

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
KHOA TOÁN-TIN

Giáo trình
GIẢI TÍCH THỰC NHIỀU BIẾN I

Hà Nội, 2021

Trang viết bản quyền

TaiLieu.vn

MỤC LỤC

Chương I. GIỚI HẠN VÀ HÀM LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{R}^n$	5
§1. Không gian $\mathbb{R}^n$	5
1.1. Chuẩn trên $\mathbb{R}^n$	5
1.2. Tôpô trên $\mathbb{R}^n$	9
1.3. Các nguyên lí về tính đầy đủ của $\mathbb{R}^n$	13
1.4. Tập compact và tập liên thông trong $\mathbb{R}^n$	14
§2. Giới hạn của hàm trên $\mathbb{R}^n$	18
2.1. Hàm vectơ n -biến	18
2.2. Giới hạn của hàm vectơ tại một điểm	19
2.3. Giới hạn lặp và giới hạn theo hướng	20
§3. Hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$	25
3.1. Định nghĩa và tính chất	25
3.2. Hàm liên tục theo từng biến	26
3.3. Tính chất của hàm liên tục trên tập compact và tập liên thông ...	27
Bài tập chương I	28
Chương II. PHÉP TÍNH VI PHÂN TRÊN $\mathbb{R}^n$ VÀ ỨNG DỤNG	39
§1. Định nghĩa đạo hàm	39
1.1. Khái niệm hàm khả vi	39
1.2. Đạo hàm theo hướng	41
§2. Các quy tắc về đạo hàm	43
§3. Biểu diễn của đạo hàm	45
3.1. Đạo hàm của hàm thành phần và mối quan hệ với đạo hàm	45
3.2. Đạo hàm riêng và biểu diễn ma trận của đạo hàm	46

§4. Công thức số gia giới nội và áp dụng	48
4.1. Công thức số gia giới nội.....	49
4.2. Áp dụng của công thức số gia giới nội.....	51
§5. Định lí hàm ngược và định lí hàm ẩn.....	53
5.1. Định lí hàm ngược.....	53
5.2. Định lí hàm ẩn	56
§6. Một số ứng dụng hình học của phép tính vi phân	57
6.1. Biểu diễn giải tích của các đường cong và các mặt.....	57
6.2. Tiếp tuyến và mặt phẳng tiếp xúc.....	61
6.3. Hình bao của họ đường cong phẳng.....	65
§7. Đạo hàm riêng cấp cao.....	67
7.1. Đạo hàm riêng cấp cao	67
7.2. Định nghĩa đạo hàm cấp hai	68
7.3. Đạo hàm cấp hai và biểu diễn ma trận của đạo hàm cấp hai qua các đạo hàm riêng cấp hai.....	70
7.4. Tính đối xứng của đạo hàm cấp hai	71
§8. Công thức Taylor	74
§9. Cực trị địa phương	77
9.1. Định nghĩa cực trị địa phương	77
9.2. Điều kiện cần để có cực trị địa phương.....	77
9.3. Điều kiện đủ để có cực trị địa phương.....	78
§10. Cực trị có điều kiện	82
10.1. Định nghĩa cực trị có điều kiện	82
10.2. Điều kiện cần của cực trị có điều kiện. Phương pháp nhân tử Lagrange.....	84
Bài tập chương III	86

GIỚI HẠN VÀ HÀM LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{R}^n$

§1. Không gian $\mathbb{R}^n$

1.1. Chuẩn trên $\mathbb{R}^n$

1. Cấu trúc tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$

Kí hiệu

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Đưa vào trong $\mathbb{R}^n$ phép cộng hai phần tử và phép nhân một phần tử với một vô hướng được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

trong đó $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dễ thấy $\mathbb{R}^n$ với hai phép toán trên trở thành một không gian vectơ thực n chiều với cơ sở chính tắc là

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

2. Chuẩn trên $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa. Chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ là một hàm $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- $N_1) \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $N_2) \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R};$
- $N_3) \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

Chú ý. Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

i) $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Thật vậy, ta có: $0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) \leq \varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(x)$.

ii) $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.1. Hàm trị tuyệt đối $|\cdot|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra nếu $\varphi(\cdot)$ cũng là một chuẩn trên $\mathbb{R}$ thì ta có

$$\varphi(x) = \varphi(x.1) = |x|\varphi(1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy mọi chuẩn trên $\mathbb{R}$ là một bội dương của trị số tuyệt đối.

Ví dụ 1.2. Hàm $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$.

Thật vậy, hiển nhiên N_1, N_2 được thoả mãn. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n y_i^2 = \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Chuẩn $\|\cdot\|_2$ được gọi là chuẩn Euclid của $\mathbb{R}^n$.

Tổng quát, có thể chứng minh được hàm $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (p \geq 1)$$

cũng là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.3. Dễ dàng kiểm tra hàm $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

cũng là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ và nó được gọi là chuẩn max của $\mathbb{R}^n$.

Có thể chứng minh được rằng $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

3. Khoảng cách trên $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa. Hàm $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một khoảng cách (hay metric) trên $\mathbb{R}^n$ nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

$$D_1) \rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ và } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$D_2) \rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (tính đối xứng);}$$

$$D_3) \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \text{ (bất đẳng thức tam giác).}$$

Cũng như chuẩn trên $\mathbb{R}^n$, ta có

$$|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Khoảng cách sinh bởi chuẩn. Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Để kiểm tra rằng hàm

$$\rho(x, y) = \varphi(x - y), x, y \in \mathbb{R}^n,$$

xác định một khoảng cách trên $\mathbb{R}^n$. Khoảng cách này được gọi là khoảng cách sinh bởi chuẩn φ .

Chú ý. Ngoài ba tính chất $D_1), D_2), D_3)$, khoảng cách sinh bởi chuẩn còn có thêm hai tính chất sau:

$D_4) \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (tính thuần nhất đối với phép vị tự);

$D_5) \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (tính bất biến đối với phép tịnh tiến).

Ngược lại, nếu $\rho(., .)$ là một khoảng cách trên $\mathbb{R}^n$ thoả mãn các tính chất $D_1) - D_5)$ thì hàm $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \rho(x, 0)$$

là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$.

Từ đây về sau trên $\mathbb{R}^n$ ta chỉ xét khoảng cách sinh bởi một chuẩn nào đó.

4. Sự tương đương của các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa. Hai chuẩn φ và ψ trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là tương đương (đều) và viết $\varphi \sim \psi$ nếu tồn tại các số dương C_1, C_2 sao cho

$$C_1 \psi(x) \leq \varphi(x) \leq C_2 \psi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dễ thấy quan hệ $\sim$ giữa các chuẩn là một quan hệ tương đương.

Định lí sau đây cho phép sau này ta chỉ cần xét một chuẩn nào đó trên $\mathbb{R}^n$, đặc biệt chuẩn Euclid hoặc chuẩn max.

Định lí 1.1. Hai chuẩn bất kì trên $\mathbb{R}^n$ là tương đương.

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh mọi chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ đều tương đương với chuẩn max. Giả sử $e_1, \dots, e_n$ là cơ sở chính tắc trên $\mathbb{R}^n$. Viết

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ta có

$$\varphi(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \varphi(e_i) \leq C_2 \|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

với $C_2 = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) > 0$.

Để tìm C_1 sao cho

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ta xét

$$\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}.$$

Chỉ cần chứng tỏ $\alpha = \inf\{\varphi(x) : x \in \mathbf{S}\} > 0$. Vì khi đó

$$\varphi(x) = \|x\|_\infty \varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \alpha \|x\|_\infty$$

và C_1 có thể chọn bằng α .

Nếu $\alpha = 0$, tồn tại một dãy $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbf{S}$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x^k) = 0$.

Vì $x_1^k \leq 1, \forall k \geq 1$, tồn tại dãy con

$$\{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}_1} \subset \{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

hội tụ đến $x_1 \in \mathbb{R}$. Cũng như vậy vì $x_2^k \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}_1$, tồn tại dãy con

$$\{x_2^k\}_{k \in \mathbb{N}_2} \subset \{x_2^k\}_{k \in \mathbb{N}_1}$$

hội tụ đến $x_2 \in \mathbb{R}$.

Cứ tiếp tục quá trình đó ta sẽ tìm được các dãy con

$$\{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}_n} \subset \{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

...

$$\{x_n^k\}_{k \in \mathbb{N}_n} \subset \{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

lần lượt hội tụ đến $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

Hiển nhiên với $x = (x_1, \dots, x_n)$ ta có

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k| = 1$$

và

$$|\varphi(x^k) - \varphi(x)| \leq \varphi(x^k - x) \leq C_2 |x_k - x|.$$

Suy ra $\varphi(x) = \lim_{k \in \mathbb{N}_n} \varphi(x^k) = 0$, nghĩa là $x = 0$, trái với đẳng thức $\|x\|_\infty = 1 \neq 0$. □

Chú ý. Vì mọi chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ là tương đương nên từ đây về sau ta sẽ sử dụng kí hiệu $\|\cdot\|$ để chỉ một chuẩn tùy ý trên $\mathbb{R}^n$.

5. Sự hội tụ của dãy trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa. Điểm $a \in \mathbb{R}^n$ được gọi là giới hạn của dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $k(\varepsilon)$ sao cho $\forall k > k(\varepsilon)$ ta có

$$\|x^k - a\| < \varepsilon.$$

Khi đó ta cũng nói dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến a và viết $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$ hay $x^k \rightarrow a$ khi $k \rightarrow \infty$.

Chú ý. i) Do các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ tương đương nên khái niệm hội tụ của dãy không phụ thuộc việc chọn từng chuẩn cụ thể.

ii) Dãy $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ hội tụ đến $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi dãy $\{x_i^k\}$ hội tụ về x_i với mọi $i = 1, \dots, n$.

Như vậy sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ chính là sự hội tụ theo toạ độ.

1.2. Tôpô trên $\mathbb{R}^n$

Trong mục này không gian $\mathbb{R}^n$ được xét với một chuẩn $\|\cdot\|$ tùy ý.

1. Hình cầu mở, hình cầu đóng, lân cận

Định nghĩa. Giả sử $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Tập

$$B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < r\}$$

được gọi là hình cầu mở tâm x^0 , bán kính r trong $\mathbb{R}^n$.

Đặc biệt nếu chuẩn được xét trên $\mathbb{R}^n$ là chuẩn Euclide thì với $n = 1$, $B(x^0, r)$ là khoảng $(x^0 - r, x^0 + r)$, còn với $n = 2$ (tương ứng $n = 3$) thì $B(x^0, r)$ là hình tròn (tương ứng hình cầu) tâm x^0 bán kính r , không kể biên.

Định nghĩa. Giả sử $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Tập

$$B[x^0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}$$

được gọi là hình cầu đóng tâm x^0 bán kính r trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa. Cho $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Tập con $U \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một lân cận của x^0 nếu $\exists r > 0$ sao cho $B(x^0, r) \subset U$.

Lân cận của x^0 thường được kí hiệu là $U(x^0)$. Rõ ràng rằng:

- i) Nếu U là một lân cận của x^0 thì mọi tập con của $\mathbb{R}^n$ chứa U đều là lân cận của x^0 .
- ii) Giao hữu hạn và hợp của một họ tùy ý các lân cận của x^0 cũng là một lân cận của x^0 .
- iii) Với mọi lân cận U đều tồn tại lân cận $V \subset U$ của x^0 sao cho V là lân cận của mọi $y \in V$.

Thật vậy, chọn $r > 0$ để $B(x^0, r) \subset U$. Cho $x \in B(x^0, r)$. Khi đó với $\rho = r - \|x - x^0\| > 0$, ta luôn có

$$B(x^0, \rho) \subset B(x^0, r) \subset U.$$

Vậy $B(x^0, r)$ là một lân cận của x .

Chú ý. Do các chuẩn trên $\mathbb{R}^n$ là tương đương, khái niệm lân cận không phụ thuộc vào chuẩn đã chọn. Vì vậy các khái niệm tiếp theo xuất phát từ khái niệm lân cận cũng thế.

2. Các điểm tôpô quan trọng

Định nghĩa. Cho $A \subset \mathbb{R}^n$.

a) x^0 gọi là điểm trong của A nếu A là lân cận của x^0 . Nói cách khác $\exists r > 0 : B(x^0, r) \subset A$.

Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là phần trong của A và viết là $\text{Int}A$ hay $\overset{\circ}{A}$.

b) x^0 gọi là điểm tụ của A nếu mọi lân cận U chứa ít nhất một điểm (vậy thì vô số điểm) của A khác x^0 .

Tập tất cả các điểm tụ của A được gọi là tập dẫn xuất của A và viết là A' .

c) x^0 gọi là điểm cô lập của A nếu tồn tại lân cận U của x^0 sao cho $U \cap A = \{x^0\}$.

d) x^0 hoặc là điểm tụ hoặc là điểm cô lập của A sẽ được gọi chung là điểm dính của A . Như vậy x^0 là điểm dính của A khi và chỉ khi với mọi lân cận U của x^0 thì $U \cap A \neq \emptyset$.

Tập tất cả các điểm dính của A được kí hiệu là $\bar{A}$ và gọi là bao đóng của A . Vậy thì

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \cap A \neq \emptyset, \forall U(x)\}.$$

e) x^0 gọi là điểm biên của A nếu $U \cap A \neq \emptyset$ và $U \cap CA \neq \emptyset$ với mọi lân cận U của x^0 .

Tập tất cả các điểm biên của A được gọi là biên của A và được kí hiệu là ∂A .

Ví dụ 1.4. Cho tập

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(2, 3)\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ A' &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \partial A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{y = 1, 0 \leq x \leq 1\}, \\ \bar{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 3)\}.\end{aligned}$$

Điểm $(2, 3)$ là điểm cô lập của A .

3. Tập đóng, tập mở

Tập mở

Định nghĩa. Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là mở nếu D là lân cận của mọi điểm của nó. Điều này có nghĩa là

$$\forall x \in D, \exists r > 0 \text{ sao cho } B(x, r) \subset D.$$

Họ tất cả các tập mở trong $\mathbb{R}^n$ được kí hiệu là $\mathcal{G}$.

Rõ ràng rằng:

$$o_1) \emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{G};$$

$$o_2) D_i \in \mathcal{G}, i = \overline{1, m} \Rightarrow D = \bigcap_{i=1}^m D_i \in \mathcal{G};$$

$$o_3) D_i \in \mathcal{G}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{G}.$$

Ví dụ 1.5. a) Hình cầu mở $B(x^0, r)$ là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$.

b) Hình hộp $\square^n(a, b) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ là mở trong $\mathbb{R}^n$ ($a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$).

Tập đóng

Định nghĩa. Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là đóng (trong $\mathbb{R}^n$) nếu phần bù $CM := \mathbb{R}^n \setminus M$ là mở (trong $\mathbb{R}^n$).

Họ tất cả các tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ sẽ được kí hiệu là $\mathcal{F}$. Từ $o_1), o_2), o_3)$ sau định nghĩa tập mở ta có

$$F_1) \emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F};$$

$$F_2) M_i \in \mathcal{F}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} M_i \in \mathcal{F};$$

$$F_3) M_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1, m} \Rightarrow M = \bigcap_{i=1}^m M_i \in \mathcal{F}.$$

Rõ ràng rằng:

i) $\bar{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A . Điều này có nghĩa là $\bar{A}$ là tập đóng và nếu B là tập đóng và $A \subset B$ thì $\bar{A} \subset B$. Thật vậy nếu $\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ không mở thì tồn tại $x^0 \notin \bar{A}$ sao cho $B(x^0, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$. Suy ra $B(x^0, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$, nghĩa là $x^0 \in \bar{A}$. Vô lí! Hơn nữa có thể chỉ ra rằng $\bar{A}$ là tập đóng bé nhất chứa A .

ii) Hình cầu đóng là một tập hợp đóng và bao đóng của hình cầu "mở" là hình cầu "đóng" cùng tâm và bán kính, nghĩa là

$$\overline{B(x^0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| \leq r\}.$$

Rõ ràng nếu A là mở thì $\partial A = \bar{A} \setminus A$.

Mệnh đề 1.2. Cho $A \subset \mathbb{R}^n$. Hai khẳng định sau là tương đương:

(i) A là đóng;

(ii) Nếu $\{x^k\} \subset A$ hội tụ đến x thì $x \in A$.

Chứng minh. (i) $\rightarrow$ (ii). Cho dãy $\{x^k\} \subset A$ hội tụ đến x . Khi đó $B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$. Vậy $x \in \bar{A} = A$.

(ii) $\rightarrow$ (i). Giả sử $x \in \bar{A}$. Khi đó với mọi $k \in \mathbb{N}, \exists x^k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$. Điều này suy ra dãy $\{x^k\} \subset A$ hội tụ đến x . Vậy $x \in A$. Do đó A là đóng. $\square$

1.3. Các nguyên lí về tính đầy đủ của $\mathbb{R}^n$

1. Nguyên lí Cauchy

Định nghĩa. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là dãy cơ bản (hay dãy Cauchy) nếu

$$\lim_{k,p \rightarrow \infty} \|x^k - x^p\| = 0,$$

tức là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $k(\varepsilon)$ sao cho

$$\|x^k - x^p\| < \varepsilon, \forall k, p \geq k(\varepsilon).$$

Định lí 1.3. (Nguyên lí Cauchy). Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên. Để chứng minh điều kiện đủ, ta dùng chuẩn max. Từ bất đẳng thức

$$|x_i^k - x_i^p| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^p|, i = \overline{1, n}, k, p \geq 1.$$

Suy ra mỗi $i = \overline{1, n}$, dãy số $\{x_i^k\}_k$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ là đầy nên tồn tại

$$x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k, \forall i = \overline{1, n}.$$

Do đó $x^k \rightarrow x$ với $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

2. Nguyên lí Cantor

Định nghĩa. Dãy hình cầu đóng $\{\overline{B}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là thắt dần nếu dãy các bán kính r_k của nó dần đến 0 khi $k \rightarrow \infty$ và

$$\overline{B}_{k+1} \subset \overline{B}_k, \forall k \geq 1.$$

Định lí 1.4. (Nguyên lí Cantor). Mỗi dãy hình cầu đóng thắt dần đều có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh. Cho $\{\overline{B}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ là dãy hình cầu đóng thắt dần. Với mỗi $k \geq 1$, chọn $x^k \in \overline{B}_k$. Bởi vì

$$\|x^k - x^p\| \leq r_k + r_p \rightarrow 0 \text{ (khi } k, p \rightarrow \infty),$$

dãy $\{x^k\}$ là dãy cơ bản. Từ nguyên lí Cauchy suy ra $x^k \rightarrow x$.

Từ hệ thức $x^p \in \overline{B}_p, \forall p \geq k \geq 1$ suy ra

$$x \in \overline{B}_k, \forall k \geq 1.$$

Vậy $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$. Do $r_k \rightarrow 0$ nên $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k = \{x\}$.

□

3. Nguyên lí Bolzano-Weierstrass

Định lí 1.5. Mọi dãy bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ đều chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh. Bởi vì đối với chuẩn max ta có

$$\sup_{k \geq 1} |x_i^k| \leq \sup_{k \geq 1} \|x^k\| < +\infty, \forall i = \overline{1, n},$$

như trong Định lí 1.1, tồn tại dãy con $\{x^{k_s}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ đến $x \in \mathbb{R}^n$.

□

1.4. Tập compact và tập liên thông trong $\mathbb{R}^n$

1. Tập compact

Định nghĩa. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập compact nếu mọi dãy trong A chứa một dãy con hội tụ đến một phần tử thuộc A .

Rõ ràng giao của một họ bất kì và hợp của một họ hữu hạn các tập compact trong $\mathbb{R}^n$ là compact.

Đặc trưng Hausdorff của tập compact.

Định nghĩa. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là bị chặn nếu

$$\sup\{\|x\| : x \in A\} < +\infty.$$

Như vậy dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ là bị chặn khi và chỉ khi nó là bị chặn như một tập con của $\mathbb{R}^n$.

Rõ ràng giao của một họ bất kì và hợp của một họ hữu hạn các tập bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ là bị chặn.

Định lí 1.6. (Hausdorff). Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

Chứng minh. Giả sử A là compact. Đầu tiên ta kiểm tra tính bị chặn của A . Nếu A không bị chặn nó sẽ chứa một dãy $\{x^k\}$ sao cho $\|x^k\| \geq k, \forall k \geq 1$. Vì A là compact, nó có một dãy con hội tụ. Ta có thể coi $x^k \rightarrow x$. Khi đó

$$+\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \|x\| < +\infty.$$

Điều này vô lí. Còn lại tính đóng của A là hiển nhiên.

Ngược lại, nếu A đóng và bị chặn thì từ nguyên lí Bolzano-Weierstrass suy ra A là compact. $\square$

Đặc trưng Heine-Borel của tập compact

Định nghĩa. Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$. Họ các tập $\{U_i\}_{i \in I}$ được gọi là một phủ mở của A nếu

(i) U_i là mở trong $\mathbb{R}^n, \forall i \in I$;

(ii) $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Nếu $I_0 \subset I$ và $A \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$, ta nói họ $\bigcup_{i \in I_0} U_i$ là một phủ con của $\bigcup_{i \in I} U_i$

Bổ đề 1.7. Trong $\mathbb{R}^n$ mọi tập bị chặn đều có thể phủ bởi một hữu hạn hình cầu bán kính nhỏ tùy ý.

Chứng minh. Để đơn giản kí hiệu ta xét trường hợp $n = 2$ (trường hợp $n > 2$ được chứng minh tương tự).

Cho A là tập bị chặn trong $\mathbb{R}^2$. Bởi vì mọi chuẩn trong $\mathbb{R}^2$ đều tương đương với chuẩn max, ta chỉ cần chỉ ra rằng A có thể phủ bởi một số hữu hạn các hình vuông cạnh nhỏ tùy ý.

Cho $\varepsilon > 0$. Do A bị chặn nó sẽ bị chứa trong hình vuông đủ lớn:

$$H = [a, b] \times [c, d], (a < b, c < d, b - a = d - c).$$

Chia $[a, b]$ và $[c, d]$ thành m đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m$ và $y_j = c + j \frac{d-c}{m}, j = 0, \dots, m$. Qua mỗi điểm chia dựng các đường vuông góc với các trục tọa độ. Khi đó H được chia thành m^2 hình vuông con. Rõ ràng ta có thể tăng số điểm chia m sao cho mỗi cạnh của mỗi hình vuông có độ dài bé hơn ε . Như vậy H và do đó A được phủ bởi m^2 hình vuông con. $\square$

Bây giờ ta đi tới định lý quan trọng sau.

Định lý 1.8. (Heine- Borel). Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ compact khi và chỉ khi mọi phủ mở của A đều chứa một phủ con hữu hạn.

Chứng minh. Giả sử A compact và giả sử tồn tại một phủ mở $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ của A sao cho mọi phủ con hữu hạn của nó không phủ được A . Do A bị chặn nó sẽ được phủ bởi một số hữu hạn các hình cầu bán kính 1. Trong số các hình cầu này phải tồn tại một hình cầu B_1 sao cho $B_1 \cap A$ không thể phủ bởi một số hữu hạn các G_α . Áp dụng lý luận trên vào tập bị chặn $B_1 \cap A$, ta tìm được hình cầu B_2 bán kính $\frac{1}{2}$ sao cho $B_2 \cap B_1 \cap A$ không thể phủ được một số hữu hạn các G_α . Đặc biệt $B_2 \cap A$ cũng như vậy. Cứ tiếp tục quá trình trên ta tìm được các hình cầu B_k bán kính $\frac{1}{k}$ sao cho $B_k \cap A$ không thể phủ được một số hữu hạn các G_α . Với mỗi k chọn $x^k \in B_k \cap A$. Do A compact, bằng cách chuyển qua dãy con, ta có thể coi $x^k \rightarrow x^0 \in A$.

Chọn α_0 để $x^0 \in G_{\alpha_0}$. Do G_{α_0} mở, tồn tại $\varepsilon > 0$ để $B_\varepsilon(x^0) \subset G_{\alpha_0}$. Lấy k_0 đủ lớn sao cho

$$\|x^0 - x^{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Khi đó với mọi $x \in B_{k_0}$ ta có

$$\|x - x^0\| \leq \|x - x^{k_0}\| + \|x^{k_0} - x^0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

tức là $B_{k_0} \subset B_\varepsilon(x^0) \subset G_{\alpha_0}$. Vậy B_{k_0} , đặc biệt $B_{k_0} \cap A$ được phủ bởi một G_{α_0} , trái với tính chất của $B_{k_0} \cap A$.

Ngược lại chỉ cần chứng minh A bị chặn và đóng. Xét phủ mở $\{B_1(x) : x \in A\}$. Theo giả thiết tồn tại $x^1, \dots, x^m$ để

$$A \subset \bigcup_{i=1}^m B_1(x^i).$$

Từ bao hàm thức này suy ra

$$\sup\{\|x\| : x \in A\} \leq 1 + \sup_{1 \leq i \leq m} \|x^i\| < +\infty.$$

Cuối cùng để chứng minh A đóng ta hãy giả sử rằng có một dãy $\{x^k\} \subset A$ hội tụ tới $x^0 \notin A$. Áp dụng giả thiết tới phủ mở $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in A, \varepsilon_x = \frac{\|x - x^0\|}{2}\}$ ta tìm được $x^1, \dots, x^m \in A$ để

$$A \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_{x^i}}(x^i).$$

Chuyển qua dãy con có thể coi tồn tại $0 \leq i_0 \leq m$ sao cho

$$x^k \in B_{\varepsilon_{x^{i_0}}}(x^{i_0}), \forall k \geq 1.$$

Hệ thức này suy ra $x^0 \in \overline{B_{\varepsilon_{x^{i_0}}}(x^{i_0})}$ mà nó không thể xảy ra vì

$$\|x^0 - x^{i_0}\| \geq 2\varepsilon_{x^{i_0}}.$$

Định lí được chứng minh. □

2. Tập liên thông trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa. Tập $E \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là liên thông nếu không tồn tại hai tập mở A và B của $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$A \cap B = \emptyset, A \cap E \neq \emptyset, B \cap E \neq \emptyset, E \subset A \cup B.$$

Mệnh đề sau đây cho ta biết cấu trúc của tập liên thông trong $\mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.9. Tập $E \subset \mathbb{R}$ là liên thông nếu và chỉ nếu nó có tính chất

$$x \in E, y \in E, x < z < y \text{ kéo theo } z \in E.$$

Chứng minh. Giả sử E liên thông và E không có tính chất trên. Do đó tồn tại $x, y \in E$ và tồn tại $z \in (a, b)$ nhưng $z \notin E$. Đặt $A = (-\infty, z), B = (z, \infty)$. Ta có $A \cap B = \emptyset, x \in A \cap E, y \in B \cap E$ và $E \subset A \cup B$; tức là E không liên thông: Vô lí.

Ngược lại, giả sử E có tính chất trên và E không liên thông. Do đó tồn tại hai tập mở A và B như trong định nghĩa tính liên thông. Suy ra, tồn tại $x \in A \cap E, y \in B \cap E$ và $y \neq x$. Giả sử $x < y$, đặt $S = A \cap [x, y]$ và kí hiệu $z = \sup S$. Ta thấy:

- z thuộc vào bao đóng của S , nên z thuộc vào bao đóng $\bar{A}$ của A . Vì B mở và không có điểm chung với A , nên $z \notin B$. Suy ra $x \leq z < y$ (vì $y \in B$).

- Nếu $z \notin A$ thì $x < z < y$ (vì $x \in A$). Suy ra $z \in E$ (theo tính chất của tập E). Điều này vô lí vì $E \subset A \cup B$ và $z \notin B, z \notin A$.

- Nếu $z \in A$ thì z không thuộc vào bao đóng $\bar{B}$ của B (vì A mở). Do đó, tồn tại lân cận $(z - r, z + r)$ nằm trong phần bù của $\bar{B}$. Chọn r sao cho $z + r < y$. Khi đó, tồn tại $z_1 \notin B$ sao cho $x \leq z < z_1 < y$. Suy ra $z_1 \in E$ và $z_1 \notin A$ (vì z_1 là cận trên đúng của S). Điều này vô lí. $\square$

Hệ quả 1.10. $E \subset \mathbb{R}$ là liên thông nếu và chỉ nếu E có một trong các dạng sau:

$$(-\infty, b], (-\infty, b), (a, \infty), (-\infty, +\infty), [a, \infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b].$$

§2. Giới hạn của hàm trên $\mathbb{R}^n$

2.1. Hàm vectơ n -biến

Định nghĩa. Hàm $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n$, được gọi là hàm vectơ n -biến trên A với giá trị trong $\mathbb{R}^m$; trong trường hợp $m = 1$ thì f được gọi là hàm số n -biến.

Khi cần chỉ rõ biến số ta còn kí hiệu $f(x_1, \dots, x_n)$ để chỉ $f(x)$ với $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$.

Ví dụ 2.1. a) Các hàm $f(x) = (\sin x, \cos x), x \in \mathbb{R}$, và $g(x) = (x, x^2), x \in \mathbb{R}$, là những hàm vectơ 1-biến.

b) Với mỗi $k = \overline{1, n}$ xét hàm $\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\pi_k(x) = x_k, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Đó là những hàm số n -biến. Các hàm này được gọi là các phép chiếu chính tắc lên các trục toạ độ. Vậy π_k là phép chiếu chính tắc từ $\mathbb{R}^n$ lên trục toạ độ thứ k .

c) Nhờ phép chiếu π_k ta có thể viết

$$x = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cho hàm vectơ $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Hàm số

$$f_k = \pi_k \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq k \leq m,$$

được gọi là hàm thành phần thứ k của f . Rõ ràng $f = (f_1, \dots, f_m)$.

2.2. Giới hạn của hàm vectơ tại một điểm

Định nghĩa. Cho hàm $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n$. Ta nói f có giới hạn $l \in \mathbb{R}^m$ tại $x^0 \in A'$ và viết

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l \text{ hay } f(x) \rightarrow l \text{ khi } x \rightarrow x^0$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|f(x) - f(x^0)\| < \varepsilon, \forall x \in A, 0 < \|x - x^0\| < \delta.$$

Đôi khi ta viết $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, \dots, x_n) = l$ thay cho $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l$.

Chú ý. a) $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l \Leftrightarrow$ với mọi lân cận V của l trong $\mathbb{R}^m$ tồn tại lân cận U của x^0 trong $\mathbb{R}^n$ sao cho

$$f(x) \in V, \forall x \in U \cap A, x \neq x^0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x^0} f_k(x) = l_k, \forall k = \overline{1, m},$
ở đây $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$.

Các định lí dưới đây được chứng minh tương tự như đối với giới hạn hàm một biến.

Định lí 2.1. Nếu f có giới hạn $l \in \mathbb{R}^m$ tại x^0 thì giới hạn đó là duy nhất.

Định lí 2.2. $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x^k\} \subset A \setminus \{x^0\}, x^k \rightarrow x^0$, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = l.$$

Định lí 2.3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \neq 0$ thì tồn tại một lân cận U của x^0 sao cho

$$f(x) \neq 0, \forall x \in U \cap A, x \neq x^0.$$

Định lí 2.4. Giả sử $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ có giới hạn tại $x^0 \in A'$. Khi đó $\alpha f + \beta g$ có giới hạn tại x^0 , $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow x^0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow x^0} g(x).$$

Định lí 2.5. Giả sử $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ và $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm có giới hạn tại $x^0 \in A'$. Khi đó

(i) Hàm $(\lambda f)(x) = \lambda(x) \cdot f(x)$ có giới hạn tại x^0 và

$$\lim_{x \rightarrow x^0} (\lambda f)(x) = \lim_{x \rightarrow x^0} \lambda(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x^0} f(x).$$

(ii) Nếu $\lim_{x \rightarrow x^0} \lambda(x) \neq 0$ thì trong lân cận U đủ bé của x^0 hàm $\frac{f}{\lambda}$ xác định trên $A \cap U$ và có giới hạn tại x^0 và

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f}{\lambda}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x^0} \lambda(x)}.$$

Định lí 2.6. (Nguyên lí Cauchy). Hàm $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^m$, có giới hạn tại $x^0 \in A'$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x', x'' \in A \cap B(x^0, \delta), x', x'' \neq x^0$ ta có

$$\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

2.3. Giới hạn lặp và giới hạn theo hướng

Một sự khác biệt giữa hàm n -biến ($n > 1$) với hàm 1-biến là sự tồn tại khái niệm giới hạn lặp và giới hạn theo hướng.

1. Giới hạn lặp

Để dễ hình dung khái niệm giới hạn lặp, đầu tiên ta xét trường hợp hàm hai biến.

Cho $A \subset \mathbb{R}^2$ và $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Với mỗi $y \in \mathbb{R}$ đặt

$$A^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}.$$