý 1.16. *Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V^n \to V^n$, khi đó trong V^n luôn tồn tại các không gian con bất biến một chiều hoặc hai chiều đối với φ.*

1.6.3 Thuật toán tìm vectơ riêng và giá trị riêng

Để tìm giá trị riêng, vectơ riêng và không gian vectơ con bất biến của một phép biến đổi tuyến tính, ta thực hiện các bước sau:

Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V^n \to V^n$ có ma trận là A.

1. Giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0$ (E là ma trận đơn vị) để tìm các giá trị riêng λ.

2. Thay λ vào phương trình $\lambda[x] = A[x]$. Giải phương trình này, tìm được vectơ riêng $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ứng với giá trị riêng λ.

3. $U = L\langle\{\overrightarrow{x}\}\rangle$ là không gian con bất biến đối với φ.

1.7 DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1.7.1 Dạng song tuyến tính

Định nghĩa 1.14. Cho không gian vectơ V, ánh xạ $S : V \times V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \mapsto S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ được gọi là song tuyến tính nếu thỏa hai điều kiện:

(i) $S(\lambda\overrightarrow{x_1} + \mu\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y}) = \lambda S(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y}) + \mu S(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y})$,

(ii) $S(\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y_1} + \mu\overrightarrow{y_2}) = \lambda S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_1}) + \mu S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_2})$,

với mọi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$.

Trong V^n, cho cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ và S là một dạng song tuyến tính. Giả sử $S(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = a_{ij}$ $(i, j = \overline{1, n})$, khi đó với hai vectơ $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n), \overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in V^n$ thì

$$S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = S\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j S(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} \qquad (1.3)$$

Nếu ta kí hiệu $A = [a_{ij}]$ $[x], [y]$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ thì

$$S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = [x]^* A[y] \qquad (1.4)$$

Biểu thức (1.3) được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính S và (1.4) chính là dạng ma trận của (S) trong đó A được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính S.

Định nghĩa 1.15. Dạng song tuyến tính S trên không gian vectơ V được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng khi và chỉ khi $S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = S(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$.

Định lý 1.17. *Dạng song tuyến tính S là dạng song tuyến tính đối xứng khi và chỉ khi ma trận của S là ma trận đối xứng.*

1.7.2 Dạng toàn phương

Định nghĩa 1.16. Cho S là dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian vectơ V. Khi đó ánh xạ $P : V \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $P(\overrightarrow{x}) = S(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$ được gọi là dạng toàn phương xác định bởi dạng song tuyến tính S và S được gọi là dạng cực của P.

Từ biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính S, ta suy ra biểu thức tọa độ của dạng toàn phương P là:

$$P(\overrightarrow{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = [x]^*A[x] \ (a_{ij} = a_{ji},\ A^* = A),$$

Ma trận A gọi là ma trận của dạng toàn phương P và hạng của A được gọi là hạng của P.

Định lý 1.18. *Mọi dạng toàn phương trong không gian vectơ thực đều có thể chọn được cơ sở thích hợp sao cho biểu thức tọa độ của nó có dạng*

$$P(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2,\ (I)\ (\lambda_i \neq 0, 1 \leq r \leq n \text{ với } r \text{ là hạng của } P).$$

Dạng (I) được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương P.

Định lý 1.19. *Mọi dạng toàn phương trong không gian vectơ thực đều có thể chọn được cơ sở thích hợp sao cho biểu thức tọa độ của nó có dạng*

$$P(\overrightarrow{x}) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + \cdots + x_r^2,\ (II)\ (0 \leq k \leq r,\ 1 \leq r \leq n).$$

Dạng (II) được gọi là dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương, trong đó hệ số âm trong dạng chuẩn tắc bằng chỉ số của dạng toàn phương còn r bằng hạng của dạng toàn phương.