

LỜI NÓI ĐẦU

Nâng cao chất lượng, đổi mới trong giáo dục đào tạo là tiêu chí sống còn đối với một trường đại học trong thời đại khoa học công nghệ như hiện nay. Một trong những nội dung đổi mới quan trọng ở Trường Đại học Lạc Hồng được thực hiện trong thời gian qua là xây dựng và ban hành chuẩn đầu ra chất lượng cao bao gồm các yêu cầu về

- Kiến thức;
- Kỹ năng;
- Thái độ;
- Vị trí và khả năng công tác sau khi tốt nghiệp;
- Khả năng học tập và nâng cao trình độ sau khi tốt nghiệp.

Như vậy, việc trang bị và rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp cho sinh viên được xác định là nhiệm vụ vô cùng quan trọng và phải thực hiện lâu dài, xuyên suốt trong cả quá trình đào tạo. Tuy nhiên, một câu hỏi lớn nảy sinh đó là “các kỹ năng nghề nghiệp của sinh viên được trang bị và rèn luyện như thế nào thông qua quá trình học tập các môn thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản và kiến thức đại cương?”

Môn học Toán Cao Cấp & Xác Suất Thống Kê là một môn thuộc khối kiến thức cơ bản và đây là một trong những học phần quan trọng được Bộ Giáo Dục và Đào Tạo quy định là môn học bắt buộc đối với sinh viên ngành Dược. Giáo trình Toán Cao Cấp & Xác Suất Thống Kê theo định hướng phát triển kỹ năng này ra đời nhằm mục đích trả lời câu hỏi ở trên với nội dung như sau:

Chương 1. Phép tính tích phân hàm một biến

Chương 2. Phương trình vi phân

Chương 3. Đại cương về xác suất

Chương 4. Đại lượng ngẫu nhiên

Chương 5. Thống kê

Trong giáo trình, bên cạnh việc trang bị các kiến thức cơ bản về phép tính tích phân hàm một biến, phương trình vi phân, xác suất và công thức tính xác suất, các phân phối xác suất thông dụng, các bài toán về thống kê toán học, giáo trình còn hướng đến việc áp dụng các kiến thức vào bài toán ứng dụng thực tiễn của chuyên ngành Dược và rèn luyện các kỹ năng cần có của sinh viên để thích ứng với nền giáo dục trong bối cảnh của cuộc cách mạng khoa học và công nghệ hiện đại như hiện nay.

• Kỹ năng giải quyết vấn đề, đặc biệt là các vấn đề gắn với thực tiễn nghề nghiệp thông qua các tình huống, câu hỏi có vấn đề và bài tập ứng dụng ở mỗi chương.

- Kỹ năng làm việc nhóm thông qua hệ thống bài tập ứng dụng.
- Kỹ năng tự học, tự nghiên cứu thông qua việc trả lời các câu hỏi và giải hệ thống bài tập.
- Kỹ năng tư duy tựa thuật giải thông qua các thuật toán đối với từng bài toán cụ thể.

Như vậy, giáo trình trên đã bước đầu đáp ứng được các yêu cầu đặt ra trong chuẩn đầu ra chất lượng cao của nhà trường. Tuy nhiên, đây là giáo trình đầu tiên được biên soạn theo định hướng phát triển kỹ năng nên không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả xin chân thành cảm ơn ThS. Trần Đình Ánh đã cho nhiều góp ý rất quý báu trong suốt quá trình biên soạn giáo trình này. Tác giả cũng rất mong nhận được những góp ý từ các bạn sinh viên và các đồng nghiệp gần xa để giáo trình được hoàn thiện hơn khi tái bản.

Xin trân trọng cảm ơn.

Biên Hòa, ngày 20 tháng 8 năm 2014

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 1. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN.....	6
1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định.....	6
1.1.1. Nguyên hàm.....	6
1.1.2. Tích phân bất định	7
1.1.3. Phương pháp tính tích phân bất định bằng các biến đổi sơ cấp.....	11
1.1.4. Tích phân hàm hữu tỷ	13
1.1.5. Các phương pháp tính tích phân	24
1.2. Tích phân xác định	37
1.2.1. Bài toán diện tích hình thang cong	37
1.2.2. Định nghĩa.....	38
1.2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định	40
1.3. Ứng dụng của tích phân xác định.....	43
1.3.1. Tính diện tích hình phẳng	43
1.3.3. Tính thể tích của vật thể tròn xoay	45
CÂU HỎI ÔN TẬP	46
BÀI TẬP	47
HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ	50
Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN.....	54
2.1. Khái niệm cơ bản	54
2.2. Phương trình vi phân cấp 1	55
2.2.2. Phương trình vi phân biến số phân ly (hay là tách biến được).....	56
2.2.3. Phương trình đẳng cấp.....	57
2.2.4. Phương trình vi phân toàn phần.....	58
2.3. Phương trình vi phân cấp hai	62
2.3.1. Khái niệm cơ bản	62
2.3.2. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được	62
2.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng.....	63
CÂU HỎI ÔN TẬP	70
BÀI TẬP	71
HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ	73
Chương 3. ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT	75
3.1. Giải tích tổ hợp.....	75

3.1.1. Quy tắc cộng.....	75
3.1.2. Quy tắc nhân.....	75
3.1.3. Hoán vị	77
3.1.4. Chinh hợp – Tổ hợp.....	78
3.2. Phép thử và biến cố.....	79
3.2.1. Khái niệm	79
3.2.2. Phân loại biến cố	80
3.2.3. Quan hệ giữa các biến cố.....	81
3.2.4. Phép toán của các biến cố.....	82
3.3. Xác suất của biến cố	85
3.3.1. Định nghĩa xác suất	85
3.3.2. Xác suất có điều kiện.....	88
3.3.3. Biến cố độc lập	89
3.4. Các công thức tính xác suất	90
3.4.1. Công thức cộng xác suất.....	90
3.4.2. Công thức nhân xác suất.....	92
3.4.3. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes	96
3.4.4. Công thức Bernoulli	99
CÂU HỎI ÔN TẬP.....	101
BÀI TẬP	102
HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ	108
Chương 4. ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN.....	110
4.1. Khái niệm về đại lượng ngẫu nhiên	110
4.1.1. Định nghĩa	110
4.1.2. Phân loại đại lượng ngẫu nhiên	110
4.1.3. Luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên	111
4.2. Các tham số đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên	114
4.2.1. Kỳ vọng (hay giá trị trung bình).....	114
4.2.2. Phương sai và độ lệch chuẩn	116
4.2.3. Mode	120
4.3. Đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất đặc biệt	121
4.3.1. Phân phối nhị thức (Bernoulli)	121
4.3.1.1. Định nghĩa	121

4.3.2. Phân phối Poisson.....	122
4.3.3. Phân phối chuẩn.....	124
4.3.4. Phân phối “Chi – bình phương”	126
CÂU HỎI ÔN TẬP	128
BÀI TẬP	129
HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ	132
Chương 5. THỐNG KÊ.....	134
5.1. Lý thuyết mẫu	134
5.1.1. Khái niệm cơ bản.....	134
5.1.2. Phân loại mẫu	134
5.1.3. Các tham số đặc trưng của mẫu	136
5.1.4. Phương pháp tính các số đặc trưng của mẫu bằng bảng.....	137
5.1.5. Phương pháp tính các tham số đặc trưng của mẫu bằng máy tính	141
5.2. Ước lượng các tham số đặc trưng của tổng thể.....	143
5.2.1. Bài toán ước lượng tỷ lệ tổng thể	144
5.2.3. Bài toán xác định độ tin cậy trong ước lượng tỷ lệ	147
5.2.4. Bài toán xác định độ tin cậy trong ước lượng trung bình.....	148
5.2.5. Bài toán xác định kích thước mẫu trong ước lượng tỷ lệ	150
5.2.6. Bài toán xác định kích thước mẫu trong ước lượng trung bình.....	151
5.3. Kiểm định giả thiết thống kê.....	152
5.3.1. Bài toán kiểm định giả thiết về tỷ lệ tổng thể.....	153
CÂU HỎI ÔN TẬP	157
BÀI TẬP	158
HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ	161
CÁC BẢNG PHỤ LỤC.....	162
TÀI LIỆU THAM KHẢO	173

Chương 1. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN



Mục đích yêu cầu

Chương này trình bày các kiến thức về định nghĩa, tính chất, phương pháp cơ bản tính tích phân bất định và tích phân xác định và một số ứng dụng hình học của tích phân xác định.

Người học cần nắm vững các khái niệm, các phương pháp tính tích phân, vận dụng thành thạo và linh hoạt các phương pháp đó trong tính tích phân và biết cách sử dụng tích phân để xác định một số tính toán trong hình học.

1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

Mở đầu

Ở phổ thông trung học, ta đã được tìm hiểu bài toán đạo hàm: Cho hàm số $F(x) = \cos x$. Tìm hàm số $f(x) = F'(x)$. Ở đây $f(x) = F'(x) = (\cos x)' = -\sin x$.



Phát biểu bài toán ngược lại của bài toán trên?

Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$. Ta có $(\sin x)' = \cos x$ nên $F(x) = \sin x$.



Ngoài kết quả trên có thể tìm được các $F(x)$ khác thỏa mãn yêu cầu bài toán hay không?

Ta thấy $F(x) = \sin x + C$ thì vẫn thỏa yêu cầu bài toán.



Có bao nhiêu nguyên hàm của một hàm số cho trước?

Từ bài toán trên dẫn đến khái niệm nguyên hàm sau

1.1.1. Nguyên hàm

1.1.1.1. Định nghĩa

Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ nếu $F(x)$ liên tục, có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $[a; b]$ và $F'(x) = f(x)$.

1.1.1.2. Định lý 1

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ đều có nguyên hàm trên khoảng đó.

Ví dụ 1.1. Cho $f(x) = x^2$, dễ thấy $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ngoài ra nó còn có nguyên hàm dạng $\frac{x^3}{3} + C$, với C là hằng số tùy ý.

1.1.1.3. Định lý 2

- Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) thì $F(x) + C$ (C là hằng số) cũng là nguyên hàm của $f(x)$.
- Mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ đều có dạng $F(x) + C$.

1.1.2. Tích phân bất định

1.1.2.1. Định nghĩa

Dạng tổng quát của nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, kí hiệu là $\int f(x)dx$, được gọi là tích phân bất định của hàm $f(x)$ trên khoảng đó.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.1.2.2. Tính chất cơ bản

- 1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- 3) Nếu $f(x)$ khả vi thì $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
- 4) Nếu $f(x)$ khả vi thì $\int df(x) = f(x) + C$.
- 5) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.
- 6) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

1.1.2.3. Nguyên hàm các hàm số sơ cấp

Từ đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản và các tính chất của tích phân bất định, ta có các tích phân bất định sau:

- 1) $\int a dx = ax + C$, đặc biệt: $\int dx = x + C$.

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \text{ đặc biệt: } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$3) \int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C.$$

Các trường hợp đặc biệt: $\int e^x dx = e^x + C$ và $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

$$4) \int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{\tan(ax+b)}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{\cot(ax+b)}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$8) \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C.$$

Các trường hợp đặc biệt:

$$\blacksquare \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \text{ hay } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

$$\blacksquare \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$\blacksquare \int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C.$$

$$10) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Chú ý. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \text{ đặc biệt: } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

Các tích phân bất định trên được coi là các tích phân cơ bản. Để tính được tích phân bất định của một hàm số, trước hết ta phải nhớ và biết vận dụng những tích phân cơ bản đó. Sau đây là một số ví dụ về cách vận dụng trực tiếp các tích phân cơ bản trên.

Ví dụ 1.2. Vận dụng công thức tính tích phân $\int x^\alpha dx$, ta có:

$$a) \int x^{1975} dx = \frac{x^{1975+1}}{1975+1} + C = \frac{x^{1976}}{1976} + C.$$

$$b) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

$$d) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} + C.$$

Ví dụ 1.3. Vận dụng công thức tính tích phân $\int e^{ax+b} dx$, ta có:

$$a) \int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + C = -\frac{1}{e^x} + C.$$

$$b) \int 2^{3+4x} dx = \int e^{\ln 2^{3+4x}} dx = \int e^{(3+4x)\ln 2} dx = \frac{e^{(3+4x)\ln 2}}{4\ln 2} + C = \frac{2^{3+4x}}{4\ln 2} + C.$$

Ví dụ 1.4. Vận dụng các công thức tính tích phân hàm lượng giác, ta có:

$$a) \int \cos(4x+5) dx = \frac{\sin(4x+5)}{4} + C.$$

$$b) \int \sin(2-x) dx = -\frac{\cos(2-x)}{-1} + C = \cos(2-x) + C.$$

$$c) \int \frac{dx}{\cos^2(2-x)} = -\tan(2-x) + C.$$

$$d) \int \frac{dx}{\sin^2(4x+5)} = -\frac{1}{4} \cot(4x+5) + C.$$

$$e) \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + C = \tan \frac{x}{2} + C.$$

Ví dụ 1.5. Vận dụng công thức tính tích phân $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$, ta có:

$$a) \int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+3| + C.$$

$$b) \int \cot(2x+3) dx = \int \frac{\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)} dx = \frac{1}{2} \ln |\sin(2x+3)| + C.$$

$$c) \int \frac{x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + C.$$

$$d) \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$$

Ví dụ 1.6. Vận dụng công thức tính tích phân $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ và $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, ta có:

$$a) \int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

$$b) \int \frac{dx}{2x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$c) \int \frac{dx}{x^2-2x+10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+9} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x-1}{3} \right) + C.$$

$$d) \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$$

$$e) \int \frac{dx}{2x^2-4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C.$$

$$f) \int \frac{dx}{1-4x^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x+1}{2x-1} \right| + C.$$

$$g) \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 8} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 - 9} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 - 9} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x+1-3}{x+1+3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-2}{x+4} \right| + C.$$

Ví dụ 1.7. Vận dụng công thức tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ và $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ta có:

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 2}} = \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right| + C$$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 2} \right| + C.$$

$$d) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

$$e) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3 - (x^2 - 2x)}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} = \arcsin \left(\frac{x-1}{2} \right) + C.$$

1.1.3. Phương pháp tính tích phân bất định bằng các biến đổi sơ cấp

1.1.3.1. Tính tuyến tính của tích phân bất định

Kết hợp tính chất 3 và 4 của tích phân bất định, ta có:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Tính chất trên của tích phân bất định được gọi là tính tuyến tính. Vận dụng tính chất này, ta có thể tính được tích phân bất định của một lớp hàm có dạng tổng và hiệu của những hàm có trong các tích phân cơ bản, đặc biệt là tích phân của hàm đa thức $\int P_n(x) dx$, trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n .

Ví dụ 1.8. Vận dụng tính tuyến tính của tích phân bất định, ta có:

$$a) \int (x^2 - 2x + 3) dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx + 3 \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$$

$$b) \int (2e^{2x-3} - 3\sin 3x + \frac{1}{x^2-2}) dx = 2 \int e^{2x-3} dx - 3 \int \sin 3x dx + \int \frac{dx}{x^2-2}.$$

$$= e^{2x-3} + \cos 3x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C.$$

1.1.3.2. Phương pháp tính tích phân bất định bằng các phép biến đổi sơ cấp

Khi ta gặp một tích phân mà hàm số dưới dấu tích phân có dạng tích, thương hay lũy thừa của các biểu thức. Nếu ta có thể sử dụng được các phép biến đổi sơ cấp thích hợp để biến đổi hàm số dưới dấu tích phân về dạng tổng và hiệu của các hàm có trong các tích phân cơ bản. Khi đó, ta có thể sử dụng tính tuyến tính của tích phân và các tích phân cơ bản để tính các tích phân đó. Các phép biến đổi sơ cấp thường được sử dụng trong trường này là: phép nhân và chia các biểu thức, phép khai triển hằng đẳng thức, các phép tính đối với các căn thức, các hệ thức và công thức trong lượng giác như hệ thức cơ bản, công thức nhân, công thức biến đổi.

Ví dụ 1.9. Sử dụng các phép biến đổi thích hợp, ta có:

$$\text{a) } \int x(2-x^2)^2 dx = \int x(4-4x^2+x^4) dx = \int (4x-4x^3+x^5) dx = 2x^2 - x^4 + \frac{x^6}{6} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{2x^3 - 7x^2 + 12x - 11}{2x-3} dx &= \int \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{2x-3} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \ln|2x-3| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx &= \int \left(x - 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx \\ &= \int x dx - 2 \int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12x^{\frac{7}{6}}}{7} + 3\sqrt[3]{x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int \cos x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) dx = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$\text{e) } \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$\text{f) } \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

$$\text{g) } \int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}$$

Ghi chú. Ta có các công thức biến đổi trong lượng giác thường được sử dụng trong phương pháp này như sau:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2};$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)];$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)];$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

1.1.4. Tích phân hàm hữu tỷ

Tích phân hàm hữu tỷ là tích phân dạng $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, trong đó $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m . Với tích phân $\int \frac{P_n(x)}{ax+b} dx$, ta chỉ cần thực hiện phép chia đa thức $P_n(x)$ cho $ax+b$ rồi sử dụng tính tuyến tính của tích phân thì sẽ tính được tích phân này dễ dàng: $\int \frac{P_n(x)}{ax+b} dx = \int \left[P_{n-1}(x) + \frac{\alpha}{ax+b} \right] dx = \int P_{n-1}(x) dx + \alpha \int \frac{dx}{ax+b}$.

Trong phần sau, ta sẽ nghiên cứu cách tính tích phân các hàm hữu tỷ có mẫu là đa thức bậc hai và ba. Trong trường hợp đa thức mẫu $Q_m(x)$ có bậc $m > 3$, ta chỉ xét các trường hợp có thể dễ dàng đưa được về dạng tích của các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai vô nghiệm.

1.1.4.1. Tích phân hàm hữu tỷ với mẫu là đa thức bậc hai

Với tích phân hàm hữu tỷ có mẫu là đa thức bậc hai, ta có ba dạng sau:

- **Tích phân dạng** $I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Để tính tích phân dạng này, ta xét ba trường hợp sau:

1) Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2 .

Trong trường hợp này, ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x_1-x_2} \int \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{a(x_1-x_2)} (\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|) + C = \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln \left| \frac{x-x_1}{x-x_2} \right| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.10. Ta có: $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x - 6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3-(-1)} \ln \left| \frac{x-3}{x-(-1)} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.$

2) Tam thức $ax^2 + bx + c$ có nghiệm kép là x_0 .

Trong trường hợp này, ta có:

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{a} \left[-\frac{1}{x-x_0} \right] + C = -\frac{1}{a(x-x_0)} + C.$$

Ví dụ 1.11. Ta có: $\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 8} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2(x-2)} + C = \frac{1}{4-2x} + C.$

3) Tam thức $ax^2 + bx + c$ vô nghiệm.

Trong trường hợp này, đầu tiên ta đặt a là thừa số chung rồi đưa ra ngoài dấu tích

phân và đặt lại như sau: $I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$

Sau đó ta biến đổi và tính tích phân như sau:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} \arctan \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}} \right) + C \\ &= \frac{2}{a\sqrt{4q-p^2}} \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.12. Ta có:
$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

• **Tích phân dạng** $I = \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx \quad (\alpha \neq 0).$

Để tính tích phân dạng này, ta xét ba trường hợp sau:

1) Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt là x_1 và x_2 .

Với trường hợp này, ta có thể tính tích phân bằng cách biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{\alpha x + \beta}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} (A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2|) + C. \end{aligned}$$

Trong đó, A và B là các hằng số được xác định theo α và β bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 1.13. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{2x - 10}{x^2 - 2x - 3} dx.$

Giải

Ta có:
$$\int \frac{2x - 10}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{2x - 10}{(x + 1)(x - 3)} dx = \int \left(\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} \right) dx.$$

Do:
$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{(A + B)x - 3A + B}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{2x - 10}{(x + 1)(x - 3)}.$$

Nên:
$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -3A + B = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Vậy,
$$I = \int \left(\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} \right) dx = 3 \ln |x + 1| - \ln |x - 3| + C = \ln \left| \frac{(x + 1)^3}{x - 3} \right| + C.$$

Ta cũng có thể tính tích phân này như sau:

$$I = \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} dx - 8 \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} = \ln |x^2 - 2x - 3| - 8 \times \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 1} \right| + C$$

$$= \ln|(x+1)(x-3)| - 2\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C = \ln\left|\frac{(x+1)^3}{x-3}\right| + C.$$

2) Tam thức $ax^2 + bx + c$ có nghiệm kép là x_0 .

Với trường hợp này, ta có thể tính tích phân bằng cách biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{\alpha x + \beta}{(x - x_0)^2} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left(A \ln|x - x_0| - \frac{B}{x - x_0} \right) + C = \frac{A}{a} \ln|x - x_0| - \frac{B}{a(x - x_0)} + C. \end{aligned}$$

Trong đó, A và B là các hằng số được xác định theo α và β bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 1.14. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{2x-3}{x^2+4x+4} dx$.

Giải

$$\text{Ta có: } \int \frac{2x-3}{x^2+4x+4} dx = \int \frac{2x-3}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \right) dx.$$

$$\text{Do } \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2} = \frac{2x-3}{(x+2)^2}.$$

$$\text{Nên: } \begin{cases} A=2 \\ 2A+B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-7 \end{cases}.$$

Vậy,

$$I = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{7}{(x+2)^2} \right) dx = 2\ln|x+2| - 7\left(-\frac{1}{x+2}\right) + C = \ln(x+2)^2 + \frac{7}{x+2} + C.$$

Ta cũng có thể tính tích phân này như sau:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+4} dx - 7 \int \frac{dx}{x^2+4x+4} = \ln|x^2+4x+4| + \frac{7}{x+2} + C \\ &= \ln(x+2)^2 + \frac{7}{x+2} + C. \end{aligned}$$

3) Tam thức $ax^2 + bx + c$ vô nghiệm.

Với trường hợp này, ta có thể biến đổi để tính tích phân như sau:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax + b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx \\
&= \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \\
&= \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{1}{a} \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a} \right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.
\end{aligned}$$

Trong đó, $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C.$

Ví dụ 1.15. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{3x + 5}{x^2 + 4x + 13} dx.$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } I &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x + 4) + 5 - \frac{3 \cdot 4}{2}}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} \\
&= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 13) - \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2} \\
&= \ln(\sqrt{(x^2 + 4x + 13)^3}) - \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x + 2}{3} \right) + C.
\end{aligned}$$

Chú ý. Cách biến đổi để tính tích phân trong trường hợp này có thể sử dụng cho các trường hợp 1 và 2.

• **Tích phân dạng** $I = \int \frac{P_n(x)}{ax^2 + bx + c} dx \quad (n \geq 2).$

Để tính tích phân dạng này, trước hết ta chia đa thức $P_n(x)$ cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ để đưa tích phân này về dạng:

$$\int \frac{P_n(x)}{ax^2 + bx + c} dx = \int P_{n-2}(x) dx + \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Trong đó, tích phân thứ nhất ở vế phải là tích phân hàm đa thức và tích phân thứ hai sẽ rơi vào một trong hai dạng trên.

Ví dụ 1.16. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{3x^4 - 18x^3 + 18x^2 - 6x - 36}{3x^2 - 12x - 15} dx.$

Giải

Thực hiện phép chia hai đa thức rồi tính tích phân, ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x^2 - 2x + 3 + \frac{9}{3x^2 - 12x - 15} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 4x - 5} \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{3}{5 - (-1)} \ln \left| \frac{x-5}{x-(-1)} \right| + C \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{1}{2} \left| \frac{x-5}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.17. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{2x^3 - 12x^2 + 43x - 51}{2x^2 - 8x + 26} dx$.

Giải

Thực hiện phép chia hai đa thức rồi tính tích phân, ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x - 2 + \frac{x+1}{2x^2 - 8x + 26} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{x+1}{2x^2 - 8x + 26} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{\frac{1}{4}(4x-8) + 3}{2x^2 - 8x + 26} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4} \int \frac{4x-8}{2x^2 - 8x + 26} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4} \ln |2x^2 - 8x + 26| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3^2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4} \ln |2x^2 - 8x + 26| + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-2}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

1.1.4.2. Tích phân hàm hữu tỉ với mẫu là đa thức bậc ba

Với tích phân này, ta chỉ xét dạng tích phân sau (trong trường hợp tử là đa thức bậc

$$n \geq 3 \text{ thì với phép chia đa thức ta sẽ đưa về dạng này): } I = \int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{ax^3 + bx^2 + cx + d} dx.$$

Để tính tích phân dạng này, ta xét bốn trường hợp sau:

1) Đa thức mẫu có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 .

Với trường hợp này, ta có thể biến đổi và tính tích phân như sau:

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{a} \left(A \ln |x - x_1| + B |x - x_2| + C |x - x_3| \right) + C.$$

Trong đó, A, B, C là các hằng số được xác định theo α, β, γ bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 1.18. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} dx.$

Giải

Ta thấy đa thức bậc ba dưới mẫu có ba nghiệm là 1, 2, 4 nên:

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4} \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Do } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4} &= \frac{A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-6A-5B-3C)x + 8A+4B+2C}{(x-1)(x-2)(x-4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}. \end{aligned}$$

$$\text{Nên: } \begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2 \\ 8A+4B+2C=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-7 \\ C=5 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy, } I &= \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4} \right) dx \\ &= 3 \ln |x-1| - 7 \ln |x-2| + 5 \ln |x-4| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3 (x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C. \end{aligned}$$

2) Đa thức mẫu có nghiệm kép là x_0 và nghiệm đơn là x_1 .

Với trường hợp này, ta có thể biến đổi và tính tích phân như sau:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-x_0)^2 (x-x_1)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{x-x_1} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left(A \ln |x-x_0| - \frac{B}{x-x_0} + C |x-x_1| \right) + C \end{aligned}$$

Ví dụ 1.19. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{2x^3 - 6x - 4} dx.$

Giải

Thực hiện phép chia tử cho mẫu rồi biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 + \frac{4x^2 + 3x + 5}{2x^3 - 6x - 4} \right) dx = \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{4x^2 + 3x + 5}{x^3 - 3x - 2} dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{4x^2 + 3x + 5}{(x+1)^2(x-2)} dx = x + \frac{1}{2} \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \right) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} &= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B+2C)x - 2A - 2B + C}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{4x^2 + 3x + 5}{(x+1)^2(x-2)} \end{aligned}$$

$$\text{Nên: } \begin{cases} A+C=4 \\ -A+B+2C=3 \\ -2A-2B+C=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy, } I &= x + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |(x+1)(x-3)^3| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

3) Đa thức mẫu có nghiệm bội ba là x_0 .

Với trường hợp này, ta có thể biến đổi và tính tích phân như sau:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x-x_0)^3} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left(A \ln |x-x_0| - \frac{B}{x-x_0} - \frac{C}{2(x-x_0)^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.20. Tính tích phân sau: $I = \int \frac{2x^4 - 9x^3 + 17x^2 - 18x + 4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx.$

Giải

Thực hiện phép chia tử cho mẫu rồi biến đổi như sau:

$$I = \int \left(2x - 3 + \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \right) dx = x^2 - 3x + \int \frac{2x^2 - 7x + 1}{(x-1)^3} dx$$