
Mục lục

1	Giới hạn hàm và hàm liên tục	3
1.1	Dãy số và giới hạn dãy số	3
1.2	Giới hạn hàm số	6
1.3	Hàm số liên tục	8
2	Phép tính vi phân hàm một biến	17
2.1	Đạo hàm và vi phân cấp một	17
2.2	Các định lý cơ bản của hàm khả vi	20
2.3	Đạo hàm và vi phân cấp cao	21
2.4	Công thức Taylor	22
2.5	Một số ứng dụng của phép tính vi phân	23

Giới hạn hàm và hàm liên tục

Phép tính vi tích phân (còn gọi là Calculus) nghiên cứu sự thay đổi của vật thể theo thời gian, nó cũng nghiên cứu quá trình một dãy các đại lượng tiệm cận tới một đại lượng khác. Mục đích chính là cố gắng tiếp cận một đại lượng chưa biết bởi một dãy các đại lượng đơn giản hơn mà ta đã biết rất rõ từ trước. Để từ đó rút ra những thông tin quan trọng của đại lượng chưa biết. Để thấy được điều này chúng ta sẽ nói sơ qua một số bài toán đã được giải quyết theo cách ở trên.

1. Tính diện tích hình tròn đơn vị: Giả sử ta phải tính diện tích của hình tròn đơn vị (hình tròn có bán kính bằng 1). Bằng cách nội tiếp trong hình tròn đó một dãy các đa giác đều n cạnh với n càng ngày càng lớn. Bằng một số kỹ thuật tính toán sẽ học về sau thì ta sẽ thấy diện tích của các đa giác đều này sẽ tiệm cận tới π . Một cách tự nhiên ta sẽ thừa nhận π là diện tích của hình tròn.

2. Vẽ tiếp tuyến tại một điểm của đồ thị hàm số: Giả sử trên mặt phẳng Oxy có đồ thị hàm số $y = x^2$. Cho trước một điểm $a = (1, 1)$ nằm trên đồ thị này. Vấn đề đặt ra là hãy vẽ một đường thẳng đi qua điểm a và *tiếp xúc* tại đồ thị trên tại chính điểm a đó. Cách tự nhiên là ta xét một dãy các điểm a_n nằm trên đồ thị và càng ngày càng sát lại điểm a . Qua a và a_n sẽ có 1 đường thẳng chạy qua. Ta sẽ coi tiếp tuyến cần tìm chính là "giới hạn" của các đường thẳng này.

Chúng ta sẽ bắt đầu với những khái niệm rất cơ bản liên quan tới *dãy số* và sau đó tiếp cận những đối tượng trung tâm của môn học là *hàm số* và *giới hạn hàm*.

1.1 Dãy số và giới hạn dãy số

Khái niệm về dãy số không phải là mới nhưng bây giờ chúng ta sẽ làm quen với một khía cạnh mới của dãy số dùng để mô tả dáng điệu của những phần tử của dãy tại "điểm xa vô tận".

1.1.1 Định nghĩa dãy số: Dãy số là một quy tắc ứng một số tự nhiên

với một số thực. Nếu viết chính xác thì một dãy số là một tập hợp có dạng $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, hay còn được viết $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Khái niệm quan trọng nhất gắn liền với một dãy số là *giới hạn của dãy số*.

1.1.2. Định nghĩa giới hạn Dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ được gọi là hội tụ tới giới hạn l nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N sao cho $|a_n - l| < \varepsilon$ với mọi $n > N$.

Điều này có nghĩa là với bất kỳ một đoạn thẳng cho trước chứa a thì đến một lúc nào đó, toàn bộ dãy số trên sẽ rơi vào đoạn thẳng đó.

Trong trường hợp này ta viết $a_n \rightarrow a$ hay đầy đủ hơn là $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Dương nhiên cũng có những dãy số **không hội tụ** chẳng hạn $a_n = 1$ khi n lẻ và $a_n = -1$ khi n chẵn. Hoặc đơn giản hơn ta thấy dãy các số tự nhiên $a_n = n$ cũng không hội tụ.

1.1.3. Hai ví dụ quan trọng về dãy số hội tụ:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$. Khi đó $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ hội tụ về 0 khi $n \rightarrow \infty$.

(b) $a_n = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Khi đó $a_n \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.

Một vấn đề nảy sinh là khi nào một dãy là hội tụ? Nếu dãy hội tụ thì tính giới hạn như thế nào? Ta có câu trả lời cho câu hỏi dễ hơn đó là: Khi nào một dãy số *không* hội tụ.

Mệnh đề về điều kiện cần cho dãy hội tụ. (i) Dãy số $\{a_n\}$ không hội tụ nếu nó không bị chặn, tức là với mọi số tự nhiên N ta luôn tìm được phần tử a_m sao cho $|a_m| > N$.

(ii). Dãy số $\{a_n\}$ không hội tụ nếu dãy này chứa hai dãy con $\{a_{n_k}\}$ và $\{a_{m_k}\}$ hội tụ đến hai giới hạn khác nhau.

Ta thường áp dụng mệnh đề trên để chỉ ra một dãy là không hội tụ.

Ngoài dãy số hội tụ, ta cũng quan tâm tới khái niệm sau:

Giới hạn bằng vô cùng. Ta nói dãy số a_n có giới hạn bằng vô cùng (viết $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$) nếu với mọi số nguyên N có một chỉ số M để $a_n > N$ với mọi $n \geq M$.

Tương tự như thế, ta nói dãy số a_n có giới hạn bằng âm vô cùng (viết $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$) nếu với mọi số tự nhiên N có một chỉ số M để $a_n < -N$ với mọi $n \geq M$.

Để tính giới hạn của dãy số, chúng ta sẽ sử dụng các công thức cơ bản sau đây:

1.1.4. Phép tính trên dãy hội tụ:

Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Khi đó ta có:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$;

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = a/b, \text{ nếu } b \neq 0.$$

Để hiểu hơn khái niệm giới hạn chúng ta có thể chứng minh một trong 4 khẳng định nói trên. Chẳng hạn với (a), hãy lấy $\varepsilon > 0$ là một số tùy ý (luôn hình dung là rất bé). Khi đó bằng cách áp dụng định nghĩa của giới hạn cho $\varepsilon/2$, ta tìm được N và M sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n > N, \quad |b_n - b| < \varepsilon/2 \quad \forall n > M.$$

Vậy nếu $n > \max(N, M)$ thì

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

Bằng cách quan niệm $\max(N, M)$ chính là N trong định nghĩa 1.2 ta có điều phải chứng minh (a).

Một phương pháp khác cũng hay được sử dụng để tính giới hạn dãy số là phương pháp *kẹp giữa*

1.1.5. Phương pháp kẹp giữa. Cho a_n, b_n và c_n là 3 dãy số thỏa mãn $a_n \leq b_n \leq c_n$. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

Chứng minh kết quả trên chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn và bất đẳng thức

$$|b_n - l| \leq |a_n - l| + |c_n - l| \quad \forall n \geq 1.$$

Ví dụ áp dụng: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

1.1.6. Hội tụ của dãy đơn điệu

Một dãy số nói chung rất hiếm khi là đơn điệu *tăng* hay là đơn điệu *giảm*. Tuy nhiên nếu dãy số đó là đơn điệu thì ta có thể nói rằng dãy số đã "hầu như" hội tụ. Điều này được thể hiện qua kết quả sâu sắc sau đây mà chứng minh của nó ta sẽ bỏ qua vì động chạm đến bản chất của số thực.

1.1.7. Định lý hội tụ của dãy đơn điệu.

(i) Cho $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng (tức là $a_1 \leq a_2 \leq \dots$) và bị chặn trên (tức là có một số tự nhiên N thỏa mãn $a_n \leq N$ với mọi n). Khi đó tồn tại giới hạn $l := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Ta viết $a_n \uparrow l$.

(ii) Cho $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm (tức là $a_1 \geq a_2 \geq \dots$) và bị chặn dưới (tức là có một số tự nhiên N thỏa mãn $a_n \geq -N$ với mọi n). Khi đó tồn tại giới hạn $l := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Ta viết $a_n \downarrow l$.

Sử dụng định lý trên ta có thể chứng minh được kết quả kinh điển sau đây mà nhờ nó ta định nghĩa được cơ sở logarit tự nhiên.

Định nghĩa số e . Xét hai dãy số

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Khi đó a_n là dãy đơn điệu tăng và b_n đơn điệu giảm. Hơn nữa a_n và b_n bị chặn trên (tương ứng chặn dưới) bởi 3. Theo định lý trên, các dãy số này sẽ hội tụ về cùng một giới hạn và ta ký hiệu giới hạn này là e .

Người ta đã chứng minh được $e = 2,718281828 \dots$ là một số vô tỷ. Cùng với số π đây là một trong hai con số quan trọng của toán học. Tuy nhiên khác với số π được định nghĩa một cách hình học là nửa chu vi của đường tròn bán kính 1 thì ta chỉ có thể định nghĩa được e nhờ *giới hạn dãy số*. Điều này phần nào nói lên tầm quan trọng của khái niệm giới hạn.

1.2 Giới hạn hàm số

Đối tượng quan trọng của chương này là khái niệm "hàm số". Để hiểu về hàm số thì ta có thể lấy hai ví dụ cơ bản:

1. Diện tích của hình tròn bán kính r là πr^2 . Như thế diện tích là hàm số của *biến số* bán kính theo nghĩa cứ cho trước bán kính ta tính được diện tích.
2. Dân số của một thành phố cũng là một hàm số theo biến số thời gian.

Ta có định nghĩa chính xác sau đây.

1.2.1. Định nghĩa hàm số. Cho A là một tập hợp các số thực (ví dụ cơ bản là những số thực trong một khoảng mở $(0, 1)$ hay một đoạn đóng $[0, 1]$). Một hàm số f xác định trên A là một qui tắc cho ứng $x \in A$ với một số $f(x)$. Ta gọi f là hàm số của biến số x .

Khái niệm quan trọng gắn liền hàm số là *giới hạn* của hàm số.

1.2.2. Định nghĩa giới hạn hàm số Cho f là hàm số xác định trên một tập A .

- (i) Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$|x - a| < \delta, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta sẽ viết $f(x) \rightarrow l$ khi $x \rightarrow a$ hoặc là $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- (ii) Ta nói hàm số f có *giới hạn trái* bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$a - \delta < x < a, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta viết $f(x) \rightarrow l$ khi $x \rightarrow a - 0$ hoặc là $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l$.

(iii) Ta nói hàm số f có *giới hạn phải* bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$a < x < a + \delta, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta viết $f(x) \rightarrow l$ khi $x \rightarrow a + 0$ hoặc là $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l$.

(iv) Ta nói hàm f có giới hạn tại ∞ bằng l khi biến số x tiến tới ∞ nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho

$$x > M, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(v) Ta nói hàm f có giới hạn tại ∞ bằng l khi biến số x tiến tới $-\infty$ nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho

$$x < -M, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ta có chú ý đơn giản nhưng quan trọng sau đây

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l.$$

Để liên hệ với sự hội tụ của dãy số, chúng ta đưa vào định nghĩa tương đương sau đây về giới hạn hàm:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ khi và chỉ khi với mọi dãy số $x_n \rightarrow a, x_n \in A$ chúng ta có $f(x_n) \rightarrow l$.

Ta có ví dụ đơn giản sau về giới hạn hàm.

Ví dụ.

(i) $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$. Điều này có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa giới hạn qua ngôn ngữ của dãy ở trên.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.

Các ví dụ này có thể được kiểm chứng bằng cách sử dụng định nghĩa giới hạn qua ngôn ngữ của dãy ở trên.

1.2.3 Các phép toán về giới hạn hàm Cho các hàm f, g xác định trên tập hợp A (ta luôn nghĩ về A như một khoảng mở hay một đoạn thẳng đóng). Giả sử f, g đều có giới hạn khi $x \rightarrow a \in A$. Khi đó ta có:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, nếu vế phải có nghĩa.

1.3 Hàm số liên tục

Một loại hàm quan trọng mà chúng ta hay gặp trong thực tế chính là các *hàm liên tục*. Ta cần các hàm như vậy để mô tả chuyển động của một vật thể (xe máy, người đi bộ,...) hay một đường cong ta vẽ trên giấy... Định nghĩa chính xác được đưa ra như sau:

Định nghĩa hàm liên tục. Ta nói hàm số f xác định trên tập A là *liên tục* tại $a \in A$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Hay nói cách khác, giới hạn trái và giới hạn phải của f tại $x = a$ đều bằng nhau và bằng $f(a)$.

Khi f liên tục tại mọi điểm của A thì ta nói f liên tục trên A .

Ví dụ $f(x) = 0$ nếu $x < 0$ và $f(x) = x$ nếu $x \geq 0$ là hàm liên tục trên toàn bộ tập xác định là $\mathbb{R}$.

Điều gì khiến hàm liên tục trở nên quan trọng? Thứ nhất là hàm liên tục có tính phổ quát (nó bao hàm tất cả các loại hàm mà ta đã học từ trước đến giờ) ngoài ra còn có những hàm được xác định như trong ví dụ trên. Thứ hai là hàm liên tục có nhiều tính chất quan trọng đã được các nhà toán học khám phá từ thế kỷ 19. Chúng ta sẽ điểm qua ba định lý quan trọng nhất của loại hàm này. Do cách chứng minh phải sử dụng một số kiến thức khá sâu về sự tồn tại của dãy con hội tụ đối với một dãy bị chặn cũng như sử dụng tính đầy đủ của $\mathbb{R}$ nên chúng ta sẽ không đi sâu vào chi tiết.

Định lý Weierstrass về sự tồn tại cực trị của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$.

Định lý Cantor về tính liên tục đều của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f liên tục đều theo nghĩa sau đây:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Định lý Bolzano về giá trị trung gian của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$.

- i) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- ii) Với mọi λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \lambda$.

Ta có một số chú ý liên quan tới 3 định lý kinh điển nói trên:

1. Định lý Weierstrass và Định lý Cantor trên chỉ đúng cho các hàm liên tục trên những đoạn thẳng đóng. Ta có thể lấy ví dụ hàm $f(x) = 1/x$ không đạt cực đại, cực tiểu trên $(0, 1)$ và cũng không liên tục đều trên $(0, 1)$.

2. Sử dụng định lý Bolzano ta có thể chứng minh được mọi đa thức bậc 3 (hay tổng quát hơn là bậc lẻ) đều có ít nhất 1 nghiệm thực.
3. Định lý Cantor sẽ được sử dụng sau này để chứng minh một kết quả về tính *khả tích* của hàm liên tục trên đoạn thẳng đóng.
4. Định lý Weierstrass cho chúng ta cơ sở để giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một đa thức trên một đoạn thẳng đóng.

Tailieu.vn

Bài tập Chương 1

1. Tính giới hạn của các dãy sau

$$a) x_n = \frac{n^2 + n - 3}{2n^2 + 2n + 2}$$

$$b) x_n = \frac{n + \sqrt{n}}{2n + 3\sqrt[3]{n}}$$

$$c) x_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$$

$$d) x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - 3n^2}$$

$$e) x_n = \frac{2 \cdot 3^n - 4^n}{2^{2n+1} - 2^n}$$

$$f) x_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$$

2. Tính các giới hạn sau (bằng cách dùng nguyên lý kẹp)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + 2 \cos n}{n}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n^2}{n + \sin n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

3. a) Dùng đẳng thức $(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n$ để chứng tỏ rằng

$$(x+1)^n > \frac{n(n-1)}{2} x^2, \quad \forall n \geq 2, x > 0.$$

b) Dùng (a) và nguyên lý kẹp để chứng minh rằng, với $a > 1$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$$

4. Chứng minh các dãy sau đơn điệu tăng và bị chặn (từ đó suy ra dãy hội tụ)

$$a) x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$$

$$b) x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

5. Cho dãy $\{x_n\}$ cho bởi công thức quy nạp

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi 2;

b) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng;

c) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

6. Chứng minh các dãy số sau không hội tụ và chỉ ra hai dãy con hội tụ của chúng

$$a) x_n = (-1)^n \left(3 + \frac{3}{n}\right) \quad b) x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

7. a) Chứng minh nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} - x_n) = 0$;
b) Chứng minh dãy $\{\sin n\}$ không hội tụ.

8. Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \quad & b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - x - 6)^2}{x^2 - 2x - 3} \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) \quad & d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - 3x + 2} \end{aligned}$$

9. Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x} \quad & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x} \quad & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{x} \\ d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \quad & e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2 - 9}} \quad & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+2x} - x - 1} \end{aligned}$$

10. Tìm các giới hạn sau

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}}}{\sqrt{4x^2 + 1}} \quad & b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \quad & c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right) \\ d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^8 + 2x^2 + x + 2)} \quad & e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} \end{aligned}$$

11. Tìm các giới hạn sau bằng cách sử dụng nguyên lý kẹp

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \sin 2x}{2x + \cos x + 2}$$

12. Trong Vật lý, dao động tắt dần được mô tả bởi hàm số

$$f(t) = e^{-\alpha t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t),$$

với $\alpha > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

13. Đặt $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ với $x \neq 0$. Chứng minh không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

14. Trong Thuyết tương đối, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ở đó m_0 là khối lượng của vật đó khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi $v \rightarrow c^-$?

15. Trong Thuyết tương đối, độ dài của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

ở đó L_0 là độ dài của vật đó khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Tìm $\lim_{v \rightarrow c^-} L$.

16. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên miền xác định $\mathbb{R}$ của chúng

$$a) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

17. Xét tính liên tục của hàm Heaviside (xác định trên $\mathbb{R}$)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

18. Cho hàm số $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, ở đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (gọi là phần nguyên của x). Ví dụ $[2] = 2$, $[3.6] = 3$, $[-1.1] = -2$.

a) Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ khi $x \in [-3, 3]$;

b) Chứng minh $f(x)$ liên tục tại mọi $x \notin \mathbb{Z}$, nhưng không liên tục tại mọi $x \in \mathbb{Z}$.

19. Tìm số thực a sao cho các hàm sau liên tục trên $\mathbb{R}$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \\ x + a & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + a}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

20. Lực hấp dẫn của trái đất đối với một vật có khối lượng $1kg$ cách tâm trái đất một khoảng bằng r được cho bởi công thức

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

ở đó M là khối lượng của trái đất, R là bán kính của trái đất, G là hằng số hấp dẫn.

a) Hàm $F(r)$ có liên tục theo r trên $[0, +\infty)$ không?

b) Tìm $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r)$.

21. Xét tính liên tục đều của các hàm sau trên tập đã chỉ ra

a) Hàm $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ trên $(0, 1)$;

b) Hàm $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.

22. Chứng minh rằng

a) Phương trình $x^2 + 1 = 2 \cos x$ có nghiệm trên $(0, \frac{\pi}{3})$;

b) Đa thức $p(x) = x^4 - 2x - 2$ có nghiệm trên $(1, 2)$;

c) Mọi đa thức bậc lẻ đều có nghiệm thực.

23. Cho hàm liên tục $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Chứng minh tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho $f(c) = c$.

24. Cho hàm liên tục $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ thỏa mãn $f(c) = 1 - c$.

25. Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

26. Tìm một toàn ánh $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(1) = 2$, $f(2) = -1$, nhưng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(1, 2)$.

27. Cho các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng
- a) Hàm $h(x) := |f(x)|$ cũng liên tục trên $[a, b]$;
 - b) Hai hàm $M(x) := \max \{f(x), g(x)\}$ và $m(x) := \min \{f(x), g(x)\}$ cũng liên tục trên $[a, b]$.

28. Cho hàm $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0.$$

- a) Chứng minh hàm $g(x)$ cho bởi

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq a \text{ và } x \neq b \\ 0 & \text{khi } x = a \text{ hoặc } x = b. \end{cases}$$

liên tục trên $[a, b]$;

- b) Hàm f đạt giá trị lớn nhất trên (a, b) .

29. Cho hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Chứng minh f đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải một số bài toán

7. a) Hiển nhiên;

b) Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x = \ell$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0$.

Kéo theo $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0$. Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n+1) - \cos(n-1)) = 0$. Nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$. Điều này không xảy ra vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

25. Giả sử hàm f tuần hoàn chu kỳ là $T > 0$. Ta thấy f đạt được max và min trên $[0, T]$. Do tính tuần hoàn, đó cũng chính là max và min toàn cục của $f(x)$.

26. Ta có thể chọn hàm $f(x)$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ 5 - 3x & \text{khi } 1 < x < 2, x \neq \frac{3}{2} \\ 10 & \text{khi } x = \frac{3}{2} \\ x - 3 & \text{khi } x \leq 2. \end{cases}$$

27. (b) Dùng (a) và đẳng thức sau

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}, \quad \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

28. a) Để dành chứng minh hàm liên tục tại hai đầu mút nên $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$;

b) Hàm $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại 1 điểm $x_0 \in [a, b]$. Nhưng giả thiết cho ta $x_0 \neq a, b$. Nên $x_0 \in (a, b)$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại x_0 .

29. Ta thấy $f(0) > 0$. Từ giả thiết suy ra tồn tại $R > 0$ sao cho $0 < f(x) < f(0)$ với mọi $|x| > R$. Hàm f đạt giá trị lớn nhất trên $[-R, R]$ tại x_0 . Suy ra

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in [-R, R]$$

và

$$f(x_0) \geq f(0) > f(x), \quad \forall |x| > R.$$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ tại x_0 .

Tailieu.vn

Phép tính vi phân hàm một biến

Trong Chương 1 chúng ta đã nghiên cứu hàm liên tục cùng những tính chất cơ bản của loại hàm này. Một câu hỏi rất quan trọng là làm thế nào đo được độ thay đổi của một hàm số theo tương quan của biến số. Điều này được thể hiện rõ nhất khi ta muốn tính *gia tốc* của một chuyển động. Đó có thể coi là giới hạn của thay đổi vận tốc chia cho thay đổi của thời gian. Hơn nữa nhờ có đạo hàm mà ta có thể giải được bài toán đã đặt ra ở Chương 1 về vẽ tiếp tuyến với đồ thị tại một điểm cho trước.

2.1 Đạo hàm và vi phân cấp một

Ta có định nghĩa quan trọng sau đây:

2.1.1. Định nghĩa về đạo hàm. Cho f là hàm số xác định trên một khoảng mở (a, b) . Hàm f được gọi là có đạo hàm hay là *khả vi* tại x_0 nếu như tồn tại giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Giới hạn này (nếu tồn tại) thì được ký hiệu là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của f tại x_0 .

Nếu điều này xảy ra ta cũng có thể viết

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h).$$

Ví dụ. (i) $f(x) = c$ với c hằng số là hàm khả vi và thỏa mãn $f'(x) = 0$ với mọi x .

(ii) $f(x) = x^2$ là khả vi tại mọi x_0 và $f'(x_0) = 2x_0$.

(iii) $f(x) = |x|$ khả vi tại mọi điểm $x_0 \neq 0$ nhưng *không* khả vi tại $x_0 = 0$. Chú ý rằng hàm f liên tục tại mọi điểm của trục số.

Mối quan hệ giữa tính liên tục và tính khả vi: Nếu một hàm là khả vi tại một điểm thì phải liên tục tại điểm đó. Điều ngược lại nói chung là không đúng (xem ví dụ (iii) ở trên).

2.1.2. Các phép tính về đạo hàm (a) Giả sử f, g là các hàm số khả vi tại điểm x_0 . Khi đó ta có các công thức sau:

$$(i) (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$(ii) (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

$$(iii) (f/g)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(b) Công thức tính đạo hàm của hàm hợp hay còn gọi là *qui tắc dây chuyền*. Nếu f khả vi tại $g(x_0)$ và g khả vi tại x_0 thì

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Công thức tương đối khó chứng minh là (ii) và công thức đạo hàm của hàm hợp. Ta sẽ xử lý (ii), trường hợp còn lại làm tương tự. Cụ thể ta tiến hành như sau. Trước hết biến đổi

$$\begin{aligned} (fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0) &= f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x_0 + h)[g(x_0 + h) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x_0 + h) - f(x_0)] \\ &= f(x_0 + h)[g'(x_0)h + o(h)] + g(x_0)[f'(x_0)h + o(h)] \\ &= [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]h + o(h). \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng các công thức trên ta có thể tính được đạo hàm của một số hàm số đã học ở trước

2.1.3. Đạo hàm của một số hàm sơ cấp

$$(i) (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x;$$

$$(ii) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(iii) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(iv) (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2};$$

$$(v) (e^x)' = e^x.$$

$$(vi) (\ln x)' = 1/x \quad \forall x > 0.$$

Để chứng minh (ii), bằng cách sử dụng qui tắc dây chuyền để chuyển về gốc tọa độ, ta chỉ cần chứng minh

$$(\sin x)'(0) = 1.$$

Muốn vậy, ta sử dụng định nghĩa hình học của hàm sin để chứng minh bất đẳng thức sau (bằng cách so sánh diện tích):

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \forall x > 0.$$

Cho $x \rightarrow 0$ và sử dụng phương pháp kẹp giữa ta có điều phải chứng minh. Đối với (v) thì phép chứng minh còn khó khăn hơn. Cũng như trên, ta chỉ cần chứng minh đạo hàm của e^x tại 0 bằng 1. Theo định nghĩa của đạo hàm thì điều này tương đương với chứng minh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Muốn vậy, lấy một dãy $x_n \rightarrow 0$ tùy ý, ta sẽ chứng minh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Không giảm tổng quát ta có thể coi $x_n > 0$. Thế thì với mỗi n sẽ có N để

$$\frac{1}{N+1} \leq x_n < \frac{1}{N}.$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{e^{\frac{1}{N+1}} - 1}{\frac{1}{N}} \leq \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \leq \frac{e^{\frac{1}{N}} - 1}{\frac{1}{N+1}}.$$

Cho $N \rightarrow \infty$ và sử dụng định nghĩa của e cùng với tiêu chuẩn kẹp giữa chúng ta có điều phải chứng minh.

Sau này ta sẽ thấy rằng hàm số e^x là hàm khả vi *duy nhất* mà đạo hàm lên không làm nó bị thay đổi.

2.1.4. Vi phân hàm một biến. Cho f là một hàm số xác định trên (a, b) . Giả sử f khả vi tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó vi phân của f tại x_0 là biểu thức có dạng

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

trong đó h là một số thực (ta luôn hiểu h rất bé). Tương tự như vậy, nếu f là khả vi trên (a, b) thì vi phân của f trên (a, b) là biểu thức

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Ta hiểu vi phân của f tại x_0 chính là *xấp xỉ tuyến tính tốt nhất* của $f(x_0 + h) - f(x_0)$ khi h đủ bé. Điều này là có cơ sở, bởi vì theo định nghĩa của đạo hàm ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) = df(x_0)(h) + o(h).$$

Tính chất bất biến của vi phân. Giả sử f là hàm khả vi của biến số x và x lại là hàm khả vi của biến số t . Khi đó f đương nhiên cũng có thể coi là hàm khả vi của biến số $t, t \mapsto f \circ x(t)$. Ta có theo định nghĩa của vi phân và theo qui tắc dây chuyền

$$d(f \circ \varphi)(t) = f'(\varphi(t))\Delta'(t)dt = f'(\varphi(t))d\varphi(t) = f'(x)dx = df(x).$$

Điều này có nghĩa là vi phân lấy theo biến t (mới) hay biến x cũ của hàm f là như nhau. Đây là tính chất rất hay của vi phân mà đạo hàm không có.

2.2 Các định lý cơ bản của hàm khả vi

Định lý Fermat về cực trị địa phương. Nếu f là hàm khả vi trên (a, b) và nếu x_0 là một điểm cực trị địa phương của hàm f , tức là có một khoảng mở $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất hay là nhỏ nhất của hàm f trên khoảng mở này. Khi đó ta có $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh. Phép chứng minh khá đơn giản nếu như ta nắm vững khái niệm *giới hạn hàm số* đã học ở phần trước. Ta chỉ cần xét trường hợp $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của f trên một khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nào đó. Khi đó theo định nghĩa của đạo hàm chúng ta có

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Tương tự như vậy

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Kết hợp lại ta có điều phải chứng minh.

Ta xét vấn đề tìm cực trị *toàn cục* của một hàm liên tục f trên $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b) . Phương pháp làm là tìm tất cả các điểm cực trị địa phương của f cùng với hai giá trị $f(a), f(b)$ và sau đó tìm cực trị của *tất cả* các cực trị địa phương này.

Định lý Fermat là điểm xuất phát cho tất cả các định lý quan trọng về hàm khả vi.

Ta bắt đầu bằng định lý thú vị sau đây về sự tồn tại các điểm mà đạo hàm triệt tiêu. Chú ý rằng chứng minh định lý này cần sử dụng hai định lý quan trọng là Định lý Weierstrass về tồn tại cực trị *toàn cục* của hàm liên tục và định lý Fermat về cực trị địa phương đã nói ở trên.