

BỘ MÔN GIẢI TÍCH

BÀI TẬP GIẢI TÍCH B2

KHOA TOÁN TIN HỌC, ĐH. KHTN TP HCM

Tailieu.vn

Mục lục

1	ĐƯỜNG VÀ MẶT TRONG KHÔNG GIAN TỌA ĐỘ	5
A.	Ôn tập và mở rộng kiến thức hình học tọa độ	5
B.	Mặt trụ và mặt bậc hai	8
C.	Hàm vectơ một biến và đường cong	10
2	ĐẠO HÀM RIÊNG & SỰ KHẢ VI CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN	17
A.	Hàm số nhiều biến	17
B.	Giới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến	24
C.	Đạo hàm riêng	25
D.	Sự khả vi	33
E.	Quy tắc mắt xích hay đạo hàm của hàm hợp	37
F.	Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient	43
G.	Cực trị không điều kiện của hàm số nhiều biến	50
H.	Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện	55
3	TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN	59
A.	Tích phân kép trên một hình chữ nhật	59
B.	Tích phân lặp	60
C.	Tích phân kép trên một miền tổng quát	62
D.	Tích phân kép trong tọa độ cực	65
4	LÀM QUEN VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	69
A.	Phương trình vi phân cấp 1	69
B.	Phương trình vi phân cấp 2	72

TaiLieu.vn

Chương 1

ĐƯỜNG VÀ MẶT TRONG KHÔNG GIAN TỌA ĐỘ

A. Ôn tập và mở rộng kiến thức hình học tọa độ

I. Bài tập về tích vô hướng

- Vào một ngày, một người bán dạo bán được a bánh hamburgers, b hot dogs và c ly nước ngọt. Anh ta tính \$2 cho mỗi hamburger, \$1, 5 cho mỗi cái hot dog và \$1 cho mỗi ly nước. Nếu viết $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ và $\vec{v} = \langle 2, 1.5, 1 \rangle$ thì ý nghĩa của $\vec{u} \cdot \vec{v}$ là gì?
 - Tìm một vectơ đơn vị vuông góc với cả hai vectơ $\vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{j} + \vec{k}$.
 - Tìm hai vectơ đơn vị hợp với $\vec{v} = \langle 3, 4 \rangle$ một góc 60° .
 - Tìm các cô-sin và góc chỉ hướng của các vectơ sau (các góc được làm tròn đến 1 đơn vị độ)
 - $\langle 3, 4, 5 \rangle$
 - $\langle 1, -2, -1 \rangle$
 - $2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$
 - $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
 - $\langle c, c, c \rangle$ với $c > 0$
 - Tính góc giữa đường chéo khối lập phương với một trong các cạnh của nó.
 - Tính góc giữa một đường chéo khối lập phương với đường chéo của một trong các mặt của khối lập phương.
 - Nếu một vectơ có hai góc chỉ hướng $\alpha = \pi/4, \beta = \pi/3$. Tìm góc chỉ phương thứ ba γ .
-
- Tìm vectơ hình chiếu của $\vec{b}$ lên $\vec{a}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \vec{a} = \langle 3, -4 \rangle, \vec{b} = \langle 5, 0 \rangle & \langle 5, -1, 4 \rangle \\
 \text{b)} \quad \vec{a} = \langle 1, 2 \rangle, \vec{b} = \langle -4, 1 \rangle & \text{e)} \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = \\
 \text{c)} \quad \vec{a} = \langle 3, 6, -2 \rangle, \vec{b} = & \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \\
 \langle 1, 2, 3 \rangle & \text{f)} \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \\
 \text{d)} \quad \vec{a} = \langle -2, 3, -6 \rangle, \vec{b} = & \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}
 \end{array}$$

-
9. Ký hiệu $\text{orth}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} - \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$, tạm gọi $\text{orth}_{\vec{a}} \vec{b}$ là hình chiếu của $\vec{b}$ (lên phương) trực giao với $\vec{a}$. Chứng minh rằng vectơ $\text{orth}_{\vec{a}} \vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
10. Cho $\vec{a} = \langle 1, 2 \rangle$ và $\vec{b} = \langle -4, 1 \rangle$. Tìm $\text{orth}_{\vec{a}} \vec{b}$ và vẽ minh họa các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ và $\text{orth}_{\vec{a}} \vec{b}$.
11. Nếu $\vec{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$. Tìm một vectơ $\vec{b}$ sao cho $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = 2$.
12. Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.
- Trong trường hợp nào $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{comp}_{\vec{b}} \vec{a}$?
 - Trong trường hợp nào $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$?
-

13. Tính công của một lực $\vec{F} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$ (độ lớn đo bằng newtons) tác động vào một vật di chuyển từ điểm $(0, 10, 8)$ đến điểm $(6, 12, 20)$ dọc theo một đường thẳng. Khoảng cách đo bằng mét.
14. Một xe tải kéo một xe hơi chết máy trên đường. Dây xích kéo tạo góc 30° so với mặt đường. Lực căng của dây xích là $1500N$. Tính công của xe tải khi kéo xe hơi một đoạn đường $1km$.
15. Một chiếc thuyền giương buồm đi về hướng Nam với sức gió $400lb$. Hướng gió lệch từ Nam đến Đông là 36° . Tính công của sức gió khi thuyền dịch chuyển được $120ft$.
-

II. Bài tập về tích hữu hướng

16. Tính tích $\vec{a} \times \vec{b}$ và kiểm tra nó vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- $\vec{a} = \langle 6, 0, -2 \rangle, \vec{b} = \langle 0, 8, 0 \rangle$
 - $\vec{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle, \vec{b} = \langle 2, 4, 6 \rangle$

c) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{k}$

d) $\vec{a} = \vec{j} + 7\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

e) $\vec{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle, \vec{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

17. Cho $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ và $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$. Tính $\vec{a} \times \vec{b}$ và vẽ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ có chung điểm đầu tại gốc tọa độ.

18. Tính mà không dùng định thức, thay vào đó dùng tính chất của tích hữu hướng.

a) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$

c) $(\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{k} - \vec{i})$

b) $\vec{k} \times (\vec{i} - 2\vec{j})$

d) $(\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} - \vec{j})$

19. Các biểu thức dưới đây có nghĩa hay không? Nếu không, giải thích vì sao. Nếu có, thì biểu thức đó là vectơ hay là số.

a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

d) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$

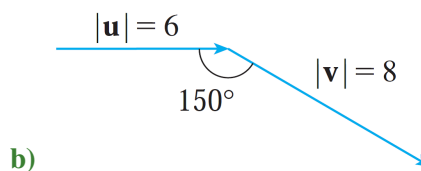
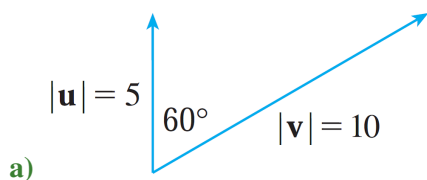
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$

e) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$

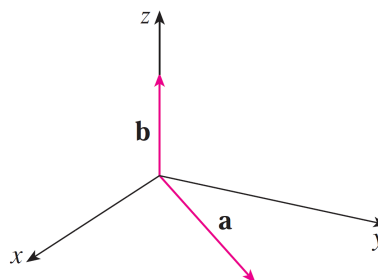
c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

f) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

20. Tính $|\vec{u} \times \vec{v}|$ và xác định hướng của $\vec{u} \times \vec{v}$ hướng vào hay ra ngoài trang vở



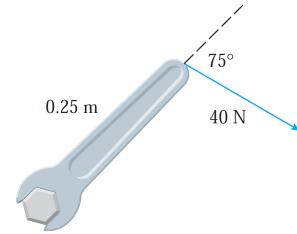
21. Trong hình bên, $\vec{a}$ nằm trong mặt-xy, $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{k}$. Độ dài của chúng là $|\vec{a}| = 3$ và $|\vec{b}| = 2$.



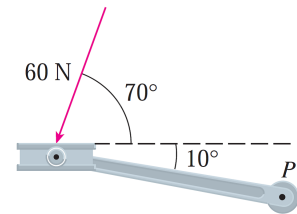
a) Tính $|\vec{a} \times \vec{b}|$

b) Sử dụng qui tắc bàn tay phải, hãy xác định các thành phần của $\vec{a} \times \vec{b}$ là dương, âm hay bằng 0.

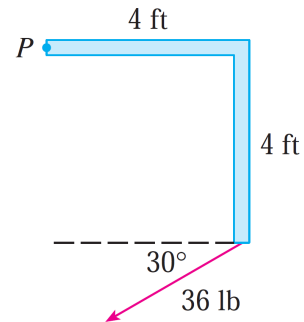
22. Một bu-loong được xiết chặt bằng cách áp một lực $40N$ vào khóa vặn dài $0,25m$ như hình bên. Tính độ lớn mô-men xoắn quanh tâm của bu-loong và mô tả vectơ mô-men xoắn này.



23. Bàn chân đẩy bàn đạp xe đạp một lực $60lb$ như hình vẽ. Tay đòn quay có bán kính $18cm$. Tìm độ lớn của vectơ mô-men quay quanh điểm P.



24. Tính độ lớn của vectơ mô-men quay quanh P khi một lực $36lb$ đặt như hình bên.



B. Mặt trụ và mặt bậc hai

1. Mô tả và phác họa các mặt cong có phương trình

a) $x^2 + y^2 = 1$

e) $yz = 4$

b) $y^2 + z^2 = 1$

f) $z = \cos x$

c) $y^2 + 4z^2 = 4$

g) $x^2 - y^2 = 1$

d) $z = 4 - x^2$

2. Sử dụng vết để mô tả và phác họa mặt cong có phương trình

a) $z = 4x^2 + y^2$

e) $x^2 = y^2 + 4z^2$

b) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

f) $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

c) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

g) $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

d) $x = y^2 + 4z^2$

3-10 Các phương trình diễn tả mặt cong nào (được đánh số I-VIII), giải thích tại sao

3. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

4. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

5. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

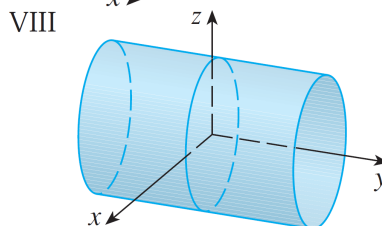
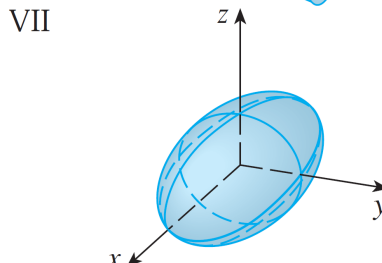
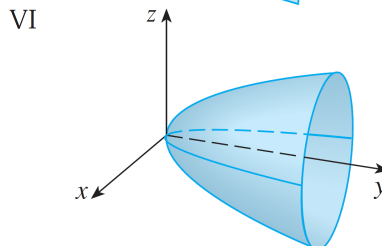
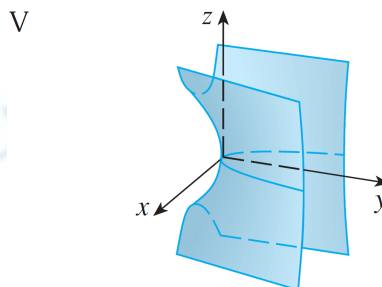
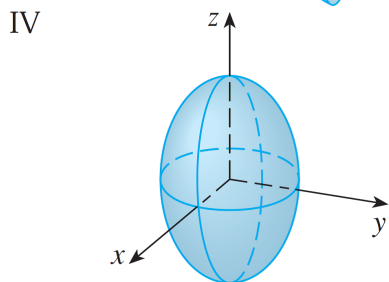
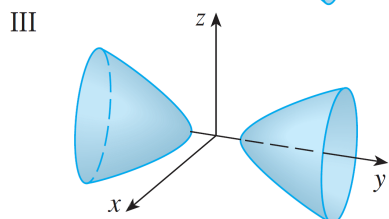
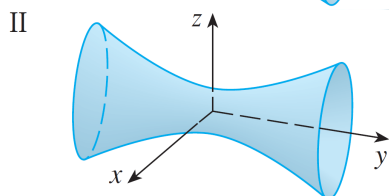
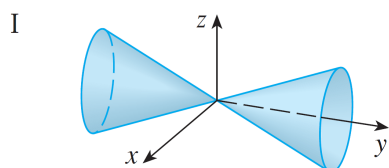
6. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

7. $y = 2x^2 + z^2$

8. $y^2 = 2x^2 + z^2$

9. $x^2 + 2z^2 = 1$

10. $y = x^2 - z^2$



11. Phác họa miền bị bao quanh bởi các mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 1$ với $1 \leq z \leq 2$.

12. Phác họa miền bị bao quanh bởi các paraboloids $z = x^2 + y^2$ và $z = 2 - x^2 - y^2$.
13. Tìm phương trình mặt tạo bởi đường parabol $y = x^2$ quay quanh trục-Oy.
14. Tìm phương trình mặt tạo bởi đường thẳng $x = 3y$ quay quanh trục-Ox.
15. Tìm phương trình mặt bao gồm các điểm cách đều điểm $(-1, 0, 0)$ và mặt phẳng $x = 1$. Phác họa mặt này.
16. Tìm phương trình mặt bao gồm các điểm P sao cho khoảng cách từ P đến trục-Ox bằng hai lần khoảng cách từ P đến mặt-yz. Phác họa mặt này.

17. Tháp làm nguội của lò phản ứng hạt nhân có hình dạng hyperboloid một mảnh (hình bên). Nếu đường kính đáy của tháp là $280m$ và đường kính chỗ eo thắt của tháp là $200m$, ở độ cao cách đáy $500m$, thì phương trình của mặt hyperboloid là gì?



C. Hàm vectơ một biến và đường cong

I. Bài tập về phương trình, hình vẽ đường cong

1-8 Vẽ đường cong có phương trình vectơ cho trước. Dùng mũi tên chỉ rõ hướng của đường cong khi t tăng.

1. $\vec{r}(t) = \langle \sin t, t \rangle$

6. $\vec{r}(t) = \langle t^2, t, 2 \rangle$

2. $\vec{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

7. $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t^4 \vec{j} + t^6 \vec{k}$

3. $\vec{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \sin 2t \rangle$

8. $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \sin t \vec{k}$

4. $\vec{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t \rangle$

5. $\vec{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2 \sin t \rangle$

9-14 Tìm phương trình tham số phù hợp với các đường cong được đánh số từ I-VI. Giải thích vì sao.

9. $x = \cos 4t, y = t, z = \sin 4t$

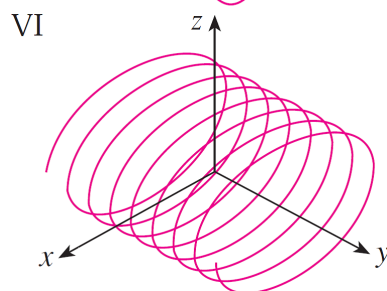
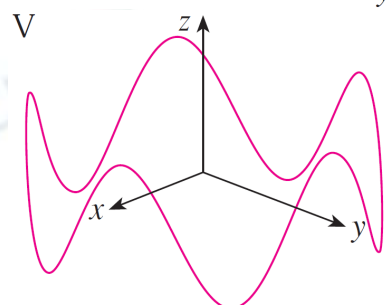
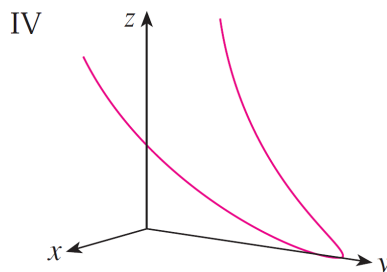
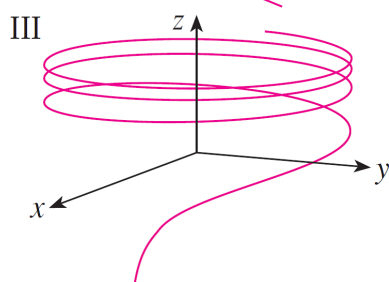
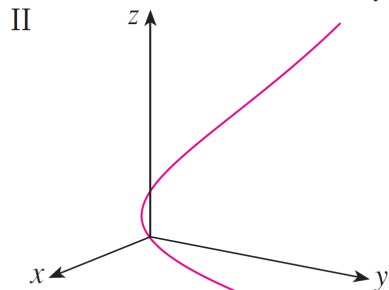
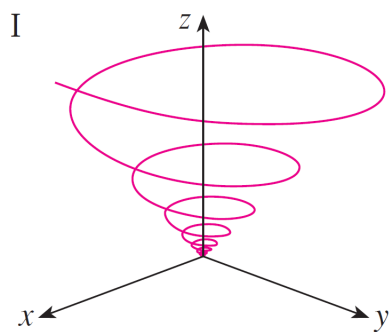
10. $x = t, y = t^2, z = e^{-t}$

11. $x = t, y = 1/(1 + t^2), z = t^2$

12. $x = e^{-t} \cos 10t, y = e^{-t} \sin 10t, z = e^{-t}$

13. $x = \cos t, y = \sin t, z = \sin 5t$

14. $x = \cos t, y = \sin t, z = \ln t$



15. Chứng minh đường cong với phương trình tham số $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ nằm trên mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$. Dựa vào đó hãy phác họa đường cong.

16. Chứng minh đường cong với phương trình tham số $x = \sin t, y = \cos t, z = \sin^2 t$ là đường cong giao tuyến của hai mặt $z = x^2$ và mặt $x^2 + y^2 = 1$. Dựa vào đó hãy phác họa đường cong.

17. Đường cong $\vec{r}(t) = t \vec{i} + (2t - t^2) \vec{k}$ cắt mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ tại những điểm nào?

18. Lò xo $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$ cắt mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ tại những điểm nào?

19. Tìm phương trình vectơ biểu diễn đường cong giao tuyến của hai mặt

- a) Mặt $x^2 + y^2 = 4$ và mặt $z = xy$
 b) Mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt $z = 1 + y$
 c) Mặt $z = 4x^2 + y^2$ và mặt $y = x^2$

20. Nếu hai vật bay trong không gian theo hai quỹ đạo khác nhau, điều quan trọng người ta hay quan tâm là chúng có va chạm nhau không. (Tên lửa có bay trúng mục tiêu di động của nó không? Hai máy bay có va chạm trên không hay không? v.v.). Các đường cong quỹ đạo có thể cắt nhau, nhưng chúng ta cần biết liệu các vật thể có cùng vị trí ở cùng thời điểm hay không. Giả sử đường bay của hai vật thể được cho bởi phương trình

$$\vec{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \quad \vec{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

Các vật thể này có va chạm nhau không?

21. Hai vật bay theo quỹ đạo không gian cho bởi

$$\vec{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad \vec{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

Hai vật đó có va chạm nhau không? Hai quỹ đạo có cắt nhau không?

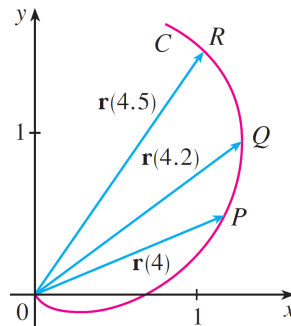
II. Bài tập về tiếp tuyến đường cong, độ dài đường cong

22. Hình vẽ dưới trình bày đường cong C cho bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$

- a) Xác định các vectơ $\vec{r}(4, 5) - \vec{r}(4)$ và $\vec{r}(4, 2) - \vec{r}(4)$. Sau đó vẽ các vectơ

$$\frac{\vec{r}(4, 5) - \vec{r}(4)}{0,5} \quad \text{và} \quad \frac{\vec{r}(4, 2) - \vec{r}(4)}{0,2}$$

- b) Viết biểu thức của $\vec{r}'(t)$ và của vectơ tiếp tuyến đơn vị $\vec{T}(4)$.
 c) Vẽ $\vec{T}(4)$.



23. a) Phác họa thật lớn đường cong cho bởi $\vec{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leq t \leq 2$ và vẽ các vectơ $\vec{r}(1)$, $\vec{r}'(1)$ và $\vec{r}(1, 1) - \vec{r}(1)$.
 b) Vẽ vectơ $\vec{r}'(1)$ đặt tại điểm $(1, 1)$ và so sánh nó với vectơ

$$\frac{\vec{r}(1, 1) - \vec{r}(1)}{0, 1}$$

Hãy giải thích vì sao hai vectơ này có vẻ gần trùng nhau.

- 24-29** a) Phác họa đường cong phẳng với phương trình vectơ cho trước.
 b) Tìm $\vec{r}'(t)$.
 c) Phác họa vectơ vị trí $\vec{r}(t)$ và vectơ tiếp tuyến $\vec{r}'(t)$ tại giá trị t cho trước.

24. $\vec{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle, t = -1$

25. $\vec{r}(t) = \langle t + 1, \sqrt{t} \rangle, t = 1$

26. $\vec{r}(t) = \langle \sin t, 2 \cos t \rangle, t = \pi/4$

27. $\vec{r}(t) = \langle e^t, e^{-t} \rangle, t = 0$

28. $\vec{r}(t) = \langle e^t, e^{3t} \rangle, t = 0$

29. $\vec{r}(t) = \langle 1 + \cos t, 2 + \sin t \rangle, t = \pi/6$

30-37 Tìm đạo hàm của các hàm vectơ

30. $\vec{r}(t) = \langle t \sin t, t^2, t \cos 2t \rangle$

31. $\vec{r}(t) = \langle \tan t, \sec t, 1/t^2 \rangle$

32. $\vec{r}(t) = \vec{i} - \vec{j} + e^{4t} \vec{k}$

33. $\vec{r}(t) = \arcsin t \vec{i} + \sqrt{1 - t^2} \vec{j} + \vec{k}$

34. $\vec{r}(t) = e^{t^2} \vec{i} - \vec{j} + \ln(1 + 3t) \vec{k}$

35. $\vec{r}(t) = at \cos 3t \vec{i} + b \sin^3 t \vec{j} + c \cos^3 t \vec{k}$

36. $\vec{r}(t) = \vec{a} + t \vec{b} + t^2 \vec{c}$

37. $\vec{r}(t) = t \vec{a} \times (\vec{b} + t \vec{c})$

38-41 Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị $\vec{T}(t)$ tại giá trị của tham số t cho trước.

38. $\vec{r}(t) = \langle te^{-t}, 2 \arctan t, 2e^t \rangle, t = 0$

39. $\vec{r}(t) = 4\sqrt{t} \vec{i} + t^2 \vec{j} + t \vec{k}, t = 1$

40. $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + 3t \vec{j} + 2 \sin 2t \vec{k}, t = 0$

41. $\vec{r}(t) = 2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j} + \tan t \vec{k}, t = \pi/4$

42. Nếu $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, tìm $\vec{r}'(t)$, $\vec{T}(1)$, $\vec{r}''(t)$ và $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$.

43. Nếu $\vec{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, tìm $\vec{T}(0)$, $\vec{r}''(0)$ và $\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t)$.

44-47. Viết phương trình tham số của tiếp tuyến của đường cong với phương trình tham số cho trước tại một điểm được chỉ rõ.

44. $x = 1 + 2\sqrt{t}, y = t^3 - t, z = t^3 + t; (3, 0, 2)$

45. $x = e^t, y = te^t, z = te^{t^2}; (1, 0, 0)$

46. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}; (1, 0, 1)$

47. $x = \ln t, y = 2\sqrt{t}, z = t^2; (0, 2, 1)$

48. Tìm giao điểm của hai đường tiếp tuyến với đường cong $\vec{r}(t) = \langle \sin \pi t, 2 \sin \pi t, \cos \pi t \rangle$ tại các điểm $t = 0$ và $t = \frac{1}{2}$.

49. Tại điểm nào thì các đường cong $\vec{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ và $\vec{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ giao nhau? Tính góc giao nhau giữa hai đường cong, chính xác đến 1^0 .

50. Tìm $\vec{r}(t)$ biết $\vec{r}'(t) = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j} + \sqrt{t} \vec{k}$ và $\vec{r}(1) = \vec{i} + \vec{j}$.

51. Tìm $\vec{r}(t)$ biết $\vec{r}'(t) = t \vec{i} + e^t \vec{j} + te^t \vec{k}$ và $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

52. Cho $\vec{u}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$ và $\vec{v}(t) = \langle t, \cos t, \sin t \rangle$. Tính theo các quy tắc đã biết

a) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]$

b) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]$

53. Nếu $\vec{r}$ là một hàm vectơ sao cho $\vec{r}''$ tồn tại. Chứng minh

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{r}''(t)$$

54. Tìm biểu thức cho $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t) \cdot [\vec{v}(t) \times \vec{w}(t)]]$.

55. Nếu $\vec{r}(t) \neq 0$, chứng minh $\frac{d}{dt}|\vec{r}(t)| = \frac{1}{|\vec{r}(t)|} \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$.

56. Nếu một đường cong có tính chất là vectơ vị trí $\vec{r}(t)$ luôn vuông góc với vectơ tiếp tuyến $\vec{r}'(t)$, chứng minh đường cong đó nằm trên một mặt cầu có tâm ở gốc tọa độ.

57. Nếu $\vec{u}(t) = \vec{r}(t) \cdot [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)]$, chứng minh rằng

$$\vec{u}'(t) = \vec{r}(t) \cdot [\vec{r}'(t) \times \vec{r}'''(t)]$$

58-63 Tính độ dài đường cong.

58. $\vec{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle, -10 \leq t \leq 10$

59. $\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle, 0 \leq t \leq 1.$

60. $\vec{r}(t) = t\sqrt{2}\vec{i} + e^t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}, 0 \leq 1$

61. $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \ln \cos t \vec{k}, 0 \leq \pi/4$

62. $\vec{r}(t) = \vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, 0 \leq 1$

63. $\vec{r}(t) = 12t\vec{i} + 8t^{3/2}\vec{j} + 3t^2\vec{k}, 0 \leq 1$

64. Gọi C là đường cong giao tuyến của mặt trụ parabolic $x^2 = 2y$ với mặt cong $3z = xy$. Tính độ dài đường cong từ gốc tọa độ đến điểm $(6, 18, 36)$.

65. Tham số hóa lại đường cong theo độ dài cung tính từ điểm ứng với $t = 0$ theo hướng tăng của t .

a) $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j} + (5 + 4t)\vec{k}$

b) $\vec{r}(t) = e^{2t} \cos 2t \vec{i} + 2\vec{j} + e^{2t} \sin 2t \vec{k}$

66. Giả sử ta bắt đầu từ điểm $(0, 0, 3)$ và di chuyển một quãng đường 5 đơn vị dọc theo đường cong $x = 3 \sin t, y = 4t, z = 3 \cos t$ theo hướng dương. Cuối cùng ta đứng ở đâu?

67. Hãy tham số hóa lại đường cong

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right) \vec{i} + \frac{2t}{t^2 + 1} \vec{j}$$

theo độ dài cung, được đo từ điểm $(1, 0)$ theo hướng tăng của t . Biểu diễn tham số hóa vừa thực hiện theo dạng rút gọn nhất. Ta có thể kết luận gì về đường cong này?

68. Tìm các vectơ tiếp tuyến đơn vị và pháp tuyến đơn vị $\vec{T}(t)$ và $\vec{N}(t)$

a) $\vec{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle$

b) $\vec{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle, t > 0$

c) $\vec{r}(t) = \langle t\sqrt{2}, e^t, e^{-t} \rangle$

d) $\vec{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2 \rangle$

69. Tìm các vectơ $\vec{T}$, $\vec{N}$ và $\vec{B}$ tại điểm cho trước.

a) $\vec{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

b) $\vec{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln \cos t \rangle, \quad (1, 0, 0)$

TaiLieu.vn

Chương 2

ĐẠO HÀM RIÊNG & SỰ KHẢ VI CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

A. Hàm số nhiều biến

1. Cho $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.

a) Tính $f(2, 1)$ và $f(e, 1)$.

định của f .

b) Tìm và phác họa miền xác

c) Tìm miền giá trị của f

2. Cho $f(x, y) = x^2 e^{3xy}$.

a) Tính $f(2, 0)$.

c) Tìm MGT của f .

b) Tìm MXĐ của f .

3. Tìm và phác họa MXĐ của $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. MGT của f là gì?

4. Cho $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

a) Tính $f(2, -1, 6)$.

c) Tìm MGT của f .

b) Tìm MXĐ của f .

5. Cho $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Tính $g(2, -2, 4)$.

c) Tìm MGT của g .

b) Tìm MXĐ của g .

6-15 Tìm và phác họa miền giá trị của hàm số cho bởi

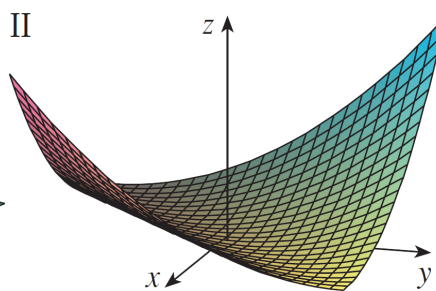
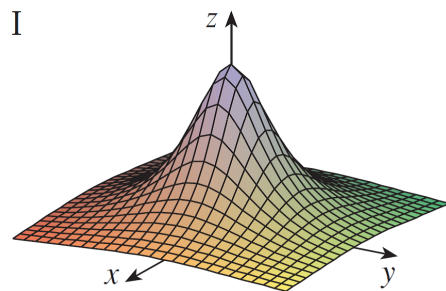
- | | |
|---|--|
| 6. $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ | $\sqrt{25-x^2-y^2}$ |
| 7. $f(x, y) = \sqrt{xy}$ | 12. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$ |
| 8. $f(x, y) = \ln(9-x^2-9y^2)$ | 13. $f(x, y) = \arcsin(x^2+y^2-2)$ |
| 9. $f(x, y) = \sqrt{y-x} \ln(y+x)$ | 14. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ |
| 10. $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$ | 15. $f(x, y) = \ln(16-4x^2-4y^2-z^2)$ |
| 11. $f(x, y) = \quad = \quad \sqrt{y} +$ | |

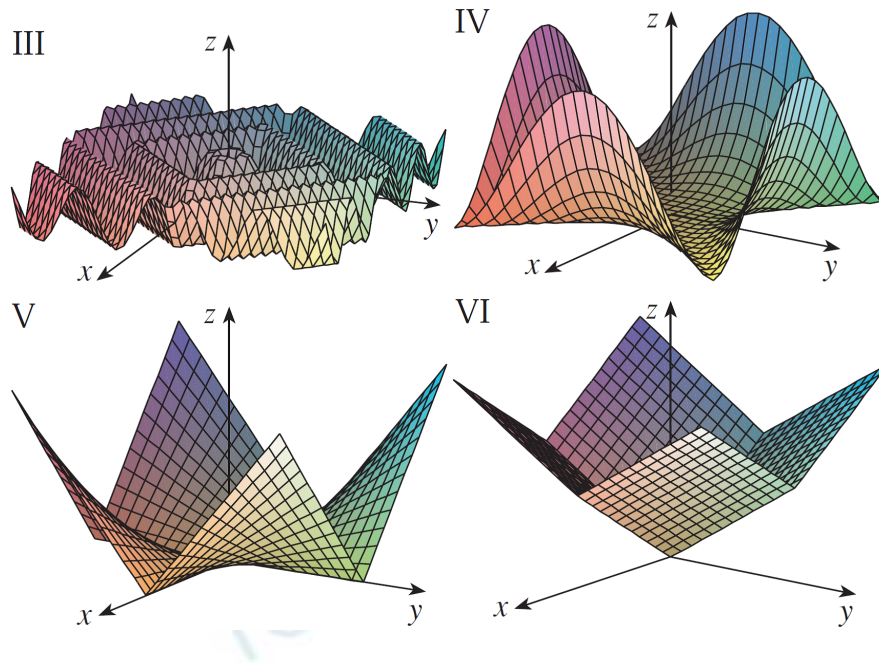
21-29 Phác họa đồ thị của hàm số.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 16. $f(x, y) = 3$ | 21. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ |
| 17. $f(x, y) = y$ | 22. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ |
| 18. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$ | 23. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ |
| 19. $f(x, y) = \cos x$ | 24. $f(x, y) = \sqrt{16-x^2-16y^2}$ |
| 20. $f(x, y) = y^2 + 1$ | 25. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ |

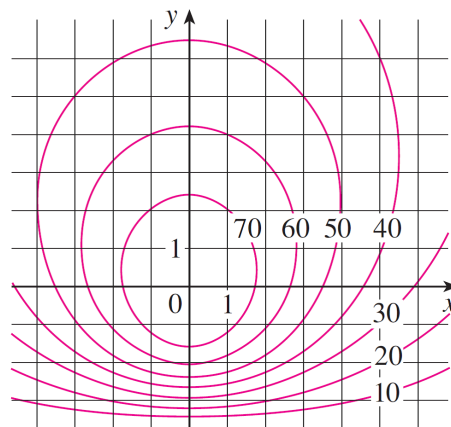
26. Trong mỗi câu, chỉ rõ hàm số nào có đồ thị trong số từ I đến VI. Hãy giải thích lý do.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x, y) = x + y $ | d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ |
| b) $f(x, y) = xy $ | e) $f(x, y) = (x - y)^2$ |
| c) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ | f) $f(x, y) = \sin(x + y)$ |

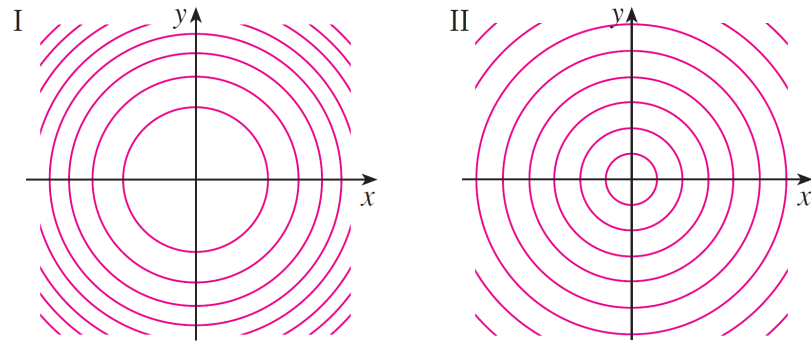




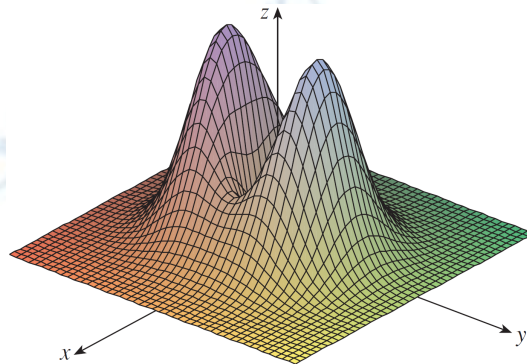
27. Dựa vào contour map của một hàm số dưới đây, hãy ước đoán giá trị của $f(-3, 3)$ và $f(3, -2)$. Ta có thể nói gì về đồ thị của hàm số này?



28. Đồ thị của hàm số f là hình nón, của hàm số g là hình paraboloid. Trong hai contour map dưới đây, cái nào của f và của g , hãy giải thích.



29. Hãy phác họa sơ contour map của một hàm số có đồ thị như dưới đây



30-33 Cho trước contour map, dựa vào đó hãy phác họa sơ đồ thị của f .

