

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

TÊN HỌC PHẦN:	PHƯƠNG PHÁP TÍNH
MÃ HỌC PHẦN:	18146
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO:	ĐẠI HỌC CHÍNH QUY

Mục lục

1	Số gần đúng và Sai số	1
1.1	Khái niệm về số gần đúng	1
1.1.1	Sai số tuyệt đối, sai số tương đối	1
1.1.2	Sự làm tròn số, sai số làm tròn	2
1.2	Cách viết số xấp xỉ	3
1.2.1	Chữ số có nghĩa	3
1.2.2	Chữ số chắc	3
1.2.3	Cách viết số xấp xỉ	4
1.3	Sai số tính toán	4
1.3.1	Sai số các phép tính cộng trừ	5
1.3.2	Sai số các phép tính nhân chia	5
1.3.3	Sai số của phép lũy thừa, khai căn, nghịch đảo	6
1.3.4	Bài toán ngược của lý thuyết sai số	7
1.4	Sai số phương pháp và sai số tính toán	7
	Bài tập	8
2	Phép nội suy	10
2.1	Nội suy bằng đa thức đại số	10
2.1.1	Bài toán nội suy	10
2.1.2	Sai số phương pháp của phép nội suy	11
2.1.3	Sai số tính toán của phép nội suy	12
2.2	Đa thức nội suy Lagrange	13
2.3	Công thức nội suy Newton mốc cách đều	15
2.3.1	Sai phân và các tính chất	15
2.3.2	Bảng sai phân	15
2.3.3	Đa thức nội suy Newton tiến	16
2.3.4	Đa thức nội suy Newton lùi	17
2.3.5	Một số ví dụ áp dụng sai phân và nội suy	19
2.4	Phương pháp bình phương bé nhất	20
2.4.1	Nội dung phương pháp	20

2.4.2	Một số trường hợp áp dụng	21
Bài tập		24
3	Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình	26
3.1	Nghiem và khoảng phân li nghiệm	27
3.2	Phương pháp chia đôi	28
3.2.1	Mô tả phương pháp	28
3.2.2	Thuật toán của phương pháp chia đôi	28
3.3	Phương pháp Newton	30
3.3.1	Mô tả phương pháp	30
3.3.2	Sai số phương pháp	31
3.3.3	Thuật toán của phương pháp Newton	32
Bài tập		32
4	Tính gần đúng đạo hàm và tích phân	34
4.1	Tính gần đúng đạo hàm	34
4.1.1	Sử dụng đa thức nội suy Lagrange	34
4.1.2	Sử dụng công thức nội suy Newton	35
4.2	Tính gần đúng tích phân	36
4.2.1	Phương pháp đa thức nội suy	36
4.2.2	Phương pháp hình thang	37
4.2.3	Công thức parabol (Simpson)	40
Bài tập		42

Chương 1

Số gần đúng và Sai số

1.1 Khái niệm về số gần đúng

1.1.1 Sai số tuyệt đối, sai số tương đối

Trong tính toán ta thường phải làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng. Ta nói a là số gần đúng A , nếu a không sai khác A nhiều. Đại lượng $\Delta := |a - A|$ gọi là *sai số thực sự* của a . Do không biết A nên cũng không biết Δ . Tuy nhiên ta có thể tìm được số dương Δa thỏa mãn điều kiện:

$$|a - A| \leq \Delta a \quad (1.1)$$

hay $a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$. Số dương Δa này gọi là sai số tuyệt đối của a . Rõ ràng nếu Δa đã là sai số tuyệt đối của a thì mọi số $\Delta' > \Delta a$ đều có thể xem là sai số tuyệt đối của a . Vì vậy trong những điều kiện cụ thể người ta chọn Δa là số dương bé nhất có thể được thỏa mãn (1.1).

Nếu a là số gần đúng của A có sai số tuyệt đối là Δa thì ta quy ước viết:

$$A = a \pm \Delta a \quad (1.2)$$

Tỷ số $\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$ được gọi là sai số tương đối của a . Ta suy ra $\Delta a = |a|\delta a$, do đó (1.2) cũng có thể viết

$$A = |a|(1 \pm \delta a) \quad (1.3)$$

⊕ **Nhận xét** Δa có cùng thứ nguyên với a , còn δa là số không có thứ nguyên và được biểu diễn bằng %.

• **Ví dụ 1.1.** Giả sử $A = \pi$; $a = 3,14$. Do $3,14 < A < 3,15 = 3,14 + 0,01$ nên ta có thể lấy $\Delta a = 0,01$. Mặt khác, $3,14 < A < 3,142 = 3,14 + 0,002$ do đó có thể lấy $\Delta a = 0,002$.

• **Ví dụ 1.2.** Đo độ dài hai đoạn thẳng AB, CD ta được $a = 10cm$ và $b = 1cm$ với $\Delta a = \Delta b = 0,01cm$. Khi đó ta có $\delta a = \frac{0,01}{10} = 0,1\%$ còn $\delta b = \frac{0,01}{1} = 1\%$ hay $\delta b = 10\delta a$.

Hiển nhiên phép đo a chính xác hơn hẳn phép đo b mặc dù $\Delta a = \Delta b$. Như vậy độ chính xác của một phép đo được phản ánh qua sai số tương đối.

1.1.2 Sự làm tròn số, sai số làm tròn

Một số thập phân a đều biểu diễn được dưới dạng:

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \beta_{p-1} 10^{p-1} + \cdots + \beta_{p-s} 10^{p-s})$$

trong đó β_i ($i = p, p-1, \dots, p-s$) là các số nguyên dương từ 0 đến 9. Chẳng hạn $a = 572,96 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$, ở đây $\beta_2 = 5, \beta_1 = 7, \beta_0 = 2, \beta_{-1} = 9, \beta_{-2} = 6$.

Làm tròn a là bỏ đi một số các chữ số bên phải a để được một số $\bar{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất với a .

⊙ **Qui tắc thu gọn:** Giả sử

$$a = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_j 10^j + \cdots + \beta_{p-s} 10^{p-s}$$

và ta giữ lại đến số hạng thứ j . Gọi phần vớt bỏ là μ , ta đặt

$$\bar{a} = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \tilde{\beta}_j 10^j,$$

trong đó:

$$\tilde{\beta}_j := \begin{cases} \beta_j + 1 & \text{nếu } 0,5 \cdot 10^j < \mu < 10^j \\ \beta_j & \text{nếu } 0 < \mu < 0,5 \cdot 10^j \end{cases}$$

Trường hợp $\mu = 0,5 \cdot 10^j$ thì $\tilde{\beta}_j = \beta_j$ nếu β_j là chẵn và $\tilde{\beta}_j = \beta_j + 1$ nếu β_j là lẻ vì tính toán với số chẵn thuận tiện hơn.

• **Ví dụ 1.3.** Thu gọn đến 2 chữ số sau dấu phẩy các số sau:

$$\begin{array}{ll} a = 572,96573 & \bar{a} = 572,97; & b = 45,75346 & \bar{b} = 45,75 \\ c = 301,38500 & \bar{c} = 301,38; & d = 432,23500 & \bar{d} = 432,24 \end{array}$$

⊙ **Sai số làm tròn:** Sai số làm tròn là số $\theta a \geq 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$|\bar{a} - a| \leq \theta a$$

Vì $a = \beta_p 10^p + \dots + \beta_j 10^j + \mu$, còn $\bar{a} = \beta_p 10^p + \dots + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \tilde{\beta}_j 10^j$ nên

$$|a - \bar{a}| = |(\beta_j - \tilde{\beta}_j) 10^j + \mu| < 0,5 \cdot 10^j.$$

⊙ **Sai số của số đã thu gọn:** Ta có

$$\bar{a} - A = \bar{a} - a + a - A$$

$$\text{do đó } |\bar{a} - A| \leq |\bar{a} - a| + |a - A| \leq \Delta a + \theta a$$

Vậy có thể lấy: $\Delta \bar{a} = \Delta a + \theta a$, tức là sau khi thu gọn, sai số tuyệt đối tăng lên.

⊙ **Ảnh hưởng của sai số thu gọn:** Ta xét một ví dụ. Áp dụng công thức nhị thức Niuton ta có công thức đúng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \quad (1.4)$$

với $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

Bây giờ ta tính hai vế của (1.4) bằng cách thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn:

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,000147912	0,508
1,41421	0,0001866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Sự khác biệt giữa các giá trị tính ra của hai vế chứng tỏ rằng sai số quy tròn có thể gây ra những kết quả không mong muốn trong quá trình tính toán.

1.2 Cách viết số xấp xỉ

1.2.1 Chữ số có nghĩa

Chữ số có nghĩa là mọi chữ số khác "0" và cả "0" nếu nó kẹp giữa hai chữ số có nghĩa hoặc nó đại diện cho hàng được giữ lại.

• **Ví dụ 1.4.** $a = 0,0030140$. Ba chữ số "0" đầu không có nghĩa.

1.2.2 Chữ số chắc

Giả sử a là giá trị gần đúng của A với sai số tuyệt đối Δa . Ta biết rằng mọi số thập phân a đều viết được dưới dạng: $a = \pm \sum \beta_i 10^i$, trong đó β_i là những số nguyên từ

0 đến 9. Chữ số có nghĩa β_i của a gọi là chữ số chắc, nếu $\Delta a \leq \omega \times 10^i$, trong đó ω là tham số cho trước. Tham số ω được chọn để một chữ số vốn đã chắc sau khi thu gọn vẫn là chữ số chắc. Giả sử chữ số chắc cuối cùng của a trước khi thu gọn là β_i . Để β_{i+1} và các chữ số trước nó vẫn chắc, phải có:

$$\Delta a + \theta a \leq \omega \times 10^{i+1} \Rightarrow \omega \times 10^i + 0,5 \times 10^{i+1} \leq \omega \times 10^{i+1}$$

hay $\omega \geq 5/9$. Đặc biệt β_i gọi là chữ số chắc theo nghĩa hẹp (nghĩa rộng) nếu $\omega = 0,5$ ($\omega = 1$).

• **Ví dụ 1.5.** Cho $a = 65,8274$ với $\Delta a = 0,0043$ thì các chữ số 6, 5, 8, 2 là chắc, còn các chữ số 7, 4 là không chắc. Nếu $\Delta a = 0,0067$ thì các chữ số 6, 5, 8 là chắc còn các chữ số 2, 7, 4 là không chắc.

Như vậy, sai số tuyệt đối Δa tách số gần đúng a thành 2 phần: phần ở bên trái gồm các chữ số chắc, phần còn lại ở bên phải gồm các chữ số không chắc. Độ chính xác của một số gần đúng được đánh giá không phải ở chỗ số ấy có nhiều chữ số mà ở chỗ số ấy có nhiều chữ số chắc.

⊙ **Chú ý:** Khi viết số gần đúng, chỉ nên giữ lại một hai chữ số không chắc để khi tính toán sai số chỉ tác động đến các chữ số không chắc mà thôi.

1.2.3 Cách viết số xấp xỉ

Cho a là số gần đúng của A với sai số tuyệt đối là Δa . Có hai cách viết số A :

- i. Viết kèm theo sai số như ở công thức (1.1) hoặc (1.2).
- ii. Viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều là chữ số chắc. Như vậy hai số gần đúng $a = 9$ và $b = 9,00$ khác xa nhau về độ chính xác, số a có thể sai số đến 1 đơn vị, còn số b chỉ có thể sai đến 0,01 đơn vị.

1.3 Sai số tính toán

Giả sử cần tính giá trị đại lượng $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ trong đó chỉ biết các giá trị gần đúng của đối số là $x_1, x_2, \dots, x_n$ với các sai số tương ứng là Δx_i (hay δx_i). Sai số của $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là sai số tính toán.

Nếu f là một hàm khả vi, liên tục theo các biến x_i thì

$$y - y^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\bar{x})(x_i - x_i^*)$$

trong đó $\bar{x}$ là điểm trung gian nằm giữa các điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Do f'_{x_i} liên tục và Δx_i khá bé nên ta có thể viết

$$|y - y^*| \approx \left| \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_i - x_i^*) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}| \Delta x_i =: \Delta y \quad (1.5)$$

Khi đó

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \sum_{i=1}^n \frac{|f'_{x_i}|}{|f|} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \Delta x_i \quad (1.6)$$

1.3.1 Sai số các phép tính cộng trừ

Nếu $y = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$ thì $y'_{x_i} = \pm 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ nên theo (1.5) ta có:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta x_i,$$

tức là sai số tuyệt đối của tổng bằng tổng sai số tuyệt đối của các số hạng.

Giả sử $\Delta x_m = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ và chữ số chắc cuối cùng của x_m ở hàng thứ k , nghĩa là $\Delta x_m = 10^k$. Ta có $\Delta y \geq \Delta x_m$, vì vậy khi làm phép cộng đại số, nên qui tròn các x_i đến mức giữ lại 1 hoặc 2 chữ số bên phải hàng thứ k .

⊙ **Chú ý** Trường hợp tổng đại số rất nhỏ, nghĩa là $|y| \ll 1$ thì sai số tương đối $\delta y = \frac{\Delta y}{|y|}$ trở nên rất lớn, do đó kết quả không chính xác. Vì vậy trong tính toán cần phải tránh các công thức có hiệu của hai số gần nhau.

1.3.2 Sai số các phép tính nhân chia

Giả sử

$$y = \frac{x_1 \dots x_p}{x_{p+1} \dots x_n}$$

Khi đó

$$\ln y = \sum_{i=1}^p \ln x_i - \sum_{j=p+1}^n \ln x_j \implies \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y = \pm 1$$

Theo (1.6) suy ra

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \delta x_i,$$

tức là sai số tương đối của phép toán nhân chia bằng tổng sai số tương đối các số hạng.

Gọi $\delta x_m = \max_{1 \leq i \leq n} \delta x_i$ và chữ số chắc cuối cùng của x_m ở hàng thứ k , ta thấy $\delta y \geq \delta x_m$ nên khi làm các phép tính trung gian để tính y chỉ cần lấy $k+1, k+2$ chữ số là đủ.

1.3.3 Sai số của phép lũy thừa, khai căn, nghịch đảo

Cho $y = x^\alpha$, khi đó $\delta y = \left| \frac{d}{dx} \ln y \right| \Delta x = |\alpha| \delta x$

- Nếu $\alpha > 1$ (phép lũy thừa) thì $\delta y > \delta x$, do đó độ chính xác giảm.
- Nếu $0 < \alpha < 1$ (phép khai căn) thì $\delta y < \delta x$ hay độ chính xác tăng.
- Nếu $\alpha = -1$ ta có phép nghịch đảo, $\delta y = \delta x$ nghĩa là độ chính xác không đổi.
- **Ví dụ 1.6.** Một sân nhỏ hình chữ nhật có các kích thước đo được là: $x = 2,56m \pm 0,01m$, $y = 4,2m \pm 0,02m$. Tính chu vi và diện tích của sân?

Giải

Chu vi của sân là $P = 2(x + y) \approx 2(2,56 + 4,2) = 13,52m$. Sai số tuyệt đối $\Delta P = 2(\Delta x + \Delta y) = 0,06$. Vì $0,01 < 0,06 < 0,1$ nên P chỉ có 3 chữ số chắc và có thể viết $P \approx 13,5m$.

Diện tích của sân: $S = xy \approx 2,56 \cdot 4,2 = 10,752$. Sai số tương đối $\delta S = \delta x + \delta y = \frac{1}{256} + \frac{1}{210}$, do đó $\Delta S = |S| \cdot \delta S = 0,093 < 0,1$. Như vậy S có 3 chữ số chắc và có thể viết $S \approx 10,8m^2$.

- **Ví dụ 1.7.** Cho diện tích hình vuông $S = 12,34$, $\Delta S = 0,01$. Tính cạnh $a = ?$

Ta có $a = \sqrt{S} \approx 3,5128$. Vì $\delta S = \Delta S / |S| \approx 0,01 / 12,34 \approx 0,0008$ nên $\Delta a \approx 3,5128 \times 0,0004 \approx 1,4 \times 10^{-3}$. Như vậy a có 4 chữ số chắc và $a \approx 3,513$.

- **Ví dụ 1.8.** Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu: $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, biết $d = 3,7 \pm 0,05$ và $\pi = 3,14$.

Giải

Xem π và d là đối số của V thì theo (1.5) và (1.6) ta có: $\delta V = \delta \pi + 3\delta d$ trong đó $\delta d = 0,0016 / 3,14 = 0,0005$ và $\delta d = 0,05 / 3,7 = 0,0135$. Suy ra $\delta V = 0,0005 + 3 \times 0,0135 \approx 0,04$. Mặt khác $V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 26,5$ nên $\Delta V = |V| \delta V = 26,5 \cdot 0,04 \approx 1,1$. Vậy $V = 26,5 \pm 1,1cm^3$.

1.3.4 Bài toán ngược của lý thuyết sai số

Giả sử đại lượng y tính theo công thức $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Hỏi phải lấy Δx_i bằng bao nhiêu để $\Delta y \leq \text{const}$ cho trước?

⊙ **Nguyên lý ảnh hưởng đều:** Ta coi $|f'_{x_i}| \Delta x_i = c (i = \overline{1, n})$, khi đó

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}| \Delta x_i = nc \Rightarrow \Delta x_i = \frac{c}{|f'_{x_i}|} = \frac{\Delta y}{n |f'_{x_i}|}$$

• **Ví dụ 1.9.** Một hình trụ có bán kính đáy $R = 2m$, chiều cao $h = 3m$. Hỏi $\Delta R, \Delta h$ phải bằng bao nhiêu để thể tích V được tính chính xác tới $0,1m^3$.

Giải

Ta có $V = \pi R^2 h$, suy ra $\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h = 12$ nên $\Delta \pi = \frac{0,1}{3 \times 12} < 0,003$.

Tương tự:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h = 37,7 \Rightarrow \Delta R = \frac{0,1}{3 \times 37,7} < 0,001;$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2 = 12,6 \Rightarrow \Delta h = \frac{0,1}{3 \times 12,6} < 0,003.$$

1.4 Sai số phương pháp và sai số tính toán

Trong thực tế khi giải một bài toán phức tạp ta thường phải thay bài toán đó bằng bài toán đơn giản hơn để có thể tính toán bằng tay hoặc bằng máy. Phương pháp thay thế như trên được gọi là **phương pháp gần đúng**.

Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là **sai số phương pháp**. Mặc dù bài toán đã ở dạng đơn giản, có thể tính toán bằng tay hoặc trên máy tính nhưng trong quá trình tính toán ta thường xuyên phải làm tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo bởi tất cả các lần quy tròn như vậy được gọi là **sai số tính toán**. Để hiểu rõ hơn bản chất của sai số phương pháp và sai số tính toán ta xét ví dụ sau:

• **Ví dụ 1.10.** Theo khai triển Maclaurin của hàm e^x ta có:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Với $x = 1$ công thức này có thể dùng để tính giá trị của số e . Tuy nhiên đây là tổng vô hạn, còn trong thực tế ta chỉ tính được tổng

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$