

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN - BỘ MÔN TOÁN



TÀI LIỆU HỌC TẬP (CÁC NGÀNH KHỐI KỸ THUẬT)

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Thành phố Hồ Chí Minh - 2020

Mục lục

1	MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC	5
1.1	Định nghĩa ma trận và các phép toán	5
1.1.1	Định nghĩa	5
1.1.2	Các dạng ma trận đặc biệt	5
1.1.3	Hai ma trận bằng nhau	7
1.1.4	Các phép toán trên ma trận	7
1.2	Định thức	9
1.2.1	Hoán vị và nghịch thế	10
1.2.2	Định thức của ma trận	10
1.2.3	Các tính chất của định thức	11
1.2.4	Tính định thức bằng công thức khai triển	14
1.2.5	Hạng của ma trận	16
1.2.6	Nghịch đảo của ma trận	18
2	KHÔNG GIAN VECTOR	25
2.1	Định nghĩa và ví dụ	25
2.1.1	Một số tính chất	27
2.2	Không gian vector con	27
2.2.1	Định nghĩa	27
2.2.2	Không gian con sinh bởi một họ vector	28
2.3	Sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính	29
2.3.1	Định nghĩa	29
2.3.2	Tính chất của họ vector độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính	30
2.4	Cơ sở của không gian vector	31
2.4.1	Định nghĩa	31
2.5	Số chiều của một không gian vector	32
2.5.1	Định nghĩa	32
2.5.2	Tọa độ của một vector	34
2.5.3	Hạng của một họ vector	34
2.5.4	Đổi cơ sở trong không gian vector	35
3	HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	40
3.1	Hệ phương trình tuyến tính	40

3.1.1	Định nghĩa	40
3.1.2	Điều kiện tồn tại nghiệm	42
3.2	Hệ phương trình tuyến tính Cramer	43
3.3	Hệ phương trình tuyến tính tổng quát	44
3.3.1	Định lý về số nghiệm của hệ phương trình tổng quát: $AX = B$ (1)	44
3.3.2	Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss	45
3.4	Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	46
4	ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH	50
4.1	Định nghĩa và tính chất	50
4.1.1	Định nghĩa	50
4.1.2	Tính chất của ánh xạ tuyến tính	51
4.2	Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính	51
4.2.1	Định nghĩa	51
4.2.2	Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu	52
4.3	Ma trận của ánh xạ tuyến tính	54
4.4	Liên hệ giữa tọa độ của ảnh và tạo ảnh của một ánh xạ tuyến tính	55
4.5	Phép toán trên ánh xạ tuyến tính và ma trận của chúng	56
4.6	Ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với hai cơ sở	57
5	CHÉO HÓA MA TRẬN	62
5.1	Trị riêng và Vector riêng	62
5.1.1	Định nghĩa	62
5.1.2	Đa thức đặc trưng	63
5.1.3	Tính chất của trị riêng và vector riêng	64
5.2	Chéo hóa ma trận vuông	65
5.2.1	Định nghĩa	65
5.2.2	Điều kiện chéo hóa	65
5.2.3	Thuật toán chéo hóa ma trận vuông	67
6	DẠNG SONG TUYẾN TÍNH	70
6.1	Ánh xạ song tuyến tính và dạng song tuyến tính	70
6.1.1	Định nghĩa ánh xạ song tuyến tính	70
6.1.2	Định nghĩa dạng song tuyến tính	70
6.1.3	Ma trận của dạng song tuyến tính	71
6.1.4	Dạng song tuyến tính đối xứng	72
6.2	Dạng toàn phương	73
6.2.1	Định nghĩa	73
6.2.2	Ma trận của dạng toàn phương	73
6.2.3	Dạng chính tắc của dạng toàn phương	74
6.3	Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange	74
7	KHÔNG GIAN EUCLIDE	77
7.1	Định nghĩa không gian Euclide	77
7.1.1	Định nghĩa	77

7.1.2	Độ dài của vector	77
7.1.3	Bất đẳng thức Cauchy - Schwartz	78
7.2	Vector trực giao	78
7.2.1	Định nghĩa vector trực giao - Họ vector trực giao - Họ vector trực chuẩn . .	78
7.2.2	Phép biến đổi trực giao	80
7.2.3	Chéo hóa trực giao một ma trận đối xứng	80
7.3	Đường và Mặt bậc hai	81
7.3.1	Đường bậc hai trên mặt phẳng tọa độ Descartes vuông góc	82
7.3.2	Mặt bậc hai trong không gian tọa độ Descartes vuông góc	83

Tailieu.vn

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

1.1 ĐỊNH NGHĨA MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA. Một *ma trận* kích thước $m \times n$ là một bảng hình chữ nhật gồm mn số thực được xếp thành m *dòng* và n *cột*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

với $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở dòng i cột j của A .

KÍ HIỆU. Để viết ngắn gọn, ta dùng kí hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ để nói A là ma trận kích thước $m \times n$ có phần tử ở dòng i cột j là a_{ij} . Nếu không nói đến kích thước, ta viết $A = [a_{ij}]$. Tập hợp tất cả các ma trận kích thước $m \times n$ được kí hiệu là $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1 ■

$$A = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} & -1 \\ 5 & \frac{1}{7} & 3 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

là ma trận kích thước 2×3 có $a_{12} = \sqrt{2}$, $a_{23} = 3$. ■

Các dạng ma trận đặc biệt

ĐỊNH NGHĨA. Một *ma trận không* là ma trận mà tất cả phần tử đều là 0.

Ví dụ 2 ■ $O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ là một ma trận không kích thước 3×2 . ■

ĐỊNH NGHĨA. Ma trận $A = [a_{ij}]$ có kích thước $n \times n$ (số dòng bằng số cột) được gọi là **ma trận vuông cấp n** . Khi đó, các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tạo thành **đường chéo chính** của A .

Ví dụ 3 ■ $S = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 \\ \pi & 3 & 1 \\ \frac{2}{5} & 0 & 8 \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 3 có $a_{11} = -2, a_{22} = 3, a_{33} = 8$ là các phần tử trên đường chéo chính. ■

KÍ HIỆU. Tập tất cả các ma trận vuông cấp n được kí hiệu là $M_n(\mathbb{R})$.

ĐỊNH NGHĨA. Một ma trận **vuông** $A = [a_{ij}]$ mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0, tức là, $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, được gọi là một **ma trận đường chéo**.

Ví dụ 4 ■ Các ma trận $G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ và $H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ là các ma trận đường chéo. ■

ĐỊNH NGHĨA. Một ma trận **đường chéo** $A = [a_{ij}]$ mà tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1, tức là, $a_{ij} = 1$ với mọi $i = j$, và $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, được gọi là một **ma trận đơn vị**. Ta kí hiệu ma trận đơn vị cấp n là I_n .

Ví dụ 5 ■ Các ma trận $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là các ma trận đơn vị. ■

ĐỊNH NGHĨA. Ma trận **tam giác trên** là ma trận **vuông** mà các phần tử có chỉ số dòng lớn hơn chỉ số cột đều bằng 0. Ma trận **tam giác dưới** là ma trận **vuông** mà các phần tử có chỉ số dòng bé hơn chỉ số cột đều bằng 0.

Ví dụ 6 ■ Ma trận $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên và ma trận $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác dưới. ■

ĐỊNH NGHĨA. Ma trận có kích thước $1 \times n$ (số dòng bằng 1) được gọi là **ma trận dòng**. Ma trận có kích thước $m \times 1$ (số cột bằng 1) được gọi là **ma trận cột**.

Ví dụ 7 ■ Ma trận $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ là ma trận dòng và ma trận $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$ là ma trận cột. ■

|| Hai ma trận bằng nhau

ĐỊNH NGHĨA. Hai ma trận $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ cùng kích thước $m \times n$ được gọi là **bằng nhau** nếu $a_{ij} = b_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, tức là, các phần tử tương ứng là bằng nhau.

Ví dụ 8 ■ Các ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & 5 \end{bmatrix}$ là bằng nhau nếu và chỉ nếu $x = -3, y = 0$. ■

LƯU Ý. Hai ma trận **không cùng kích thước** thì **không bao giờ bằng nhau**.

|| Các phép toán trên ma trận

PHÉP CỘNG MA TRẬN. Nếu $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là các ma trận cùng kích thước $m \times n$, thì **tổng** của A và B là một ma trận $C = [c_{ij}]$ kích thước $m \times n$, trong đó

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

tức là, C thu được bằng cách cộng các phần tử tương ứng của A và B .

Ví dụ 9 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
Thì $A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. ■

TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG. Phép cộng hai ma trận cùng kích thước có các tính chất sau:

Tính giao hoán

$$A + B = B + A$$

Tính kết hợp

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Không đổi khi cộng với ma trận không

$$A + O = O + A = A$$

Tổng với ma trận đối bằng ma trận không

$$A + (-A) = O$$

trong đó $-A = [-a_{ij}]$.

PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN. Nếu $A = [a_{ij}]$ là một ma trận kích thước $m \times n$ và r là một số thực, thì **tích** rA là một ma trận kích thước $m \times n$ thu được bằng cách nhân mỗi phần tử của A với r , tức là, $rA = [ra_{ij}]$.

Ví dụ 10 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ thì $3A = \begin{bmatrix} 9 & -21 & 6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ và $-A = (-1)A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ■

TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN. Với r, s là các số thực và A, B là các ma trận thì:

$$(r + s)A = rA + sA$$

$$(rs)A = r(sA)$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$1A = A, \quad (-1)A = -A$$

PHÉP NHÂN HAI MA TRẬN. Nếu $A = [a_{ij}]$ là một ma trận kích thước $m \times p$ và $B = [b_{ij}]$ là một ma trận kích thước $p \times n$, thì **tích** của A và B , ký hiệu bởi AB , là một ma trận $C = [c_{ij}]$ kích thước $m \times n$ định nghĩa bởi

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{ij} & & & \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 11 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Thì $AB = \begin{bmatrix} (1)(-2) + (2)(4) + (-1)(2) & (1)(5) + (2)(-3) + (-1)(1) \\ (3)(-2) + (1)(4) + (4)(2) & (3)(5) + (1)(-3) + (4)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$

Và $BA = \begin{bmatrix} (-2)(1) + (5)(3) & (-2)(2) + (5)(1) & (-2)(-1) + (5)(4) \\ (4)(1) + (-3)(3) & (4)(2) + (-3)(1) & (4)(-1) + (-3)(4) \\ (2)(1) + (1)(3) & (2)(2) + (1)(1) & (2)(-1) + (1)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 22 \\ -5 & 5 & -16 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Tương tự $CA = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 13 \end{bmatrix}$, và $BC = \begin{bmatrix} -7 & 11 \\ 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

Phép nhân AC và CB là không thực hiện được. ■

LƯU Ý. Cho ma trận A có kích thước $m \times p$ và ma trận B có kích thước $p \times n$. Khi đó:

- Phép nhân BA không thực hiện được khi $m \neq n$.
- Khi phép nhân BA thực hiện được, tức là $m = n$, thì BA có kích thước là $p \times p$, có thể khác với kích thước của AB ($m \times m$).
- Khi AB và BA có cùng kích thước (tức là $m = p$), thì chúng có thể bằng nhau, cũng có thể khác nhau.

Ví dụ 12 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 Thì $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ trong khi $BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$



TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN MA TRẬN. Với A, B và C là các ma trận có kích thước thích hợp (để đảm bảo cho các phép nhân thực hiện được) thì:

Tính kết hợp

$$A(BC) = (AB)C$$

Tính phân bố

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Không đổi khi nhân với ma trận đơn vị

$$AI_n = A \text{ và } I_m B = B$$

Với n là số cột của A và m là số dòng của B .

PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN. Nếu $A = [a_{ij}]$ là một ma trận kích thước $m \times n$, thì ma trận $A^T = [a_{ij}^T]$ kích thước $n \times m$, trong đó

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

được gọi là **chuyển vị** của A .

Ví dụ 13 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

thì các chuyển vị là $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ và $C^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$



TÍNH CHẤT CỦA CHUYỂN VỊ. Với r là một số thực và A, B là các ma trận. Khi đó:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(AB)^T = B^T A^T$

(d) $(rA)^T = rA^T$

1.2 ĐỊNH THỨC

Hoán vị và nghịch thế

ĐỊNH NGHĨA. Xét tập $\{1, 2, \dots, n\}$ gồm n số tự nhiên đầu tiên. Một sự sắp xếp lại $j_1 j_2 \dots j_n$ các phần tử của tập này được gọi là một **hoán vị** của nó. Kí hiệu S_n là tập tất cả các hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên. Như vậy S_n có $n!$ phần tử.

Ví dụ 1 ■ S_1 gồm chỉ $1! = 1$ hoán vị của tập $\{1\}$; S_2 gồm $2! = 2$ hoán vị của tập $\{1, 2\}$, đó là: 12 và 21; S_3 gồm $3! = 6$ hoán vị của tập $\{1, 2, 3\}$, đó là: 123, 132, 213, 231, 312 và 321. ■

ĐỊNH NGHĨA. Một hoán vị $j_1 j_2 \dots j_n$ của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là có một **nghịch thế** nếu có một j_r lớn hơn đứng trước một j_s nhỏ hơn. Kí hiệu $N(\sigma)$ là tổng số nghịch thế của hoán vị $\sigma \in S_n$. Một hoán vị σ được gọi là **chẵn** hay **lẻ** tùy theo $N(\sigma)$ là chẵn hay lẻ.

Ví dụ 2 ■ Hoán vị $4132 \in S_4$ có bốn nghịch thế: 4 trước 1, 4 trước 3, 4 trước 2 và 3 trước 2. Đây là một hoán vị chẵn ($N(4132) = 4$).

Trong S_2 , hoán vị 12 là chẵn, vì nó không có nghịch thế ($N(12) = 0$); hoán vị 21 là lẻ, vì nó có một nghịch thế ($N(21) = 1$). ■

Định thức của ma trận

ĐỊNH NGHĨA. Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n . Ta định nghĩa **định thức** của A , kí hiệu là $\det A$ (hoặc $|A|$) bởi:

$$\det A = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n \in S_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

trong đó tổng được lấy trên tất cả các hoán vị $j_1 j_2 \dots j_n$ của tập $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ví dụ 3 ■ Với $A = [a_{11}]$ là ma trận vuông cấp 1, thì S_1 chỉ có một hoán vị duy nhất là 1, là hoán vị chẵn. Vậy $\det A = a_{11}$. ■

Ví dụ 4 ■ Với $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2, để tính $\det A$ ta viết các số hạng $a_{1-} a_{2-}$ và $a_{1-} a_{2-}$ rồi điền vào chỗ trống các hoán vị của S_2 , đó là 12 và 21. Do 12 là hoán vị chẵn nên số hạng $a_{11} a_{22}$ mang dấu +; do 21 là hoán vị lẻ nên số hạng $a_{12} a_{21}$ mang dấu -. Vậy

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Cụ thể, nếu $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ thì $\det A = (2)(5) - (-3)(4) = 22$. ■

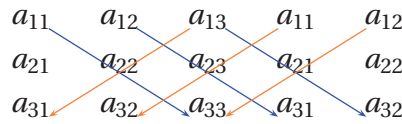
Ví dụ 5 ■ Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì, để tính $\det A$, ta viết sáu số hạng

$$a_{1-} a_{2-} a_{3-}, \quad a_{1-} a_{2-} a_{3-}, \quad a_{1-} a_{2-} a_{3-}, \quad a_{1-} a_{2-} a_{3-}, \quad a_{1-} a_{2-} a_{3-}, \quad \text{và} \quad a_{1-} a_{2-} a_{3-}$$

Tất cả các hoán vị của S_3 được điền vào các chỗ trống, và dấu của các số hạng là + hay - tùy thuộc vào hoán vị là chẵn hay lẻ. Ta được

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ta có thể tính $\det A$ theo cách sau: thêm vào bên phải A cột thứ nhất và cột thứ hai. Tích các phần tử trên đường thẳng từ trái qua phải được lấy dấu +; tích các phần tử trên đường thẳng từ phải qua trái được lấy dấu -.



Ví dụ 6 ■ Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tính $\det A$.

Giải $\det A = (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6$.

||| Các tính chất của định thức

ĐỊNH LÍ. Định thức của một ma trận và chuyển vị của nó là bằng nhau, tức là, $\det A = \det A^T$.

Ví dụ 7 ■ Với $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, thì $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

và $\det A^T = (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) - (1)(1)(3) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6 = \det A$

ĐỊNH LÍ. Nếu B là ma trận thu được từ A bằng cách đổi chỗ hai dòng (cột) của A thì $\det B = -\det A$.

Chứng minh. Giả sử B có được từ bằng A bằng cách đổi chỗ dòng r và dòng s của A , với $r < s$. Khi đó ta có $b_{rj} = a_{sj}$, $b_{sj} = a_{rj}$, và $b_{ij} = a_{ij}$ với $i \neq r, s$. Bây giờ

$$\begin{aligned} \det B &= \sum (-1)^{N(j_1 \dots j_r \dots j_s \dots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{sj_s} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{N(j_1 \dots j_r \dots j_s \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{sj_r} \dots a_{rj_s} \dots a_{nj_n} \\ &= - \sum (-1)^{N(j_1 \dots j_s \dots j_r \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_s} \dots a_{sj_r} \dots a_{nj_n} \\ &= -\det A. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8 ■ Ta có

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \text{ và } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

ĐỊNH LÝ. Nếu hai dòng (cột) của A là bằng nhau, thì $\det A = 0$.

Chứng minh. Giả sử dòng r và dòng s của A là bằng nhau. Đổi chỗ các dòng r và s của A để được ma trận B . Khi đó $\det A = -\det B$. Mặt khác, $B = A$, nên $\det B = \det A$. Vậy $\det A = -\det A$ và do đó $\det A = 0$. $\square$

Ví dụ 9 ■ Theo Định lý trên, ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ĐỊNH LÝ. Nếu một dòng (cột) của A bằng 0, thì $\det A = 0$.

Chứng minh. Giả sử dòng thứ r của A bằng 0. Vì mỗi số hạng trong định nghĩa định thức của A đều chứa một nhân tử từ dòng thứ r , nên các số hạng trong $\det A$ đều bằng 0. Do đó $\det A = 0$. $\square$

Ví dụ 10 ■ Theo Định lý trên thì

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ĐỊNH LÝ. Nếu B thu được từ A bằng cách nhân một dòng (cột) của A với một số thực c , thì $\det B = c \det A$.

Chứng minh. Giả sử dòng thứ r của $A = [a_{ij}]$ được nhân với c để thu được $B = [b_{ij}]$. Khi đó $b_{ij} = a_{ij}$ nếu $i \neq r$ và $b_{rj} = ca_{rj}$. Theo Định nghĩa thì

$$\begin{aligned} \det B &= \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots ca_{rj_r} \dots a_{nj_n} \\ &= c \left(\sum (-1)^{N(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_r} \dots a_{nj_n} \right) = c \det A. \end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 11 ■ Ta có

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18.$$

Ví dụ 12 ■ Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0.$$



ĐỊNH LÍ. Nếu $B = [b_{ij}]$ thu được từ $A = [a_{ij}]$ bằng cách cộng mỗi phần tử của dòng (cột) thứ r của A với c lần (c là hằng số) phần tử tương ứng của dòng (cột) thứ s của A với $r \neq s$, thì $\det B = \det A$.

Ví dụ 13 ■ Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

thu được bằng cách cộng hai lần dòng thứ hai với dòng thứ nhất.



ĐỊNH LÍ. Nếu $A = [a_{ij}]$ là một ma trận tam giác trên (dưới), thì

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

tức là, định thức của một ma trận tam giác là tích của các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 14 ■

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(-2)(3) = -6.$$



ĐỊNH LÍ. Định thức của tích hai ma trận bằng tích các định thức, tức là

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Ví dụ 15 ■ Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Thì $|A| = -2$ và $|B| = 5$.

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

và

$$|AB| = -10 = |A||B|.$$



||| Tính định thức bằng công thức khai triển

ĐỊNH NGHĨA. Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n . Với mỗi cặp gồm một tập k ($1 \leq k \leq n$) chỉ số dòng $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ và một tập k chỉ số cột $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, ta gọi

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

, tức là định thức của ma trận vuông cấp k gồm các phần tử nằm trên k dòng và k cột này, là **định thức con cấp k** của A sinh bởi các dòng $i_1, i_2, \dots, i_k$ và các cột $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Đặt $\overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ là định thức của ma trận vuông cấp $n - k$ thu được từ A bằng cách xóa đi các dòng $i_1, i_2, \dots, i_k$ và các cột $j_1, j_2, \dots, j_k$, gọi là **định thức con phụ** của $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$. Ta gọi $(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k} \overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ là **phần bù đại số** của $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$.

Ví dụ 16 ■ Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & k \\ l & m & n & p & q \end{bmatrix}$$

Thì

$$M_{12}^{25} = \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{M}_{12}^{25} = \det \begin{bmatrix} a & c & d \\ f & h & i \\ l & n & p \end{bmatrix}.$$

ĐỊNH LÝ LAPLACE. Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n . Khi đó với k dòng (cột) cho trước, định thức của A bằng tích của tất cả các định thức con cấp k lấy từ k dòng (cột) đó với phần bù đại số của nó. Cụ thể,

(i) Với mỗi tập k dòng $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, ta có

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k} M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} \overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$$

(ii) Với mỗi tập k cột $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, ta có

$$\det A = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k} M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} \overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$$

Ví dụ 17 ■ Bằng cách khai triển theo cột 1 và cột 3, ta có:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = M_{13}^{13} \overline{M}_{13}^{13} + M_{14}^{13} \overline{M}_{14}^{13} + M_{34}^{13} \overline{M}_{34}^{13} \\
&= (-1)^8 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^9 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -1069.
\end{aligned}$$

■

KÍ HIỆU. Cho $A = [a_{ij}]$ là một ma trận vuông cấp n . Khi đó, với mỗi phần tử a_{ij} , thì $\overline{M}_i^j$ là định thức của ma trận con kích thước $(n-1) \times (n-1)$ của A thu được bằng cách xóa dòng i và cột j của A . **Phần bù đại số** của a_{ij} được ký hiệu bởi A_{ij} :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$$

Ví dụ 18 ■ Với

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Thì

$$\overline{M}_1^2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34, \quad \overline{M}_2^3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 7 = 10,$$

và

$$\overline{M}_3^1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16.$$

Vì vậy,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \overline{M}_1^2 = (-1)(-34) = 34$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \overline{M}_2^3 = (-1)(10) = -10$$

và

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \overline{M}_3^1 = (1)(-16) = -16$$

■

HỆ QUẢ (LAPLACE). Với $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n . Khi đó, với mỗi $1 \leq i \leq n$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(khai triển của $\det A$ theo dòng i);

và với mỗi $1 \leq j \leq n$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(khai triển của $\det A$ theo cột j).

Ví dụ 19 ■ Tính $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ bằng cách khai triển theo dòng thứ ba, ta được

$$\det A = (-1)^{3+1}(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2)(8) + (1)(-2)(10) = -4$$

|| Hạng của ma trận

ĐỊNH NGHĨA. Cho ma trận $A = [a_{ij}]$. Ta định nghĩa **hạng** của A là cấp cao nhất của tất cả các định thức con khác không của ma trận A , ký hiệu $r(A)$.

Ví dụ 20 ■ Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

Các định thức con cấp ba của A là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Tồn tại định thức con cấp hai của A khác không là $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$ (gồm các phần tử trên các dòng 1,2 và các cột 1,2).

Như vậy: $r(A) = 2$

ĐỊNH LÝ. Các phép biến đổi sơ cấp sau không làm thay đổi hạng của ma trận

1. Đổi chỗ hai dòng (cột).
2. Nhân một dòng (cột) với một số khác không.
3. Cộng vào một dòng (cột) với các phần tử tương ứng của dòng (cột) khác sau khi đã nhân với một số.

ĐỊNH NGHĨA. Ma trận bậc thang là ma trận có hai tính chất sau:

- Các dòng khác không (tức là có phần tử khác 0) luôn ở trên các dòng không (tức là có tất cả các phần tử bằng 0).
- Trên hai hàng khác không bất kì thì phần tử khác không đầu tiên ở dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở dòng trên.

Ví dụ 21 ■ Các ma trận sau có dạng bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta thấy rằng, định thức con khác không cấp cao nhất của A là 3 (gồm các phần tử trên các dòng 1,2,3 và các cột 2,3,4), nên $r(A) = 3$. Định thức con khác không cấp cao nhất của B là 2 (gồm các phần tử trên các dòng 1,2 và các cột 3,4) nên $r(B) = 2$. ■

NHẬN XÉT. Hạng của một ma trận **dạng bậc thang** chính là số dòng khác không của nó.

CÁCH TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN.

Cách 1. Dùng định nghĩa

- Chỉ ra một định thức con cấp r khác không
- Chứng tỏ rằng các định thức con cấp lớn hơn r (nếu có) đều bằng không.
- Kết luận hạng của ma trận bằng r .

Cách 2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp

- Đưa A về dạng bậc thang B bằng các phép biến đổi sơ cấp
- Kết luận hạng của A chính là số dòng khác không của B .

Ví dụ 22 ■

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -1 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{d_1 := \frac{1}{2}d_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & 6 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 + 6d_1 \\ d_3 := d_3 - 4d_1}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \textcircled{3} & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{d_2 := \frac{1}{3}d_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 = d_1 + \frac{1}{2}d_2 \\ d_3 := d_3 - 6d_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{d_3 := \frac{1}{5}d_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 = d_1 + \frac{1}{6}d_3 \\ d_2 := d_2 - \frac{2}{3}d_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Hạng của A là 3.

Ví dụ 23 ■

$$\begin{aligned}
 B = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 6d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$r(B) = 3$.

||| Nghịch đảo của ma trận

ĐỊNH NGHĨA. Một ma trận vuông cấp n được gọi là *khả nghịch* (hay *không suy biến*) nếu tồn tại một ma trận B vuông cấp n sao cho

$$AB = BA = I_n$$

Ma trận B được gọi là *nghịch đảo* của A . Nếu không tồn tại một ma trận B như vậy, thì A được gọi là *không khả nghịch* (hay *suy biến*)

Ví dụ 24 ■ Cho

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vì

$$AB = BA = I_2$$

ta kết luận rằng B là một nghịch đảo của A và A là ma trận không suy biến.

ĐỊNH LÝ. Nếu một ma trận có nghịch đảo, thì nghịch đảo đó là duy nhất. Khi đó, ta ký hiệu nghịch đảo của ma trận A là A^{-1} .

Chứng minh. Với B và C là các nghịch đảo của A . Thì

$$BA = AC = I_n.$$

Do đó,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

□

TÍNH CHẤT.

- (a) Nếu A là ma trận khả nghịch thì A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (b) Nếu A và B là các ma trận khả nghịch thì AB khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (c) Nếu A là ma trận khả nghịch thì $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

ĐỊNH LÝ. Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Vì A khả nghịch nên tồn tại ma trận A^{-1} thỏa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Do đó $(\det A)(\det A^{-1}) = \det AA^{-1} = \det I_n = 1$.

Từ đó $\det A \neq 0$.

($\Leftarrow$) Với $\det A \neq 0$. Ta cần tìm ma trận A^{-1} thỏa $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ta định nghĩa ma trận P_A vuông cấp n , được gọi là **ma trận phụ hợp** của A , là ma trận có phần tử ở vị trí (i, j) là phần bù đại số a_{ji} của a_{ji} :

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó, phần tử ở vị trí (i, j) của ma trận tích $A(P_A)$ là:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}$$

Với $i = j$ thì $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} = \det A$ (khai triển theo dòng i).

Với $i \neq j$, ta đặt B là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay dòng thứ j của A bởi dòng thứ i . Khi đó, B có hai dòng bằng nhau nên $\det B = 0$. Mặt khác, khai triển $\det B$ theo dòng thứ j ta được

$$\begin{aligned} 0 = \det B &= b_{j1}A_{j1} + b_{j2}A_{j2} + \dots + b_{jn}A_{jn} \\ &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là

$$A(P_A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

Tương tự ta cũng có

$$(P_A)A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{bmatrix}$$

Như vậy $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(P_A)$

□

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG MA TRẬN PHỤ HỢP.

- Tính $\det A$
 - Nếu $\det A = 0 \Rightarrow A$ không khả nghịch.
 - Nếu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sang bước tiếp.
- Lập ma trận phụ hợp P_A của A .
- Tính ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(P_A)$

Ví dụ 25 ■ Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

Giải Ta có $\det A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} (\sin \alpha) = -\sin \alpha$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} (-\sin \alpha) = \sin \alpha$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cos \alpha = \cos \alpha$$

Như vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

■

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN.

- Lập ma trận $[A \ I]$
- Thực hiện trên $[A \ I]$ các phép biến đổi sơ cấp dòng đưa ma trận A về dạng bậc thang thu gọn, ta được ma trận $[C \ D]$. Khi đó, nếu $C = I$ thì $D = A^{-1}$ chính là nghịch đảo của A . Nếu $C \neq I$, tức là ta không đưa được ma trận A về I bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng thì A không khả nghịch.