

Mục lục

1. Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính	5
1.1. Chuẩn bị	5
1.1.1. Tích Đề-các	5
1.1.2. Ánh xạ	5
1.2. Ma trận và các phép toán trên ma trận	6
1.2.1. Khái niệm ma trận.	6
1.2.2. Các phép toán trên ma trận.	8
1.3. Định thức	9
1.3.1. Định nghĩa định thức	9
1.3.2. Ma trận nghịch đảo	15
1.3.3. Hạng của ma trận	17
1.3.4. Hệ phương trình tuyến tính	19
Bài tập chương 1	26
2. Biến cố ngẫu nhiên và xác suất của nó	33
2.1. Phép thử và phân loại biến cố	33
2.1.1. Định nghĩa	33
2.1.2. Phân loại biến cố	33
2.2. Định nghĩa xác suất	34
2.2.1. Xác suất của biến cố	34
2.2.2. Định nghĩa cổ điển về xác suất	34
2.2.3. Định nghĩa hình học về xác suất	36
2.2.4. Định nghĩa thống kê về xác suất	37
2.3. Quan hệ giữa các biến cố	38
2.3.1. Tổng các biến cố	38
2.3.2. Tích các biến cố	38
2.3.3. Biến cố xung khắc	39
2.3.4. Nhóm đầy đủ các biến cố	39
2.3.5. Biến cố đối lập	39
2.4. Định lý cộng và nhân xác suất	40
2.4.1. Định lý cộng xác suất (trường hợp các biến cố xung khắc)	40
2.4.2. Định lý nhân xác suất	41
2.4.3. Định lý cộng xác suất (trường hợp tổng quát)	45
2.4.4. Định lý liên hệ cộng và nhân xác suất	46
2.5. Công thức Bernoulli	47
2.5.1. Các phép thử độc lập	47
2.5.2. Công thức Bernoulli	47
2.5.3. Số lần xuất hiện chắc nhất	48
2.5.4. Mở rộng công thức Bernoulli	49
2.6. Công thức đầy đủ và công thức Bayes	50
2.6.1. Công thức xác suất đầy đủ	50
2.6.2. Công thức Bayes	52

Bài tập chương 2	53
3. Đại lượng ngẫu nhiên và các quy luật phân phối xác suất	61
3.1. Định nghĩa và phân loại đại lượng ngẫu nhiên	61
3.1.1. Định nghĩa	61
3.1.2. Phân loại đại lượng ngẫu nhiên	61
3.2. Quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên	62
3.2.1. Bảng phân phối xác suất	62
3.2.2. Hàm phân phối xác suất	64
3.2.3. Hàm mật độ xác suất	66
3.3. Các tham số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên	71
3.3.1. Kỳ vọng toán	71
3.3.2. Phương sai	75
3.3.3. Độ lệch tiêu chuẩn	78
3.3.4. Mốt	78
3.3.5. Trung vị	79
3.3.6. Phân vị	80
3.4. Một số quy luật phân phối xác suất thông dụng	80
3.4.1. Quy luật phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$	80
3.4.2. Quy luật không - một A(p)	86
3.4.3. Quy luật nhị thức $B(n, p)$	87
3.4.4. Quy luật Poisson $P(\lambda)$	90
3.4.5. Quy luật siêu bội $M(N, n)$	92
3.4.6. Quy luật khi - bình phương $\chi^2(n)$	93
3.4.7. Quy luật Student $T(n)$	94
Bài tập chương 3	96
4. Mẫu ngẫu nhiên - Ước lượng tham số	103
4.1. Tổng thể nghiên cứu	103
4.1.1. Định nghĩa	103
4.1.2. Các phương pháp mô tả tổng thể	103
4.1.3. Các tham số đặc trưng của tổng thể	104
4.2. Mẫu ngẫu nhiên	105
4.2.1. Định nghĩa	105
4.2.2. Các phương pháp mô tả mẫu ngẫu nhiên	106
4.2.3. Đồ thị của phân phối thực nghiệm	107
4.3. Thống kê	109
4.3.1. Định nghĩa	109
4.3.2. Trung bình mẫu	109
4.3.3. Phương sai mẫu	110
4.3.4. Độ lệch tiêu chuẩn mẫu	112
4.3.5. Tần suất mẫu	113
4.3.6. Quy luật phân phối xác suất của một số thống kê đặc trưng mẫu	113
4.3.7. Ví dụ	115
4.4. Mẫu ngẫu nhiên hai chiều	115
4.4.1. Khái niệm	115
4.4.2. Phương pháp mô tả ngẫu nhiên hai chiều	116
4.4.3. Một số thống kê đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên hai chiều	116
4.5. Ước lượng tham số của đại lượng ngẫu nhiên	118
4.5.1. Phương pháp ước lượng điểm	118
4.5.2. Phương pháp ước lượng bằng khoảng tin cậy	119

4.5.3. Khoảng tin cậy cho trung bình (Ước lượng kỳ vọng toán của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn)	119
4.5.4. Khoảng tin cậy cho tỷ lệ (Ước lượng kỳ vọng toán của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật không - một)	126
4.5.5. Khoảng tin cậy cho phương sai (Ước lượng phương sai của đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn)	128
Bài tập chương 4	132
PHỤ LỤC	138
A. Giải tích tổ hợp	139
A.1. Các quy tắc đếm	139
A.1.1. Quy tắc cộng	139
A.1.2. Quy tắc nhân	139
A.2. Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp	139
A.2.1. Chỉnh hợp (chỉnh hợp không lặp)	139
A.2.2. Chỉnh hợp lặp	140
A.2.3. Hoán vị	140
A.2.4. Tổ hợp	141
Bài tập phụ lục A	142
B. Sử dụng CNTT giải toán thống kê	143
B.1. Đối với máy tính điện tử cầm tay	143
B.1.1. Tính các đặc trưng của mẫu	143
B.1.2. Bài toán tìm hàm hồi quy	146
B.2. Dùng phần mềm Excel	150
B.2.1. Tính toán trong bài toán ước lượng	150
B.2.2. Tính toán các đặc trưng của mẫu	152
B.2.3. Các phân phối xác suất	153
C. Bảng tra	155
C.1. Bảng giá trị hàm mật độ của phân phối chuẩn hóa	156
C.2. Bảng giá trị hàm Laplace	157
C.3. Bảng phân vị chuẩn	158
C.4. Bảng phân vị Student	159
C.5. Bảng phân vị Khi - bình phương	160
TÀI LIỆU THAM KHẢO	161

TaiLieu.vn

Chương 1

Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính

1.1. Chuẩn bị

1.1.1. Tích Đề-các

★ **Định nghĩa 1.1** Cho họ gồm n tập $\{A_i\}_{i=1}^n$ (n là số nguyên dương). Tích Đề-các của họ đã cho là một tập, ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, mỗi phần tử của nó là một bộ có thứ tự gồm n thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, trong đó $a_i \in A_i$ với $i = 1, 2, \dots, n$.

• **Ví dụ 1.1** Cho $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ khi đó:

$$A_1 \times A_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$$

$$A_2 \times A_1 = \{(1, a); (2, a); (1, b); (2, b); (1, c); (2, c)\}$$

Vậy $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$.

Chú ý: Nếu $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, thay cho ký hiệu $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ta dùng ký hiệu A^n .

• **Ví dụ 1.2** $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

1.1.2. Ánh xạ

★ **Định nghĩa 1.2** Cho hai tập khác rỗng X, Y . Một ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho phép với mỗi phần tử $x \in X$ **xác định duy nhất một** phần tử $y = f(x) \in Y$, ký hiệu: $f : X \longrightarrow Y$ hoặc $y = f(x)$. Trong định nghĩa trên

- X được gọi là tập nguồn của ánh xạ f
- Y được gọi là tập đích của ánh xạ f
- $y = f(x)$ gọi là ảnh của x qua ánh xạ f , x gọi là tạo ảnh của $y = f(x)$
- Giả sử $A \subset X$, khi đó $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ gọi là ảnh của A qua ánh xạ f .
- Giả sử $B \subset Y$, Khi đó $f^{-1}(B) = \{x : y = f(x) \in B\}$ gọi là nghịch ảnh của B bởi f

★ **Định nghĩa 1.3** Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ

1. f là đơn ánh nếu $x_1, x_2 \in X$ và $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$

2. f là toàn ánh nếu $f(X) = Y$
3. f là song ánh nếu f vừa là đơn ánh và vừa là toàn ánh

• **Ví dụ 1.3** 1. $y = e^x$ là một đơn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$

2. $y = x^2$ là một toán ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}^+$

3. $y = x$ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$

Chú ý: Nếu $X = Y$ ánh xạ $f : X \rightarrow X$ xác định bởi $y = f(x) = x$ được gọi là ánh xạ đồng nhất trên X , ký hiệu là id_X . Dễ thấy ánh xạ đồng nhất là một song ánh.

★ **Định nghĩa 1.4** Cho các ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$. Tích của ánh xạ g với ánh xạ f là một ánh xạ, ký hiệu $g.f$, xác định như sau:

$$(g.f) : X \rightarrow Z$$

$$(g.f)(x) = g[f(x)]$$

• **Ví dụ 1.4** Cho 2 ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ và $y = g(x) = 2x + 1$.

$$\text{Khi đó } (g.f)(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} + 1 = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

★ **Định nghĩa 1.5** Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ. Nếu tồn tại ánh xạ $g : Y \rightarrow X$ sao cho

$$g.f = id_X \text{ và } f.g = id_Y$$

ta gọi g là ánh xạ ngược của f , f là ánh xạ ngược của g

• **Ví dụ 1.5** Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi $y = f(x) = e^x$ và $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $y = g(x) = \ln(x)$. Dễ dàng kiểm tra rằng f và g là hai ánh xạ ngược của nhau.

1.2. Ma trận và các phép toán trên ma trận

1.2.1. Khái niệm ma trận.

★ **Định nghĩa 1.6** Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Một ma trận thực cỡ $m \times n$ là một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số thực xếp thành m hàng, n cột. Số thực đứng ở hàng i cột j gọi là phần tử ij . Nếu ký hiệu phần tử này là a_{ij} thì một ma trận cỡ $m \times n$ có thể biểu diễn bởi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong một số trường hợp ta còn dùng ký hiệu thu gọn $[a_{ij}]_{m \times n}$ để chỉ một ma trận m hàng, n cột.

• **Ví dụ 1.6** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$. Đây là ma trận cỡ 2×3 có:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 5, a_{21} = 7, a_{22} = 9, a_{23} = 11.$$

Ma trận cột là ma trận cỡ $m \times 1$.

Ma trận hàng là ma trận cỡ $1 \times n$.

Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0, ký hiệu là Θ hoặc $\Theta_{m \times n}$ nếu muốn chỉ rõ cỡ của ma trận.

Ma trận vuông cấp n là ma trận có số hàng bằng số cột và bằng n . Cho ma trận vuông cấp n , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, đường chéo chính của A là tập hợp các phần tử có dạng: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Ma trận tam giác trên là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận đường chéo là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo có các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1, ma trận đơn vị cấp n thường được ký hiệu là I_n hoặc là I nếu không xảy ra hiểu lầm.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển vị của ma trận A là ma trận ký hiệu là A^t , nhận được từ ma trận A bằng cách viết các hàng của A thành cột của A^t . Như vậy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Hai ma trận A, B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ nghĩa là $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ thì $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ và các phần tử ở các vị trí tương ứng bằng nhau cụ thể $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, ký hiệu $A = B$.

1.2.2. Các phép toán trên ma trận.

a) Cộng hai ma trận cùng cỡ

★ **Định nghĩa 1.7** Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Tổng của A và B là một ma trận cùng cỡ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, ký hiệu là $C = A + B$, trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử cùng vị trí với nhau.

• **Ví dụ 1.7**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Khi đó: } A + B = C = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Tính chất: Các phép tính cộng trên các ma trận cùng cỡ có tính chất giống như các tính chất của phép cộng các số thực:

- Tính giao hoán $A + B = B + A$
- Tính kết hợp $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \Theta = A$
- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\exists$ ma trận đối của ma trận A là $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ thỏa mãn

$$A + (-A) = \Theta$$

b) Nhân ma trận với một số thực

★ **Định nghĩa 1.8** Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và số thực k . Tích của A với số thực k là một ma trận cùng cỡ với ma trận A , ký hiệu là kA , xác định bởi công thức

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

• **Ví dụ 1.8**

$$2 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & 14 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tính chất: Giả sử $k, h \in \mathbb{R}$ và A, B là các ma trận, ta có các tính chất sau:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $k(hA) = khA$
- $(k + h)A = kA + hA$
- $1.A = A$

c) Nhân ma trận với ma trận

★ **Định nghĩa 1.9** Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p \times n}$. Tích của ma trận A với ma trận B là một ma trận có cỡ là $m \times n$, ký hiệu là AB , xác định như sau:

$$AB = [c_{ij}]_{m \times n}, c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

• **Ví dụ 1.9** Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$AB = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.3 & 1.0 + 2.1 \\ 0.2 - 1.3 & 0.0 - 1.1 \\ 3.2 + 1.3 & 3.0 + 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 1.10** Tính AB và BA nếu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -48 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -23 \\ -4 & 30 & -58 \\ 10 & 11 & -27 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Do $AB \neq BA$ nên phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán.

Tính chất: Giả sử A, B, C là các ma trận và k là một số thực. Nếu các phép tính ở vế trái của đẳng thức dưới đây có nghĩa thì vế phải cũng có nghĩa và 2 vế bằng nhau

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $IA = AI = A$
- $\Theta A = A\Theta = \Theta$

1.3. Định thức

1.3.1. Định nghĩa định thức

1. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ta gọi các phép biến đổi sau trên các hàng của A là các phép biến đổi sơ cấp trên hàng:

- Hoán vị 2 hàng của A .
- Nhân tất cả các phần tử của một hàng nào đó của A với cùng một số khác 0.
- Nhân tất cả các phần tử của một hàng nào đó của A với cùng một số rồi cộng vào các phần tử tương ứng của một hàng khác.

Chú ý: Các phép biến đổi sơ cấp trên cột cũng được định nghĩa tương tự.

• **Ví dụ 1.11** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

của A để đưa A về dạng tam giác trên.

Lời giải. Ta thực hiện dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để biến đổi dần ma trận A thành ma trận có dạng tam giác trên như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_2 - 2H_1 \rightarrow H_2]{H_3 - 3H_1 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3 - 5H_2 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

2. Ma trận con A_{ij} của ma trận A

★ **Định nghĩa 1.10** Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ma trận con A_{ij} của A là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi các phần tử nằm ở trên hàng i và các phần tử nằm trên cột j , cỡ của A_{ij} là $(m-1) \times (n-1)$.

• **Ví dụ 1.12** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Các ma trận con A_{ij} của A gồm:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Định nghĩa định thức

★ **Định nghĩa 1.11** Cho ma trận vuông cấp n , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Định thức của ma trận A được ký hiệu là: $\det(A)$, $|A|$ hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

xác định bằng phương pháp quy nạp như sau:

i) Với $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$

ii) Với $n > 1$, định thức của ma trận A được định nghĩa thông qua các định thức của các ma trận con A_{ij} cấp $n-1$ của nó bằng công thức:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}).$$

Chú ý:

1) Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n .

2) Biểu thức định thức cấp 2, định thức cấp 3 và quy tắc Sarius

- Định thức cấp 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

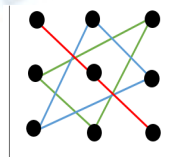
- Định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

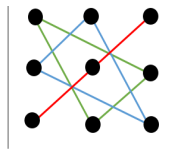
- Quy tắc Sarius cho định thức cấp 3: Là tổng của 6 hạng tử, mà mỗi hạng tử là tích của 3 phần tử mà mỗi dòng, mỗi cột chỉ có một đại diện duy nhất.

- Các số hạng mang dấu cộng: các số hạng là tích các phần tử nằm trên đường chéo chính hoặc tích các phần tử nằm trên các đỉnh của tam giác có một cạnh song song với đường chéo chính.



Hình 1.1: Quy tắc Sarius- các số hạng mang dấu cộng

- Các số hạng mang dấu trừ: các số hạng là tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ hoặc tích các phần tử nằm trên các đỉnh của tam giác có một cạnh song song với đường chéo phụ.



Hình 1.2: Quy tắc Sarius- các số hạng mang dấu trừ

• Ví dụ 1.13

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.3.2 + 2.1.3 + 2.1.3 - 3.3.3 - 2.2.2 - 1.1.1 = -18$$

4. **Tính chất của định thức:** Cho $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n . Các hàng và cột của A ta cũng sẽ gọi là các hàng và các cột của $\det(A)$. Một hàng hoặc cột gồm toàn số 0 sẽ được gọi là một hàng không (tương ứng: cột không). Định thức có các tính chất dưới đây:

- **Tính chất 1:** Hoán vị 2 hàng (tương ứng 2 cột) của A thì $\det(A)$ đổi dấu.
- **Tính chất 2:** Nếu tất cả các phần tử của hàng i (tương ứng cột j) của định thức được nhân với cùng một số k thì giá trị của định thức mới nhận được bằng giá trị của định thức cũ nhân với k .
- **Tính chất 3:** Thêm vào một hàng (hoặc một cột) k lần một hàng (hoặc k một cột) khác thì định thức không đổi.
- **Tính chất 4:** Định thức của ma trận tam giác trên hoặc dưới bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.
- **Tính chất 5:** $\det(A) = \det(A^t)$.
- **Tính chất 6:** Có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo một hàng hoặc một cột tùy ý bởi các công thức sau :
 $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ (Công thức khai triển theo hàng thứ i),
 $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$ (Công thức khai triển theo cột thứ j).
- **Tính chất 7:** Giả sử A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

- **Tính chất 8:** Giả sử hàng i của A biểu diễn dưới dạng:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$

Gọi B là ma trận nhận được từ A bằng cách thay a_{ij} bằng b_{ij} , C là ma trận nhận được từ A bằng cách thay a_{ij} bằng c_{ij} . Khi đó

$$\det(A) = \det(B) + \det(C).$$

Phát biểu tương tự cũng đúng đối với cột.

- **Tính chất 9:** Nếu định thức có một trong các tính chất sau thì định thức bằng không:
 + Có một hàng (hoặc một cột) bằng không;
 + Có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ;
 + Có một hàng (hoặc một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (hoặc của các cột) khác.

5. Các ví dụ tính định thức nhờ các tính chất

• Ví dụ 1.14 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix}$$

Lời giải. Cộng tất cả các cột 2, 3, 4 vào cột 1, rút nhân tử chung của cột đầu trong định thức nhận được ta có :

$$D = \begin{vmatrix} a+3x & x & x & x \\ 3x+a & a & x & x \\ 3x+a & x & a & x \\ 3x+a & x & x & a \end{vmatrix} = (3x+a) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & x & x \\ 1 & x & a & x \\ 1 & x & x & a \end{vmatrix}$$

Nhân hàng 1 với (-1) rồi cộng lần lượt vào các hàng còn lại, ta được

$$D = (3x+a) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-x \end{vmatrix}$$

Áp dụng tính chất thứ 4: $D = (3x+a)(a-x)^3$.

•**Ví dụ 1.15** Giải phương trình sau:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & -x & -x^2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Lời giải. Khai triển định thức trên theo hàng 1, ta được:

$$2x \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-x^2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 21x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -2.$$

•**Ví dụ 1.16** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Lời giải. Lần lượt lấy $H_2 - 3H_1 \rightarrow H_2$, $H_3 - 2H_1 \rightarrow H_3$ và $H_4 + 4H_1 \rightarrow H_4$, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

Tiếp theo, $H_3 : 3 \rightarrow H_3$ và $H_2 \leftrightarrow H_3$

$$D = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

Lấy $H_4 - 2H_2 \rightarrow H_4$

$$D = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục thực hiện $H_3 \leftrightarrow H_4$ và $H_4 - 2H_3 \rightarrow H_4$, thu được định thức của ma trận tam giác trên, áp dụng tính chất 4, ta có định thức cần tìm

$$D = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 3.1.1.5.(-19) = -285$$

•**Ví dụ 1.17** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

Lời giải. Thực hiện lần lượt các phép biến đổi: $H_4 - H_3 \rightarrow H_4$, $H_3 - H_2 \rightarrow H_3$, $H_2 - H_1 \rightarrow H_2$, ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

Tiếp theo, lấy $H_4 - H_3 \rightarrow H_4$, $H_3 - H_2 \rightarrow H_3$ ta thu được 2 hàng giống nhau, do đó

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

•**Ví dụ 1.18** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & x \\ 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 8 & 27 & 64 & x^3 \end{vmatrix}$$

Lời giải. Khai triển định thức D theo cột 4, ta thu được đa thức bậc 3 với ẩn x và hệ số cao nhất là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2.$$

Cho x lần lượt nhận các giá trị $x = 2, x = 3, x = 4$ ta thấy D có 2 cột giống nhau, do đó $D = 0$ khi $x = 2, x = 3, x = 4$. Theo định lý Bezout ta phải có:

$$D = 2(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

1.3.2. Ma trận nghịch đảo

1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 1.12** Cho A là ma trận vuông cấp n . Nếu có ma trận B vuông cùng cấp sao cho:

$$AB = BA = I_n$$

thì ta nói A khả đảo và B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A . Ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1} .

Như vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Khi A khả đảo ta nói A là ma trận không suy biến.

● **Ví dụ 1.19** Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Ta có $AB = BA = I_2$ nên theo định nghĩa $B = A^{-1}$.

2. Tính chất

◇ **Định lý 1.1** Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A nếu tồn tại thì duy nhất.

△. Giả sử B và B' là hai ma trận cùng thỏa mãn định nghĩa của ma trận nghịch đảo của ma trận A . Khi đó:

$$AB = BA = I, AB' = B'A = I$$

Vậy

$$B' = IB' = (BA)B' = B(AB') = BI = B.$$

□

◇ **Định lý 1.2** Nếu ma trận vuông A khả đảo thì $\det(A) \neq 0$.

△. Vì A khả đảo nên tồn tại A^{-1} và $AA^{-1} = I_n$. Áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận ta có:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Vậy $\det(A) \neq 0$ và hơn nữa $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

□

◇ **Định lý 1.3** Nếu ma trận vuông A cấp n có $\det(A) \neq 0$ thì A khả đảo và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

ở đó $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ là ma trận phụ hợp của ma trận A : $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

△. Áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng thứ i ta có

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\Rightarrow a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \det(A).$$

Hơn nữa, do định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không nên suy ra

$$a_{k1}c_{i1} + a_{k2}c_{i2} + \cdots + a_{kn}c_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = n \\ 0 & \text{nếu } k \neq n \end{cases}$$

Do đó $AC^t = \det(A)I$.

Áp dụng công thức khai triển định thức theo cột và lập luận tương tự ta cũng có:

$$C^t A = \det(A) \cdot I$$

Như vậy

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}C^t\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}C^t\right)A = I$$

suy ra điều phải chứng minh. $\square$

◇ **Định lý 1.4** Giả sử các ma trận vuông A, B là các ma trận khả đảo. Khi đó:

- (a) A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (b) $\forall m \in \mathbb{N}$, A^m cũng khả đảo và $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;
- (c) $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
- (d) AB cũng khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Δ. Bằng việc kiểm tra trực tiếp định nghĩa ma trận nghịch đảo, ta dễ dàng thu được các tính chất trên. $\square$

3. Các ví dụ tính ma trận nghịch đảo bằng ma trận phụ hợp

● **Ví dụ 1.20** Công thức ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2 khả đảo:

Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ có $\det(A) = ad - bc \neq 0$, áp dụng công thức ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^t = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Chẳng hạn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 7 - 3 \cdot 5} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \end{bmatrix}$$

● **Ví dụ 1.21** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau (nếu có):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Ta có $\det(A) = -3 \neq 0$ nên A khả đảo. Áp dụng công thức ta có:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -7, & c_{12} &= -2, & c_{13} &= 6 \\ c_{21} &= 2, & c_{22} &= 1, & c_{23} &= -3 \\ c_{31} &= 1, & c_{32} &= -1, & c_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$C = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 1.22** Tìm ma trận X , biết

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Đặt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ta có $\det(A) = 5 \neq 0$ nên A khả đảo và

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình ma trận trở thành

$$AX = B$$

Nhân vào bên trái cả hai vế A^{-1} ta được:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Vậy ma trận X cần tìm là

$$X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & -1 & \frac{14}{5} \\ \frac{5}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

1.3.3. Hạng của ma trận

1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 1.13** Cho A là ma trận cỡ $m \times n$. Ma trận con cấp p của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột. Định thức của ma trận đó được gọi là định thức con cấp p của A .

★ **Định nghĩa 1.14** Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A , ký hiệu là $r(A)$.

• **Ví dụ 1.23** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Các định thức con cấp 3 của ma trận A là:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

nên $r(A) < 3$. Hơn nữa, có ít nhất một định thức con cấp 2 của A

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

nên ta có $r(A) = 2$.

★ **Định nghĩa 1.15** Ma trận bậc thang là ma trận có các đặc điểm sau:

- Các hàng bằng không ở dưới các hàng khác không.
- Đối với hai hàng khác không liên tiếp, phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái sang) của hàng trên nằm bên trái phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới

• **Ví dụ 1.24**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận bậc thang có 3 hàng khác 0.

2. Tính chất của hạng ma trận A

- **Tính chất 1:** $r(A) = r(A^t)$.
- **Tính chất 2:** Hạng của ma trận bậc thang không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp.
- **Tính chất 3:** Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của ma trận đó.

Quy tắc thực hành tìm hạng của ma trận A : Để tìm hạng của ma trận A ta sử dụng 3 phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận bậc thang B . Khi đó $r(A) = r(B) =$ Số hàng khác không của B .

3. Các ví dụ tính hạng của ma trận

• **Ví dụ 1.25** Tính hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_2 - 2H_1 \rightarrow H_2]{H_3 + H_1 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{5H_3 + 3H_2 \rightarrow H_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang với 2 hàng khác 0. Vậy $r(A) = 2$.

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

thì hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng ma trận:

$$Ax = b$$

trong đó A là ma trận hệ số; x là ma trận ẩn; b là ma trận vế phải.**2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer**

◇ **Định lý 1.5** (Định lý Cramer) Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với A là ma trận vuông không suy biến, có nghiệm duy nhất :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \dots, n$$

trong đó A_j là ma trận có được từ A sau khi thay cột thứ j bởi cột vế phải b .

Δ. Vì A không suy biến, $\det(A) \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Từ phương trình $Ax = b$, nhân bên trái hai vế với A^{-1} ta có

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ phương trình. Do A^{-1}, b xác định nên nghiệm này là duy nhất.

Sử dụng biểu thức của ma trận A^{-1} ta suy ra

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \dots + c_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

với $j = 1, 2, \dots, n$ và ta có điều phải chứng minh. □

● **Ví dụ 1.27** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18; D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -19$$