

KỶ YẾU

KỶ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 29

HUẾ, 2-8/4/2023

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM



TRƯỜNG ĐẠI HỌC
SƯ PHẠM - ĐH HUẾ



HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
SƯ PHẠM - ĐH HUẾ

KỶ YẾU

KỶ THI OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 29

BIÊN TẬP

Ngô Quốc Anh

Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội

Trần Thị Hoàng Anh

Viện Toán học

Đào Phương Bắc

Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội

Đoàn Trung Cường

Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học

HUẾ, 2-8/4/2023

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán học lần thứ 29 dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng, học viện và học sinh phổ thông các trường chuyên trong cả nước đã diễn ra tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế từ 2-8/4/2023. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho những người quan tâm. Do thời gian biên tập khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Nhóm biên tập

Mục lục

I KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 29 3

Thông tin về kỳ thi 5

II ĐỀ THI 7

Đề thi chính thức 9

1	Đại số	9
1.1	Bảng A	9
1.2	Bảng B	11
2	Giải tích	12
2.1	Bảng A	12
2.2	Bảng B	14
3	Trung học phổ thông	16
3.1	Ngày thứ nhất: Đại số	16
3.2	Ngày thứ hai: Hình học	17

Các bài đề xuất: Đại số 20

1	Định thức	22
2	Hệ phương trình	24
3	Không gian vectơ	25
4	Giá trị riêng	26
5	Đa thức	27
6	Tổ hợp	28

Các bài đề xuất: Giải tích 30

1	Dãy số	30
2	Chuỗi số	32
3	Hàm số	33
4	Phép tính vi phân	36

5	Phép tính tích phân	38
6	Phương trình hàm	40

III HƯỚNG DẪN GIẢI 43

Đề thi chính thức 45

1	Đại số	45
1.1	Bảng A	45
1.2	Bảng B	50
2	Giải tích	54
2.1	Bảng A	54
2.2	Bảng B	59
3	Trung học phổ thông	64
3.1	Ngày thứ nhất: Đại số	64
3.2	Ngày thứ hai: Hình học	70

Các bài đề xuất: Đại số 77

1	Ma trận	77
2	Định thức	85
3	Hệ phương trình	89
4	Không gian vectơ	92
5	Giá trị riêng	95
6	Đa thức	98
7	Tổ hợp	100

Các bài đề xuất: Giải tích 104

1	Dãy số	104
2	Chuỗi số	114
3	Hàm số	116
4	Phép tính vi phân	125
5	Phép tính tích phân	129
6	Phương trình hàm	137

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN - HỌC SINH LẦN THỨ 29

Thông tin về kỳ thi

Kỳ thi Olympic Toán học sinh viên có mục tiêu động viên phong trào học toán trong sinh viên và thúc đẩy công tác đổi mới trong giảng dạy, học tập. Kỳ thi đã được Hội Toán học Việt Nam khởi xướng và phối hợp với Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội Khoa học - Kỹ thuật Việt Nam, Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam thực hiện thành công trong 30 năm qua, hiện nay trở nên càng quan trọng trong bối cảnh thời lượng các môn toán ở phần lớn các trường đại học giảm. Để chuẩn bị cho kỳ thi, nhiều trường đại học, cao đẳng, học viện đã có sự chuẩn bị rất tốt và tích cực tham gia, nhiều sinh viên yêu toán đã rất mong đợi kỳ thi này. Kỳ thi cũng nhận được sự ủng hộ của lãnh đạo các trường, học viện, sự nhiệt tình của các thầy cô giáo đã tổ chức, động viên, tham gia bồi dưỡng cho các đoàn dự thi Olympic, những người đã có đóng góp hết sức quan trọng cho việc duy trì và thành công của các kỳ olympic Toán.

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 29 năm 2023 được tổ chức trong hai khoảng thời gian 18-19/3/2023 cho học sinh và 2-8/4/2023 cho sinh viên. Do điều kiện đi lại khác nhau nên phần thi của học sinh THPT được tổ chức trực tuyến, phần thi của sinh viên được tổ chức trực tiếp tại Trường ĐH Sư phạm - Đại học Huế.

Dưới đây là một số nét chính về chuyên môn của kỳ thi.

1. Đại học:

Năm nay đã có 615 sinh viên đăng ký dự thi với 713 lượt thi, cụ thể 368 sinh viên thi môn Đại số (ĐS), 345 sinh viên thi môn Giải tích (GT). Trong mỗi môn thi, các trường đăng kí theo hai bảng A và B, số lượng cụ thể như:

Ở môn Đại số có 161 em dự thi bảng A và 207 em dự thi bảng B;

Ở môn Giải tích có 168 em dự thi bảng A và 177 em dự thi bảng B.

Kỳ thi đã diễn ra suôn sẻ và nghiêm túc. Năm nay đề thi môn Giải tích tương đối vừa sức sinh viên, kết quả môn Đại số có sự phân hóa mạnh giữa top trên và nhóm dưới.

Điểm cao nhất ở 2 môn Đại số và Giải tích là 28,5 và 30; có 4 sinh viên đạt 2 giải nhất là Ngô Quý Đăng và Trần Ngọc Hiếu (Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Mạc Nam Trung (Trường ĐHKHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh), Dương Thanh Tùng (Trường ĐH FPT), trong đó sinh viên Ngô Quý Đăng xuất sắc là thủ khoa đồng thời hai môn Đại số và Giải tích. Có 2 sinh viên nữ xuất sắc đạt giải nhất là Cù Thị Kiều Trang (ĐH Hùng Vương, Đại số, bảng B) và Nguyễn Thị Bích Ngân (ĐH Tài chính-Marketing, Giải tích, bảng B).

Số lượng giải thưởng cho sinh viên: 62 giải nhất, 126 giải nhì, 191 giải ba. Ban Tổ chức cũng trao một số giải Khuyến khích cho những thí sinh có điểm gần giải chính thức hoặc cao nhất đội.

Các đoàn ở mạng đại học có thành tích tốt:

Bảng A: Đại học Bách khoa Hà Nội, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội, Trường ĐH Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh.

Bảng B: Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, Trường ĐH VINUni, Trường ĐH FPT.

Thời gian gần đây, Ban giám khảo đã có chủ trương ra đề thi mang tính ứng dụng hơn. Bên cạnh những bài toán theo phong cách truyền thống, có thêm những bài toán ứng dụng thực tế, trong đó thí sinh cần xây dựng mô hình toán học, sau đó dùng công cụ toán học để tìm lời giải cho bài toán thực tế.

2. Trung học phổ thông

Mảng thi của THPT được tổ chức từ 18-19/3/2023 theo hình thức trực tuyến. Đã có 46 đoàn tham dự với 380 học sinh. Các học sinh đã làm hai bài thi trong hai buổi. Mỗi bài thi là một chuỗi câu hỏi liên kết chặt chẽ với nhau, giúp các học sinh tìm hiểu một vấn đề của toán sơ cấp có liên quan tới toán cao cấp.

Số lượng giải thưởng cho học sinh: 34 giải nhất, 67 giải nhì, 99 giải ba.

Thủ khoa là em Phạm Gia Hưng (Trường THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Quảng Bình); Á khoa 1 là em Trần Gia Định (Trường THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình), Á khoa 2 là em Lê Mạnh Khiêm (Trường THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh).

Các trường đạt thành tích tốt nhất là THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, THPT chuyên Hà Tĩnh và THPT chuyên Vĩnh Phúc.

Nhân kỳ thi này, gần 1.000 học sinh THPT đã được tham dự một số bài giảng về Hình học, Số học và Đại số do các chuyên gia bồi dưỡng học sinh giỏi dạy trực tuyến.

Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 29 đã thành công tốt đẹp về cả chuyên môn lẫn công tác tổ chức.

Tailieu.vn

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 Đại số

1.1 Bảng A

BÀI 1. Ký hiệu $\mathbb{R}[X]_{2023}$ là $\mathbb{R}$ -không gian vectơ các đa thức một biến với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2023. Cho f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi đa thức với đạo hàm cấp hai của nó:

$$f : \mathbb{R}[X]_{2023} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{2023}, \\ p(X) \mapsto p''(X).$$

Đặt $g = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{870 \text{ lần}}$ là ánh xạ hợp của 870 lần ánh xạ f .

- Chứng minh rằng g là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}[X]_{2023}$ vào chính nó.
- Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\text{Im}(g)$ và của không gian hạt nhân $\text{Ker}(g)$.

BÀI 2.

- Một thành phố có hai nhà máy: nhà máy điện (E) và nhà máy nước (W). Để nhà máy (E) sản xuất điện thì nó cần nguyên liệu đầu vào là điện do chính nó sản xuất trước đó và nước của nhà máy (W). Tương tự như vậy để nhà máy (W) sản xuất nước thì nó cần đến nước do chính nó sản xuất cũng như điện của nhà máy (E). Cụ thể
 - Để sản xuất được lượng điện tương đương 1 đồng, nhà máy (E) cần lượng điện tương đương 0,3 đồng mà nó sản xuất được trước đó và lượng nước tương đương 0,1 đồng từ nhà máy (W);
 - Để sản xuất được lượng nước tương đương 1 đồng, nhà máy (W) cần lượng điện tương đương 0,2 đồng từ nhà máy (E) và lượng nước tương đương 0,4 đồng do chính nó sản xuất trước đó.

Chính quyền thành phố yêu cầu hai nhà máy trên cung cấp đến được với người dân lượng điện tương đương 12 tỷ đồng và lượng nước tương đương 8 tỷ đồng. Hỏi thực tế mỗi nhà máy cần sản xuất tổng cộng lượng điện và lượng nước tương đương với bao nhiêu tỷ đồng để cung cấp đủ nhu cầu của người dân?

- (b) Cho $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ là ma trận thỏa mãn các phần tử đều là số thực không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột của A đều nhỏ hơn 1. Với $d = (d_1, d_2)^T$ là một vectơ cột tùy ý, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một vectơ cột $x = (x_1, x_2)^T$ sao cho $x = Ax + d$.

BÀI 3. Cho $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số phức thỏa mãn đa thức $x^4 - 2x^3 - 1$ bằng $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$.

- (a) Chứng minh rằng các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nói trên đôi một khác nhau.
 (b) Chứng minh rằng các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng đôi một khác nhau.
 (c) Tính giá trị của biểu thức $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$.

BÀI 4. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

(Ở đây ma trận giới hạn có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

- (a) Tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Cho x, y là hai số thực bất kỳ, hãy tìm các phần tử của ma trận $\sin A$ với

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

theo x, y .

- (c) Tồn tại hay không một ma trận vuông A cấp 2 với phần tử là các số thực sao cho

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

BÀI 5. Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

- (a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .
 (b) Tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

1.2 Bảng B

BÀI 1.

- (a) Cho x là một số thực. Tính định thức của ma trận sau theo x :

$$A = \begin{pmatrix} x & 2022 & 2023 \\ 2022 & 2023 & x \\ 2023 & x & 2022 \end{pmatrix}.$$

- (b) Tìm các số thực x sao cho hạng của ma trận A nhỏ hơn 3. Tính hạng của ma trận A với x vừa tìm được.

BÀI 2. Giả sử $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4),$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là tham số.

- (a) Với $\lambda = 3$, hãy tìm
- (a1) Một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân $\text{Ker}(f)$.
 - (a2) Một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$.
- (b) Tìm số chiều của không gian ảnh $\text{Im}(f)$ như một hàm số của λ .

BÀI 3. Cho đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.

- (a) Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có 4 nghiệm phức (kể cả bội), ký hiệu bởi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Chứng minh rằng các nghiệm phức nói trên đôi một phân biệt.
- (b) Chứng minh rằng các lũy thừa $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ cũng là các số đôi một phân biệt.
- (c) Tìm một đa thức bậc 4 nhận các số $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3, \delta^3$ là nghiệm.

BÀI 4. Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}.$$

(Ở đây quy ước $0! = 1$, A^0 là ma trận đơn vị, ma trận giới hạn ở vế phải có phần tử là giới hạn của phần tử tương ứng của các ma trận tổng $S_k = \sum_{n=0}^k \frac{A^n}{n!}$. Ma trận giới hạn này luôn tồn tại.)

- (a) Với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hãy tìm một ma trận khả nghịch C sao cho $C^{-1}AC$ là ma trận đường chéo.

- (b) Tìm các phần tử của ma trận e^A với A là ma trận cho ở phần (a).

BÀI 5. Ký hiệu P_n là tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch A cấp n sao cho các phần tử của A và A^{-1} đều bằng 0 hoặc 1.

- (a) Với $n = 3$ hãy tìm tất cả các ma trận thuộc P_3 .
- (b) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa P_n và tập S_n các hoán vị trên n phần tử. Từ đó hãy tính số phần tử của P_n với n là số nguyên dương tùy ý.

2 Giải tích

2.1 Bảng A

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4^k}\right) = \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

- (a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.
- (b) Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n .
- (c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và xác định giới hạn của dãy số chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

BÀI 2. Cho $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.
- (b) Hàm f có khả vi tại 0 không?
- (c) Hàm f có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1, 1]$ không?

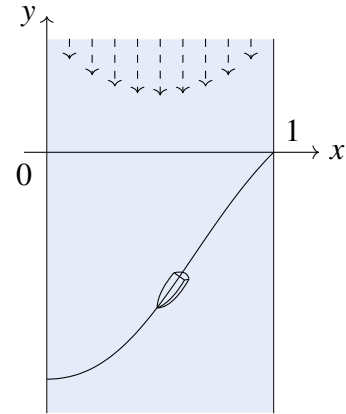
BÀI 3.

Hình vẽ bên cạnh mô tả một phần dòng sông với bờ trái được cho bởi đường thẳng $x = 0$ và bờ phải được cho bởi đường thẳng $x = 1$. Một con thuyền xuất phát từ điểm $(1, 0)$ và muốn vượt sông để đến điểm dự kiến $(0, 0)$.

Do dòng chảy của sông nên đường đi thực tế của con thuyền trùng khớp phần đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$$

với $0 \leq x \leq 1$.



- Con thuyền có đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến không?
- Trong trường hợp không đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến, con thuyền có cập được bờ trái hay không?
- Hãy xác định vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0, 0)$ là ngắn nhất trong cả quá trình chuyển động.

BÀI 4. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

- Chứng minh rằng nếu

$$\int_0^1 f(x) (P(x))^m dx = 0$$

với mọi số nguyên không âm m và với mọi đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

- Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất?

BÀI 5. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$, và có $f(0) = 0$.

- Có tồn tại hay không một số thực $d \in (0, 1)$ sao cho

$$|f'(d)| \leq (f(d))^2?$$

(Nếu câu trả lời là “có”, hãy chứng minh; nếu câu trả lời là “không”, hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f .)

(b) Chứng minh rằng nếu

$$|f'(x)| \leq (f(x))^2 \quad \text{với mọi } x \in (0, 1)$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

(c) Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$(f(c))^2 \leq |f'(c)|.$$

2.2 Bảng B

BÀI 1. Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4^k}\right) = \left(1 + \frac{1}{4^1}\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \quad \forall n \geq 1.$$

- (a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 5/4$.
- (b) Chứng minh rằng $u_n \leq 2023$ với mọi số nguyên dương n .
- (c) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

BÀI 2. Cho $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{nếu } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ x & \text{nếu } x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng hàm f liên tục tại 0.
- (b) Hàm f có khả vi tại 0 không?
- (c) Hàm f có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1, 1]$ không?

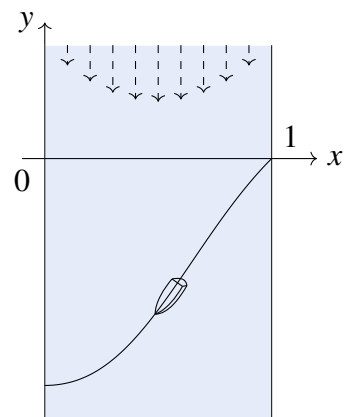
BÀI 3.

Hình vẽ bên cạnh mô tả một phần dòng sông với bờ trái được cho bởi đường thẳng $x = 0$ và bờ phải được cho bởi đường thẳng $x = 1$. Một con thuyền xuất phát từ điểm $(1, 0)$ và muốn vượt sông để đến điểm dự kiến $(0, 0)$.

Do dòng chảy của sông nên đường đi thực tế của con thuyền trùng khớp phân đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$$

với $0 \leq x \leq 1$.



- (a) Con thuyền có đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến không?
- (b) Trong trường hợp không đến được điểm $(0, 0)$ như dự kiến, con thuyền có cập được bờ trái hay không?
- (c) Hãy xác định vị trí của con thuyền khi khoảng cách từ nó đến điểm đích $(0, 0)$ là ngắn nhất trong cả quá trình chuyển động.

BÀI 4. Cho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục.

- (a) Chứng minh rằng nếu

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$$

với mọi hàm số liên tục $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$g(0) = g(1) = 0$$

thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

- (b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g(\frac{1}{2}) = 0$?

BÀI 5.

Hình vẽ bên cạnh thể hiện một phần đồ thị của hàm f được cho bởi

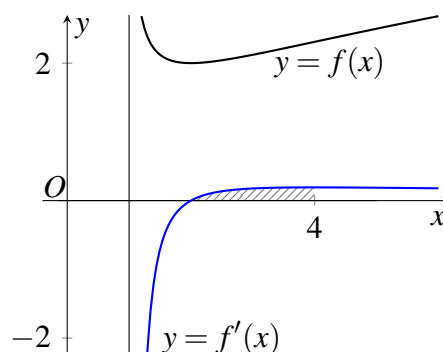
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

và đồ thị của hàm f' (đạo hàm của hàm f).

- (b) Không tính f' và không dùng hình vẽ, hãy chứng tỏ rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trên $(1, +\infty)$.

- (c) Tìm công thức tính $f'(x)$ theo x .

- (c) Tính diện tích phần mặt phẳng (phần được gạch chéo trên hình) được giới hạn bởi trục Ox , đồ thị hàm f' , và đường thẳng $x = 4$.



3 Trung học phổ thông

3.1 Ngày thứ nhất: Đại số

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong lời giải của câu sau. Nếu một câu được giải mà không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để giải các câu trước.

A. Các kết quả cơ bản về đa thức bất khả quy

Ký hiệu $\mathbb{Z}[x]$ và $\mathbb{Q}[x]$ lần lượt là tập hợp các đa thức hệ số nguyên và hệ số hữu tỷ. Một đa thức bậc ≥ 1 trong $\mathbb{Z}[x]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$) được gọi là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$) nếu nó không thể viết được thành tích hai đa thức trong $\mathbb{Z}[x]$ (tương ứng, $\mathbb{Q}[x]$), mỗi đa thức có bậc ≥ 1 .

BÀI 1. Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - 1$$

bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 2. a) Cho số nguyên tố p và hai đa thức hệ số nguyên

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0; Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Biết rằng tích $P(x)Q(x)$ là một đa thức có tất cả các hệ số chia hết cho p . Chứng minh rằng một trong hai đa thức $P(x), Q(x)$ có tất cả các hệ số chia hết cho p .

b) Một đa thức hệ số nguyên có bậc lớn hơn 0 được gọi là *đa thức nguyên bản* nếu ước chung lớn nhất của các hệ số của đa thức đó bằng 1 (nói cách khác, các hệ số của nó là một họ các số nguyên nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.

BÀI 3. Cho đa thức hệ số nguyên có bậc $n > 0$:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Giả sử tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $p \mid a_i$ với mọi $0 \leq i < n$,

b) $p \nmid a_n$,

c) $p^2 \nmid a_0$.

Chứng minh rằng $P(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$.

BÀI 4. Chứng minh rằng một đa thức hệ số nguyên bất khả quy trong $\mathbb{Z}[x]$ khi và chỉ khi nó bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

BÀI 5. Cho đa thức

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$