

TRƯỜNG CAO ĐẲNG NGHỀ THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA KINH TẾ

GIÁO TRÌNH
TOÁN KINH TẾ

(Dùng cho sinh viên cao đẳng)

Biên soạn: ThS. Đinh Kông Long

(Lưu hành nội bộ)

Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

1.1. Các bài toán thực tế

1.1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

a) *Ví dụ* Để sản xuất kẹo và bánh cần 2 thứ nguyên liệu chính là đường và bột mì, với trữ lượng hiện có là 0,9kg đường và 1,1 kg bột mì. 1kg kẹo cần 0,5 kg đường và 0,3 kg bột mì; 1kg bánh cần 0,2kg đường và 0,4 kg bột mì.

Giá 1kg kẹo là 10000đ; 1kg bánh là 20000đ. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng giá trị sản phẩm lớn nhất.

Gọi x_1 là số kg kẹo được sản xuất; x_2 là số kg bánh được sản xuất.
Có mô hình toán học:

$$f(x) = 10000x_1 + 20000x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.2x_2 \leq 0.9 \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 \leq 1.1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) *Tổng quát* Để sản xuất n loại sản phẩm khác nhau cần m loại yếu tố sản xuất với trữ lượng hiện có là $b_1, b_2, \dots, b_m$. Hệ số hao phí yếu tố i ($i=1..m$) cho 1 đơn vị sản phẩm j ($j=1..n$) là a_{ij} . Giá 1 đơn vị sản phẩm j là c_j ($j=1..n$). Hãy lập kế hoạch sản xuất trên cơ sở các yếu tố sản xuất hiện có sao cho tổng giá trị sản phẩm lớn nhất.

Gọi x_j là số sản phẩm j được sản xuất,
 $f(x)$ là tổng doanh thu ứng với kế hoạch sản xuất $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Có mô hình toán học:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..n) \end{cases}$$

1.1.2. Bài toán vận tải

Có m kho hàng chứa cùng 1 loại hàng hóa với số lượng ở kho i là a_i ($i=1..m$). Đồng thời có n cửa hàng với nhu cầu ở cửa hàng j là b_j ($j=1..n$). Chi phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ kho i đến cửa hàng j là c_{ij} . Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho thỏa mãn nhu cầu các cửa hàng và chi phí vận chuyển thấp nhất.

Gọi x_{ij} là số lượng hàng chuyển từ kho i đến cửa hàng j

$f(x)$ là tổng chi phí theo kế hoạch vận chuyển x .

Mô hình toán học:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i=1..m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j=1..n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i=1..m, j=1..n) \end{cases}$$

1.1.3. Bài toán xác định khẩu phần

Có n loại thức ăn gia súc, giá 1 đơn vị thức ăn j là c_j ($j=1..n$). Gia súc cần m chất dinh dưỡng với nhu cầu tối thiểu chất i là b_i ($i=1..m$). Biết hàm lượng chất i có trong 1 đơn vị thức ăn j là a_{ij} . Hãy xác định khẩu phần thức ăn cho gia súc sao cho chi phí thấp nhất đồng thời đảm bảo các chất dinh dưỡng cho gia súc.

Gọi x_j là lượng thức ăn j có trong khẩu phần,

$f(x)$ là giá khẩu phần $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Có mô hình toán học sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i=1..m) \\ x_j \geq 0 & (j=1..n) \end{cases}$$

1.2. Bài toán qui hoạch tuyến tính

Xét bài toán

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1..p) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i = p+1..k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = k+1..m) \end{cases}$$

Bài toán (1,2) gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát, ký hiệu là $(\mathcal{D}, f)$.

* $f(x)$ gọi là hàm mục tiêu.

* Hệ (2) gọi là hệ ràng buộc.

* Ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ gọi là ma trận số liệu.

* Vector $C = (c_j)_n$ gọi là hệ số hàm mục tiêu.

Mỗi bộ số $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn hệ ràng buộc (2) gọi là phương án, ký hiệu $x \in \mathcal{D}$.
Phương án làm cho hàm mục tiêu $f(x)$ đạt cực trị cần tìm gọi là phương án tối ưu, hay là nghiệm của bài toán $(\mathcal{D}, f)$.

1.3. Phương pháp hình học

Phương pháp hình học dùng để giải bài toán $(\mathcal{D}, f)$ 2 ẩn, hoặc nhiều hơn 2 ẩn nhưng có thể đưa về bài toán 2 ẩn tương đương.

Xét bài toán

$$f(x) = ax + by \rightarrow \min (\max)$$

$$(\mathcal{D}) \quad \{a_i x + b_i y \leq c_i \quad (i = 1..m)\}$$

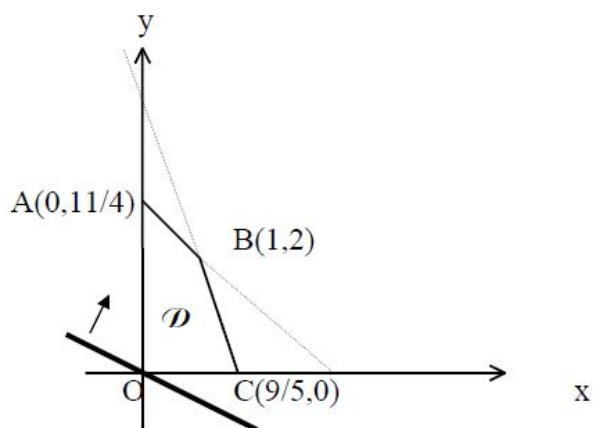
Miền $\mathcal{D}$ là giao các nửa mặt phẳng, hay là một đa giác. Bài toán có thể phát biểu bằng hình học như sau:

Tìm trong họ đường thẳng song song $ax + by = f$ gọi là họ đường mức, một đường mức ứng với f nhỏ nhất (lớn nhất) có ít nhất 1 điểm chung với miền $\mathcal{D}$.

Ví dụ 1.1

$$f(x, y) = x + 2y \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 9 \\ 3x + 4y \leq 11 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Qua hình vẽ thấy đường thẳng qua $A(0, \frac{11}{4})$ ứng với f lớn nhất. Vậy nghiệm là $x_1=0$,

$$x_2=\frac{11}{4} \text{ và } f_{\max} = \frac{11}{2}.$$

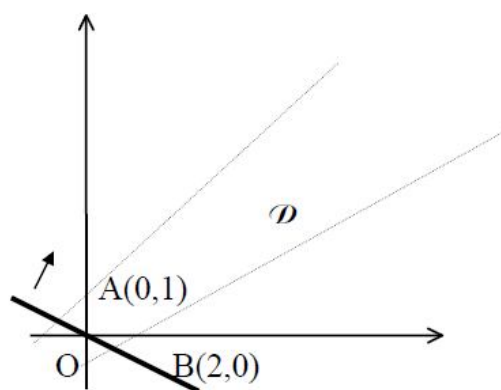
Nhận xét

- Nghiệm là đỉnh của đa giác.
- Nếu hàm mục tiêu là $f(x,y) = 3x + 4y$ thì nghiệm là cả đoạn thẳng AB.
- Giá trị f của họ đường mức tăng theo chiều của pháp vectơ.

Ví dụ 1.2

$$f(x,y) = x + y \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Theo hình vẽ, hàm mục tiêu không bị chặn trên trong miền D nên bài toán vô nghiệm.

1.4. Bài tập

Giải các bài toán sau bằng phương pháp hình học

1. $f(x) = x + 2y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = 5x - 3y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = 3x + y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x + y \geq 6 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x + 3y + 10 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

5. $f(x) = 2x + 5y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

6. $f(x) = x + 3y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

7. $f(x) = x + 2y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

8. $f(x) = 2x + 3y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 3x + y \geq 6 \\ 3x + 4y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

9. $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

10. $f(x) = 2x_1 + x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.1. Dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc

2.1.1. Định nghĩa

Trong thực tế, đa số các bài toán có điều kiện không âm của các ẩn. Từ đó có định nghĩa dạng chính tắc là bài toán $(\mathcal{D}, f)$ như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1..n) \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

(2) gọi là ràng buộc cưỡng bức, (3) gọi là ràng buộc tự nhiên.

Với bài toán $(\mathcal{D}, f)$ chính tắc, có thể giả sử $m \leq n$.

Một trường hợp đặc biệt của dạng chính tắc là ma trận số liệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$ có chứa đủ m vector cột là m vector đơn vị của không gian R^m và $b_i \geq 0$ ($i = 1..m$) gọi là dạng chuẩn tắc. Không mất tính tổng quát, có thể định nghĩa bài toán $(\mathcal{D}, f)$ chuẩn tắc như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1..n) \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0$ ($i = 1..m$).

2.1.2. Các phép biến đổi

Các phép biến đổi sau để đưa bài toán $(\mathcal{D}, f)$ bất kỳ về dạng chính tắc tương đương để giải, và từ đó suy ra nghiệm của bài toán ban đầu.

$$a/ \quad f(x) \rightarrow \max \Leftrightarrow g(x) = -f(x) \rightarrow \min$$

$$b/ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \text{ với } x_{n+i} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \text{ với } x_{n+i} \geq 0$$

x_{n+i} gọi là ẩn phụ. Có kết luận sau:

Nếu $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ là nghiệm của bài toán chính tắc biến đổi thì $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm bài toán gốc.

c/ Nếu ẩn x_j không ràng buộc về dấu thì được thay bằng hiệu hai ẩn không âm. Nghĩa là đặt $x_j = x_j' - x_j''$ với $x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$.

d/ Trường hợp $b_i < 0$ thì nhân hai vế phương trình cho -1 có được $b_i > 0$.

Vậy: Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về bài toán dạng chính tắc tương đương. Hơn nữa có thể các hệ số tự do b_i trong hệ ràng buộc là không âm.

2.1.3. Phương án cơ bản

Xét bài toán $(\mathcal{D}, f)$ dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1..n) \end{cases}$$

Đặt $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ là vector cột thứ j trong ma trận $A_{m \times n}$
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ là cột hệ số tự do.

Giả sử $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là phương án của bài toán thì hệ vector $\{ A_j / \bar{x}_j > 0 \}$ gọi là hệ vector liên kết với phương án x .

Định nghĩa

$x \in \mathcal{D}$ là phương án cơ bản nếu hệ vector liên kết với x độc lập tuyến tính.
 Ẩn x_j gọi là ẩn cơ bản nếu $\bar{x}_j > 0$.

Nhận xét:

- Phương án cơ bản có tối đa m thành phần dương.
 Phương án cơ bản có đúng m thành phần dương gọi là không suy biến. Ngược lại gọi là suy biến. Bài toán có phương án cơ bản suy biến gọi là bài toán suy biến.
- Số phương án cơ bản của một bài toán $(\mathcal{D}, f)$ là hữu hạn.
- Với bài toán dạng chuẩn tắc thì có phương án cơ bản là $x^0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$.

2.1.4. Các tính chất

Tính chất 1 Bài toán $(\mathcal{D}, f)$ chỉ xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

- a) Vô nghiệm b) Có 1 nghiệm duy nhất c) Vô số nghiệm.

Tính chất 2 Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ là chặn dưới (trên) đối với bài toán dạng $\min$ ($\max$) trên tập phương án $\mathcal{D}$ thì bài toán $(\mathcal{D}, f)$ có nghiệm.

Tính chất 3 Nếu bài toán $(\mathcal{D}, f)$ có nghiệm thì có nghiệm là phương án cơ bản.

2.2. Phương pháp đơn hình

2.2.1. Nội dung

Xuất phát từ phương án cơ bản nào đó, tìm cách đánh giá nó. Nếu chưa tối ưu thì chuyển sang phương án cơ bản mới tốt hơn. Nếu bài toán có nghiệm thì sau hữu hạn bước sẽ tìm được phương án cơ bản tối ưu. Hơn nữa dấu hiệu vô nghiệm cũng được thể hiện trên thuật toán.

Ví dụ 2.1 Xét bài toán $(\mathcal{D}, f)$ dạng chuẩn tắc:

$$\begin{aligned} f(x) = & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..4) \end{cases} \end{aligned}$$

Có phương án cơ bản $x^0 = (0, 0, 4, 5)$ và $f(x^0) = 2$ với x_3, x_4 là ẩn cơ bản.

Đánh giá:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{D} :$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 5 - x_1 - x_2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ &= x_1 - 2x_2 + 3(4 - 2x_1 + 3x_2) - 2(5 - x_1 - x_2) \\ &= 2 - 3x_1 + 9x_2 \\ &= 2 - \Delta_1 x_1 - \Delta_2 x_2 \end{aligned}$$

Vì $x_1, x_2 \geq 0$ nên nếu $\Delta_1, \Delta_2 \leq 0$ thì $f(x) \geq 2$ và x^0 là phương án tối ưu. Tuy nhiên, ở đây $\Delta_1 = 3 > 0$ nên x^0 chưa phải là nghiệm.

Thử chọn x_1, x_4 làm ẩn cơ bản, cho $x_2 = 0$ và $x_3 = 0$. Có

$$\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ và } x_4 = 3.$$

Rõ ràng A_1, A_4 độc lập tuyến tính nên có phương án cơ bản là $\bar{x} = (2, 0, 0, 3)$

và $f(\bar{x}) = -4$.

Đánh giá:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{D} :$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 3 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ &= (2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3) - 2x_2 + 3x_3 - 2(3 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) \\ &= -4 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 (= -4 - \Delta_2x_2 - \Delta_3x_3) \\ &\geq -4 \end{aligned}$$

Vì $x_2, x_3 \geq 0$ nên $\bar{x}$ là phương án tối ưu ($\Delta_2, \Delta_3 \leq 0$).

2.2.2. Bảng đơn hình

Cho bài toán $(\mathcal{D}, f)$ chuẩn tắc:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \\ &\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1..m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1..n) \end{cases} \end{aligned}$$

trong đó $b_i \geq 0 \quad (i=1..m)$.

$\forall j=1..n$ đặt $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$ và gọi là ước lượng của ẩn x_j đối với phương án cơ bản

$x^0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ với $f(x_0) = \sum_{i=1}^m c_i b_i$

Lưu ý: $\Delta_i = 0, \forall i=1..m$

Có bảng đơn hình sau:

Hệ số	Ẩn CB	P/Ẩn	x_1 c_1	x_2 c_2	...	x_m c_m	x_{m+1} c_{m+1}	...	x_s c_s	...	x_n c_n
c_1	x_1	$\mathbf{b_1}$	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	a_{1s}	...	a_{1n}
c_2	x_2	$\mathbf{b_2}$	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2s}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	
c_r	x_r	$\mathbf{b_r}$	0	0	...	0	$a_{r,m+1}$	...	a_{rs}	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	
c_m	x_m	$\mathbf{b_m}$	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{ms}	...	a_{mn}
		$f(x)$	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_s		Δ_n