

LÝ THUYẾT TÔPÔ

PGS.TS. Trần Văn Ân

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.
- [2] J. Kelley, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1973.

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.
- [2] J. Kelley, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1973.
- [3] Đỗ văn Lưu, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1998.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.1.1. Định nghĩa. Cho tập hợp X . Họ $\mathcal{T}$ các tập con của X được gọi là một *tôpô* nếu thoả mãn các điều kiện sau

$$(T_1) \quad \emptyset, X \in \mathcal{T};$$

$$(T_2) \quad \text{Nếu } G_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in \Lambda \text{ thì } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \mathcal{T};$$

$$(T_3) \quad \text{Nếu } G_1, G_2 \in \mathcal{T}, \text{ thì } G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}.$$

Khi đó cặp $(X, \mathcal{T})$ được gọi là một *không gian tôpô*. Các phần tử của X được gọi là *điểm* của không gian tôpô, các tập hợp thuộc $\mathcal{T}$ được gọi là các *tập mở*.

Nhận xét rằng từ (T_3) ta suy ra nếu $G_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n$, thì

$$\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Các ví dụ. 1) Giả sử X là một tập hợp tùy ý, $\mathcal{T} = \{\phi, \mathcal{X}\}$. Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô thô* trên X , $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian tôpô thô.

2) Giả sử X là một tập hợp tùy ý, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô rời rạc* trên X , $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian tôpô rời rạc.

3) Giả sử $X = \mathbb{R}$. Ký hiệu

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i \in I, I \text{ là tập chỉ số tùy ý} \right\}.$$

Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô tự nhiên* hay *tôpô thông thường* trên $\mathbb{R}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.2. Định nghĩa. Cho tập hợp X . Giả sử $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ là hai tôpô trên X . Ta nói rằng tôpô $\mathcal{T}$ là *thô hơn* tôpô $\mathcal{U}$ (hay tôpô $\mathcal{U}$ là *mịn hơn* tôpô $\mathcal{T}$) nếu $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Lúc đó ta cũng nói rằng tôpô $\mathcal{T}$ là *yếu hơn* tôpô $\mathcal{U}$ (hay tôpô $\mathcal{U}$ là *mạnh hơn* tôpô $\mathcal{T}$).

1.1.3. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Tập $E \subset X$ được gọi *đóng* nếu tập $X \setminus E$ là mở.

Nhận xét Ký hiệu $\mathcal{F}$ là họ tất cả các tập con đóng của không gian tôpô X . Khi đó họ $\mathcal{F}$ có các tính chất

(F₁) $\phi, X \in \mathcal{F}$.

(F₂) Giao của một họ tùy ý các tập hợp thuộc $\mathcal{F}$ cũng thuộc $\mathcal{F}$;

(F₃) Hợp của hai tập hợp thuộc họ $\mathcal{F}$ cũng thuộc họ $\mathcal{F}$;

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $X, E \subset X$. Giao của họ tất cả các tập con đóng của X mà chứa E cũng là một tập đóng chứa E . Ta gọi giao đó là *bao đóng* của E và ký hiệu là $\overline{E}$, nghĩa là

$$\overline{E} = \bigcap \{F : F \text{ đóng}, E \subset F \subset X\}.$$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $X, E \subset X$. Giao của họ tất cả các tập con đóng của X mà chứa E cũng là một tập đóng chứa E . Ta gọi giao đó là *bao đóng* của E và ký hiệu là $\overline{E}$, nghĩa là

$$\overline{E} = \bigcap \{F : F \text{ đóng}, E \subset F \subset X\}.$$

1.1.5. Các tính chất của bao đóng

- a) $E \subset \overline{E}$ với mọi $E \subset X$;
- b) Nếu $E \subset F \subset X$, thì $\overline{E} \subset \overline{F}$;
- c) Với mọi $E, F \subset X$ ta có $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$;
- d) $\overline{E} = \overline{(\overline{E})} = \overline{\overline{E}}$;
- e) Giả sử $E \subset X$. Khi đó tập E là đóng khi và chỉ khi $E = \overline{E}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.6. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Tập $U \subset X$ được gọi là *lân cận* của A trong X , nếu tồn tại tập mở $V \subset X$ sao cho $A \subset V \subset U$.

Trường hợp $A = \{x\}$, thì ta nói rằng U là *lân cận của điểm* x .

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.6. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Tập $U \subset X$ được gọi là *lân cận* của A trong X , nếu tồn tại tập mở $V \subset X$ sao cho $A \subset V \subset U$.

Trường hợp $A = \{x\}$, thì ta nói rằng U là *lân cận của điểm* x .

1.1.7. Mệnh đề. Giả sử X là không gian tôpô, $x \in X$. Ký hiệu $\mathcal{U}(x)$ là họ tất cả các lân cận của điểm x . Khi đó ta có

- (1) Nếu $V \in \mathcal{U}(x)$, thì $x \in V$;
- (2) Nếu $V \in \mathcal{U}(x)$ và $V \subset W$, thì $W \in \mathcal{U}(x)$;
- (3) Nếu $U, V \in \mathcal{U}(x)$, thì $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;
- (4) Nếu $U \in \mathcal{U}(x)$, thì tồn tại $V \in \mathcal{U}(x)$ sao cho $V \subset U$ và $U \in \mathcal{U}(y)$ với mọi $y \in V$.

Chứng minh dành cho bạn đọc.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.8. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $E \subset X$, $x \in X$.

Điểm x được gọi là *điểm trong* của E nếu E là một lân cận của x ;

Điểm x được gọi là *điểm ngoài* của E nếu $X \setminus E$ là một lân cận của x ;

Điểm x được gọi là *điểm giới hạn* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$;

Điểm x được gọi là *điểm dính* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap E \neq \emptyset$;

Điểm x được gọi là *điểm biên* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap E \neq \emptyset$ và $U \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$;

Tập hợp tất cả các điểm trong của E được gọi là *phần trong* của E và ký hiệu là E° hay $\text{Int}E$;

Tập hợp tất cả các điểm ngoài của E được gọi là *phần ngoài* của E và ký hiệu là $\text{Ext}E$;

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Tập hợp tất cả các điểm giới hạn của E được gọi là *tập dẫn xuất* của E và ký hiệu là E' ;

Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là *biên* của E và ký hiệu là ∂E .

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Tập hợp tất cả các điểm giới hạn của E được gọi là *tập dẫn xuất* của E và ký hiệu là E' ;

Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là *biên* của E và ký hiệu là ∂E .

1.1.9. Mệnh đề. Cho không gian tôpô X . Khi đó

- (1) Tập $E \subset X$ là đóng khi và chỉ khi $E' \subset E$;
- (2) $\bar{E} = E \cup E'$;
- (3) Bao đóng của E là tập đóng bé nhất chứa E .

1.1.10. Mệnh đề. Cho không gian tôpô X . Khi đó

- (1) Phần trong của E là tập mở lớn nhất được chứa trong E ;
- (2) Tập $E \subset X$ là mở khi và chỉ khi E là lân cận của mọi điểm thuộc nó.

Chứng minh xem như bài tập.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.11. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ được gọi là một *cơ sở* của tôpô $\mathcal{T}$, nếu với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của x , tồn tại $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset U$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.11. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ được gọi là một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$, nếu với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của x , tồn tại $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset U$.

1.1.12. Định lý. Điều kiện cần và đủ để họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ là một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ là mọi $U \in \mathcal{T}$ có thể biểu diễn được dưới dạng $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ với $V_i \in \mathcal{B}, i \in I$.

Chứng minh. Đủ. Từ giả thiết điều kiện đủ ta có $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Bây giờ giả sử x là điểm bất kỳ thuộc X và U là lân cận mở bất kỳ của x . Vì $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ với $V_i \in \mathcal{B}, i \in I$, nên tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $x \in V_{i_0} \subset U$.

CẦN Giả sử $\mathcal{B}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$. Khi đó $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Giả sử $U \in \mathcal{T}$, nghĩa là U là tập mở trong X . Theo Định nghĩa 1.1.11 với bất kỳ $x \in U$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

tồn tại $V_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V_x \subset U$. Vì thế ta có $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U$. Do đó ta thu được $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ với $V_x \in \mathcal{B}$ với mọi $x \in U$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

tồn tại $V_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V_x \subset U$. Vì thế ta có $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U$. Do đó ta thu được $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ với $V_x \in \mathcal{B}$ với mọi $x \in U$.

1.1.13. Mệnh đề. Giả sử $\mathcal{B}$ là một họ các tập con nào đó của một tập hợp X cho trước sao cho $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$. Nếu với mọi cặp $U, V \in \mathcal{B}$ và với mọi $x \in U \cap V$, tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W \subset U \cap V$, thì tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ trên X nhận họ $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

Chứng minh. Ký hiệu $\mathcal{T}$ là họ tất cả các hợp tùy ý của các phần tử thuộc $\mathcal{B}$. Khi đó dễ thấy rằng $\mathcal{T}$ thỏa mãn các điều kiện (T_1) và (T_2) .

Bây giờ giả sử $U, V \in \mathcal{T}$. Lấy bất kỳ $x \in U \cap V$, ta có $x \in U, x \in V$. Do đó tồn tại $V_1 \in \mathcal{B}$ và $V_2 \in \mathcal{B}$ để $x \in V_1 \subset U, x \in V_2 \subset V$. Bởi vậy $x \in V_1 \cap V_2$. Từ giả thiết suy ra tồn tại $W_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W_x \subset V_1 \cap V_2 \subset U \cap V$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Từ đó suy ra $U \cap V \subset \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \subset U \cap V$. Vì thế ta có

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}.$$

Do đó $\mathcal{T}$ là một tôpô. Từ Định lý 1.1.12 suy ra rằng $\mathcal{T}$ nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Từ đó suy ra $U \cap V \subset \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \subset U \cap V$. Vì thế ta có

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}.$$

Do đó $\mathcal{T}$ là một tôpô. Từ Định lý 1.1.12 suy ra rằng $\mathcal{T}$ nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

1.1.14. Định nghĩa. Họ σ các tập con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là một *tiền cơ sở* của tôpô $\mathcal{T}$ trên X nếu $X = \bigcup \{S : S \in \sigma\}$ và họ tất cả các giao hữu hạn của các phần tử thuộc họ σ lập thành một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}$ họ $\sigma = \{(-\infty, a), (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ là một tiền cơ sở của tôpô thông thường.