

TRƯỜNG CAO ĐẲNG NGHỀ SỐ 8
KHOA TÀI CHÍNH KẾ TOÁN



Thạc sỹ Đinh Hữu Sỹ - CN Bùi Ngọc Giang



GIÁO TRÌNH
TOÁN KINH TẾ

LƯU HÀNH NỘI BỘ
NĂM 2010
LỜI NÓI ĐẦU

Ngày 12/01/2007, Bộ trưởng Bộ Lao động – TBXH đã ra Quyết định nâng cấp Trường Dạy nghề số 8/BQP thành Trường Cao đẳng nghề số 8/BQP. Từ đó đến nay, Nhà trường đã đào tạo được nhiều khóa học trình độ Cao đẳng nghề, đáp ứng được một phần nhu cầu học nghề của các đối tượng chính sách, xã hội và con em nhân dân trong khu vực địa bàn, góp phần vào sự nghiệp CNH, HĐH đất nước.

Trên cơ sở các tài liệu trong và ngoài nước, Nhà trường đã tổ chức biên soạn nhiều giáo trình phục vụ cho sinh viên học tập.

Cuốn tài liệu này dành cho các đối tượng học nghề Cao đẳng Kế toán Doanh nghiệp và Quản trị Doanh nghiệp. Nó cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho các đối tượng học nghề khác.

Giáo trình gồm có 4 chương:

Chương 1: Đại số tuyến tính

Chương 2: Phương pháp đơn hình và bài toán đối ngẫu

Chương 3: Bài toán vận tải

Chương 4: Lý thuyết xác suất

Các chương 1,2,3 do tác giả CN Bùi Ngọc Giang biên soạn, chương 4 do tác giả Ths Đinh Hữu Sỹ biên soạn.

Vì thời gian và trình độ của các tác giả còn hạn chế, nên chắc chắn không thể tránh khỏi sai sót. Tác giả mong muốn bạn đọc cảm thông và đóng góp ý kiến để chúng tôi tiếp tục chỉnh sửa, hoàn thiện.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Bộ môn Toán Kinh tế, Khoa Tài chính Kế toán – Trường Cao đẳng nghề số 8/BQP, đường Bùi Văn Hòa, Phường Long Bình Tân, Tp Biên Hòa, Đồng Nai.

Trân trọng cảm ơn!

CHƯƠNG I : ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1.1. KHÔNG GIAN VEC TƠ VÀ CÁC PHÉP TÍNH

1.1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ VEC TƠ :

1.1.1.1. Định nghĩa véc tơ: Một bộ n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là *véc tơ n chiều*, ký hiệu là $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Mỗi số thực a_i được gọi là thành phần thứ i của véc tơ A .

- Véc tơ được biểu diễn dưới dạng cột, gọi là véc tơ cột.

- Véc tơ được biểu diễn dưới dạng dòng (hàng), gọi là véc tơ cột dòng (hàng).

1.1.1.2. Định nghĩa véc tơ đơn vị: Véc tơ chỉ có duy nhất một thành phần thứ i bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0 được gọi là *véc tơ đơn vị n chiều thứ i* ,

ký hiệu là : $E_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\text{thứ } i}{1}, 0, \dots, 0)$

1.1.1.3. Định nghĩa véc tơ không : Một véc tơ có tất cả n thành phần bằng 0, được gọi là *véc tơ không n chiều*, ký hiệu là : $O = (\underset{n \text{ số}}{0, 0, \dots, 0})$

1.1.1.4. Định nghĩa véc tơ đối: Véc tơ n chiều $-A = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ được gọi là *véc tơ đối* của véc tơ n chiều $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

1.1.2. CÁC PHÉP TÍNH VEC TƠ :

1.1.2.1 . Phép cộng véc tơ:

Cho hai véc tơ $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Khi đó tổng hai véc tơ A và B là một véc tơ được xác định và được ký hiệu là :

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

1.1.2.2 . Phép nhân véc tơ với một số thực :

Cho véc tơ A và số thực λ , khi đó tích của số thực λ và véc tơ A là một *véc tơ* được xác định và ký hiệu là : $\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$

1.1.2.3. Tích vô hướng của hai véc tơ :

Cho hai véc tơ cùng chiều A và B , khi đó tích vô hướng của hai véc tơ là một *số thực* được xác định và ký hiệu là :

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = (a_1 b_1 \quad a_2 b_2 \quad \dots \quad a_n b_n).$$

Chú ý: Phép cộng hai véc tơ và phép nhân véc tơ với một số thực, đều cho ta một véc tơ mới. Còn tích vô hướng giữa hai véc tơ lại là một số thực.

1.1.2.4 . Các tính chất cơ bản:

Với X, Y, Z là các véc tơ cùng chiều và α, β là các số thực ta có :

- | | |
|--|---|
| Tính chất 1. $X + Y = Y + X$ | Tính chất 2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ |
| Tính chất 3. $X + O = X$ | Tính chất 4. $X + (-X) = O$ |
| Tính chất 5. $1 \cdot X = X$ | Tính chất 6. $(\alpha \cdot \beta) \cdot X = \alpha \cdot (\beta \cdot X)$ |
| Tính chất 7. $(\alpha + \beta) \cdot X = \alpha \cdot X + \beta \cdot X$ | Tính chất 8. $(\alpha + \beta) \cdot (X + Y) = \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y + \beta \cdot X + \beta \cdot Y$ |

5

1.2. MA TRẬN

1.2.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN.

1.2.1.1. Định nghĩa tổng quát :

Một bộ gồm $m \times n$ số thực được sắp thành m dòng n cột như sau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận cấp $m \times n$, mỗi số trong bảng, gọi là một phần tử của ma trận, phần tử a_{ij} nằm trên dòng thứ i và cột thứ j . ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

+ Véc tơ dòng thứ i : $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

+ Véc tơ cột thứ j : $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

+ Ma trận mà mọi phần tử đều bằng 0, gọi là **ma trận không**

1.2.1.2. Ma trận vuông :

Ma trận cấp $n \times n$ (số dòng bằng số cột), gọi là **ma trận vuông cấp n**

+ Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo chính (các phần tử có chỉ số dòng bằng chỉ số cột).

+ Các phần tử $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ được gọi là các phần tử nằm trên đường chéo phụ (các phần tử có chỉ số dòng cộng chỉ số cột bằng $n + 1$).

1.2.1.3. Ma trận tam giác :

Ma trận vuông có các phần tử nằm về một phía của đường chéo chính đều bằng 0,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là **ma trận tam giác trên** (dưới).

1.2.1.4. Ma trận đường chéo :

Ma trận vuông có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{gọi là ma trận đường chéo}$$

1.2.1.5. Ma trận đơn vị :

Ma trận đường chéo có các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gọi là ma trận đơn vị.}$$

1.2.1.6. Ma trận chuyển vị :

Nếu ta đổi tất cả các dòng của ma trận $A = a_{ij} \text{ }_{m \times n}$ thành các cột tương ứng và các cột đổi thành các dòng thì ta được một ma trận mới ,gọi là *ma trận chuyển vị* của ma trận A ,ký hiệu là : $A^c = a_{ij} \text{ }_{n \times m}$

Ví dụ :

$$\begin{aligned} \text{Cho ma trận } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ma trận chuyển vị } A^c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2.1.7. Các phép biến đổi sơ cấp :

- * Đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) bất kỳ cho nhau và giữ nguyên những dòng còn lại.
- * Nhân 1 số với 1 dòng (hoặc 1 cột) rồi cộng vào 1 dòng (hoặc 1 cột) khác.
- * Nhân 1 số khác không với một dòng (hoặc một cột) bất kỳ, và giữ nguyên những dòng còn lại.

1.2.2. CÁC PHÉP TÍNH VỀ MA TRẬN

1.2.2.1. Phép cộng hai ma trận :

Cho hai ma trận cùng cấp $A = a_{ij} \text{ }_{m \times n}$ và $B = b_{ij} \text{ }_{m \times n}$.

Tổng của hai ma trận A và B là *một ma trận cùng cấp* mà mỗi phần tử của nó là tổng của hai phần tử tương ứng của hai ma trận A và B ,

ký hiệu như là : $A + B = a_{ij} \text{ }_{m \times n} + b_{ij} \text{ }_{m \times n}$

$$A + B = a_{ij} \text{ }_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \dots & a_{1n} & b_{1n} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} & \dots & a_{2n} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_{m1} & a_{m2} & b_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

1.2.2.2. Phép nhân ma trận với một số thực:

Tích của ma trận A và số thực, là một ma trận cùng cấp mà mỗi phần tử của nó đều được nhân với số thực, được ký hiệu là :

$$A \cdot a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.2.3. Phép nhân hai ma trận :

Tích của hai ma trận $A = a_{ij}$ và $B = b_{ij}$ (số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng của ma trận đứng sau) theo thứ tự A trước B sau, là một ma trận được xác định và ký hiệu là :

$$A \times B = C = c_{ij} \text{ với :}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

ta nhận thấy rằng số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B do vậy ta có thể thực hiện được tích $A \times B$ (A đứng trước, B đứng sau).

Các phần tử của ma trận tích $C = A \times B$ được xác định như sau :

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1.1 + (-1).(-2) = 2; & c_{21} &= 2.1 + 1.(-2) = 0; & c_{31} &= (-1).1 + 3.(-2) = -7; \\ c_{12} &= 1.3 + (-1).5 = -2; & c_{22} &= 2.3 + 1.5 = 11; & c_{32} &= (-1).3 + 3.5 = 12; \\ c_{13} &= 1.5 + (-1).9 = -4; & c_{23} &= 2.5 + 1.9 = 19; & c_{33} &= (-1).5 + 3.9 = 22; \\ c_{14} &= 1.(-6) + (-1).2 = -8; & c_{24} &= 2.(-6) + 1.2 = -10; & c_{34} &= (-1).(-6) + 3.2 = 12 \end{aligned}$$

Vậy ta có ma trận :

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 11 & 19 & 10 \\ 7 & 12 & 22 & 12 \end{pmatrix}$$

Nhận xét :

- Số cột của ma trận B không bằng số dòng của ma trận A do vậy ta không thể thực hiện được tích $B \times A$.
- Điều kiện để có tích $A \times B$ là số cột của ma trận A phải đúng bằng số dòng của ma trận B.
- Ma trận tích có số dòng bằng số dòng của ma trận đứng trước, số cột bằng số cột của ma trận đứng sau.
- Phép nhân hai ma trận không có tính giao hoán, có $A \times B$ nhưng chưa chắc có $B \times A$.

1.3. ĐỊNH THỨC

1.3.1. CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC CẤP 2 VÀ CẤP 3

1.3.1.1. Định thức cấp hai :

Cho ma trận vuông cấp hai $A = a_{i,j} \ 2 \times 2$ khi đó định thức cấp hai của ma trận A là một số thực được xác định và ký hiệu là :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ví dụ: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.(-2) = 5 + 6 = 11$

1.3.1.2. Định thức cấp ba :

Cho ma trận vuông cấp ba $A = a_{i,j} \ 3 \times 3$ khi đó định thức cấp ba của ma trận A là một số thực được xác định và ký hiệu là :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Có thể nhớ cách tính theo lược đồ sau :

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} & \text{Hoặc lược đồ} & \begin{matrix} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \end{array}$$

Ví dụ:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2).5.(-4) + 0.1.4 + (-1).3.3 - 3.5.4 - 0.(-1).(-4) - 1.3.(-2) = -23$$

1.3.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC.

Tính chất 1: Định thức của ma trận vuông bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Tính chất 2 : Nếu đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) bất kỳ và giữ nguyên những dòng còn lại thì định thức đổi dấu .

Ví dụ :
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Tính chất 3: Nhân 1 số (0) vào một dòng (hoặc cột) bất kỳ ,thì định thức mới bằng định thức cũ nhân với số đó.

Ví dụ :

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

Như vậy ta thấy theo tính chất này ,một dòng (hoặc cột) nào đó có thừa số chung ta có thể đưa ra ngoài dấu định thức .

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Tính chất 4: Nhân 1 số với 1 dòng (hoặc 1 cột) rồi cộng vào 1 dòng (hoặc 1 cột) khác, thì định thức sẽ không thay đổi

Ví dụ : nhân dòng 3 với -3 rồi cộng vào dòng 1 ta được :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Tính chất 5: Nếu định thức có một dòng (hoặc 1 cột) toàn phần tử không, thì định thức bằng 0

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tính chất 6: Nếu định thức có 2 dòng (hoặc 2 cột) bằng nhau hoặc tỷ lệ với nhau, thì định thức bằng 0.

Ví dụ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 1.2.6 + (-5).(-6).2 + 1.(-10).3 - 2.2.3 - 1.(-5).6 - 1.(-10).(-6) = 0$$

Định thức trên có dòng 3 gấp đôi dòng 1.

Nhân xét :

- Các tính chất 2 ; 3 ; 4 cũng chính là ba phép biến đổi sơ cấp trên ma trận mà ta đã biết ở phần trước.Cần chú ý sự khác nhau khi áp dụng với ma trận và với định thức.

Giáo trình môn Toán kinh tế dùng cho sinh viên hệ cao đẳng nghề

1.3.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC.

1.3.3.1. Phương pháp khai triển

1.3.3.1.1. Định thức con và phần bù đại số :

Cho định thức $|A|$ cấp n , xét phần tử a_{ij} , nếu ta bỏ bớt đi dòng i và cột j thì ta được định thức con $|A_{ij}|$ cấp $n-1$.

$$\text{Biểu thức : } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$)

1.3.3.1.2. Công thức khai triển : Cho định thức $|A|$,

Nếu khai triển theo dòng i thì ta có : $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$

Nếu khai triển theo cột j thì ta có : $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$

Ví dụ : Tính định thức $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Ta triển khai theo dòng 2 ta có :

$$|A| = -2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) - (-6 - 2) = 12$$

1.3.3.2. Phương pháp biến đổi đưa định thức về dạng tam giác :

Định lý : Định thức của ma trận tam giác bằng tích của các phần tử nằm trên chéo chính.

Từ định lý trên, để tính một định thức ta có thể biến đổi ma trận về dạng tam giác nhằm giảm bớt khối lượng tính toán.

Ví dụ : Tính định thức : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Giải : Nhân -2 với dòng 1, cộng vào dòng 2, Nhân 3 với dòng 1 cộng vào dòng 4, giữ nguyên các dòng còn lại ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Nhân -1 với dòng 2 cộng vào dòng 3, nhân 9 với dòng 2 cộng vào dòng 4 giữ nguyên các dòng

$$\text{còn lại ta có : } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 46 \end{vmatrix}$$

đổi chỗ dòng 3 và dòng 4 (định thức đổi dấu) ta có :

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = - \{ 1 \cdot (-1) \cdot 8 \cdot 7 \} = 56$$

1.4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.4.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.4.1.1. Ma trận nghịch đảo :

Trong chương trình toán phổ thông, với một số thực bất kỳ a (khác không) khi nhân với nghịch đảo của nó $\frac{1}{a}$ luôn bằng 1 (đơn vị).

Ma trận nghịch đảo được xây dựng trên cơ sở đó.

Định nghĩa : Cho ma trận A vuông cấp n , nếu tồn tại một ma trận X cấp n sao cho : $AX = XA = E$ (E là ma trận đơn vị cấp n), thì ma trận X được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A , ký hiệu là A^{-1}

1.4.1.2. Ma trận phụ hợp :

Định nghĩa : Cho ma trận A vuông cấp n , ma trận $\bar{A}$ cấp n được gọi là ma trận phụ hợp ma trận A , được xác định như sau :

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{Trong đó } A_{ij} \text{ là phần bù đại số của phần tử } a_{ij}, \text{ đồng thời}$$

là phần tử nằm trên cột thứ i dòng thứ j của ma trận $\bar{A}$

$$\text{Ví dụ : Cho ma trận } A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ tìm ma trận phụ hợp } \bar{A}$$

Tính A_{ij} - phần bù đại số của các phần tử a_{ij}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

phần bù đại số của các phần tử a_{ij} được ghi vào cột i dòng j trong ma trận $\bar{A}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

TaiLieu.vn

1.4.2. PHƯƠNG PHÁP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.4.2.1. Tìm ma trận nghịch đảo dựa vào ma trận phụ hợp :

Định lý : Ma trận vuông cấp n có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi định thức cấp n của nó khác không .

Công thức tính ma trận nghịch đảo : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \overline{A}$. với $|A| \neq 0$

Dựa vào định lý trên, để tìm ma trận nghịch đảo, ta phải tìm ma trận phụ hợp và định thức của nó rồi thay vào công thức trên.

Ví dụ : Tiếp theo ví dụ trên ta có : $|A| = 1.0 + 1.3 + (-1).(-3) = 6 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.4.2.2. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp GAUSS(khử toàn phần) :

Cho ma trận A với $|A| \neq 0$, và ma trận đơn vị E .

Lập ma trận ghép (A/E) , nhân ma trận A^{-1} vào bên trái ma trận ghép ta được

$$A^{-1} \cdot (A/E) = (A^{-1} A / A^{-1} E) = (E / A^{-1}) .$$

Như vậy từ ma trận ghép (A/E) ta biến đổi ma trận bên trái (ma trận A) trở thành ma trận E , thì ma trận bên phải (ma trận E) biến đổi theo sẽ là A^{-1}

Ví dụ :

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tìm ma trận A^{-1} :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} = \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

$$\text{Vậy ta có } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.5.1. CÁC DẠNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.5.1.1. Dạng tổng quát :

Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ có dạng.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n & b_m \end{array} \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

a_{ij} - gọi là hệ số của các ẩn, b_j - gọi là hệ số tự do. ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$)

1.5.1.2. Dạng ma trận .

Hệ phương trình tuyến tính được viết dưới dạng ma trận là : $AX = B$.

$$\text{Trong đó } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ma trận các hệ số của phương trình.}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ma trận cấp } n \times 1; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ ma trận cấp } m \times 1$$

1.5.1.3. HỆ CRAMER.

Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và định thức của ma trận hệ số khác 0 được gọi là hệ CRAMER.

Hệ Cramer với n phương trình, n ẩn có dạng.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \dots & a_{nn}x_n & b_n \end{array}$$

Trong đó ma trận hệ số A có định thức $|A| \neq 0$.

1.5.1.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n & 0 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \dots & a_{nn}x_n & 0 \end{array}$$

Dễ nhận thấy rằng $X^0 = (0, 0, \dots, 0)$ là nghiệm của hệ.

Người ta gọi nghiệm $X^0 = (0, 0, \dots, 0)$ là nghiệm tầm thường.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm tầm thường.

1.5.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

1.5.2.1. Phương pháp CRAMER.

Định lý : Cho hệ phương trình $AX = B$,
khi đó nghiệm của hệ được xác định theo công thức.

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = \overline{1, n}). (*)$$

* Nếu $D \neq 0$ Hệ phương trình có duy nhất nghiệm (*).

* Nếu $D = 0$ và $D_j = 0 \quad \forall j$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

* Nếu $D = 0$ và trong các D_j tồn tại ít nhất một $D_j \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Trong đó $D = |A|$ là định thức của ma trận hệ số.

D_j là định thức suy ra từ định thức D ,bằng cách thay véc tơ cột j của định thức D bởi véc tơ cột số hạng tự do B .

Ví dụ : Giải hệ phương trình.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 6 \\ 2x_1 & x_2 & x_3 & 3 \\ x_1 & x_2 & 2x_3 & 5 \end{array} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (3.3 - 2.2) = -(9 - 4) = -5$$
$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 2 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (9.3 - 11.2) = -27 + 22 = -5$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} [(-9).1 - (-1).(-1)] = -9 - 1 = -10$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (3.11 - 2.9) = -33 + 18 = -15.$$
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-15}{-5} = 3$$

Nghiệm duy nhất của hệ là $X^* = (1, 2, 3)$

1.5.2.2. Phương pháp khử ẩn liên tiếp (Phương pháp GAUSS)

Ví dụ 2.2.1. Giải hệ phương trình.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & 6 \\ 2x_1 & x_2 & x_3 & 3 \\ x_1 & x_2 & 2x_3 & 5 \end{array}$$

Giải : Ta dùng phép biến đổi đối với ma trận ghép như sau

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Đến đây hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{array}{rcl} x_1 & x_2 & x_3 & 6 \\ x_2 & \frac{1}{3}x_3 & & 3 \\ \frac{5}{3}x_3 & & & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & & & 1 \\ x_2 & & & 2 \\ x_3 & & & 3 \end{array}$$

Vậy hệ có nghiệm là $X^* = (1, 2, 3)$

Ví dụ 2.2.2. Giải hệ phương trình.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & 2x_2 & 3x_3 & x_4 & 2x_5 & 0 \\ 3x_1 & x_2 & x_3 & 2x_4 & 4x_5 & 0 \\ 2x_1 & 4x_2 & 6x_3 & 6x_4 & 8x_5 & 0 \\ 2x_1 & 7x_2 & 4x_3 & 5x_4 & 6x_5 & 0 \\ 4x_1 & 5x_2 & 2x_3 & 9x_4 & 14x_5 & 0 \end{array}$$

Giải :

$$A = \begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 & 10 & 5 & 10 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 0 & 8 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 16 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 0 & 3 & 10 & 3 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 9 & 14 & 0 & 13 & 10 & 13 & 22 & 0 & 0 & 16 & 0 & 4 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -3 & 1 & -2 & & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & x_2 & 3x_3 & x_4 & 2x_5 & 0 \\ \text{ta có hệ} & x_2 & 2x_3 & x_4 & 2x_5 & 0 \\ & 4x_3 & x_5 & & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & x_4 & \frac{7}{4}x_5 \\ x_2 & x_4 & \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 & & \frac{1}{4}x_5 \end{array}$$

Với mỗi giá trị x_4, x_5 tùy ý, ta có một nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình trên có vô số nghiệm.

1.5.2.3. Phương pháp dùng ma trận nghịch đảo

Từ hệ phương trình dạng $AX = B$, ta nhân vào bên trái từng vế với A^{-1} ta có :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad EX = A^{-1}B \quad X = A^{-1}B$$

Ví dụ : Giải hệ phương trình bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & x_2 & x_3 & 6 \\ 2x_1 & x_2 & x_3 & 3 \\ x_1 & x_2 & 2x_3 & 5 \end{array}$$

Giải: Tính $\det(A) = -5 \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1} .
 Tính $\bar{A}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 10 \\ 18 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vậy véc tơ $X = (1, 2, 3)$ là véc tơ nghiệm của hệ phương trình

Nhận xét:

- Phương pháp ma trận nghịch đảo và Cramer chỉ dùng để giải các hệ phương trình có số phương trình bằng số ẩn.
- Phương pháp Gauss dùng để giải các hệ phương trình có số phương trình không nhất thiết bằng số ẩn.
- Để xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của một hệ véc tơ, theo định nghĩa ta phải đi tìm các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ làm thỏa mãn đẳng thức $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0$. Điều này đồng nghĩa với việc giải hệ phương trình thuần

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \dots + \alpha_n \alpha_n &= 0 \\ \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \dots + \alpha_n \alpha_n &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_m \alpha_1 + \alpha_m \alpha_2 + \dots + \alpha_m \alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

Với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là ẩn. Ta đã biết hệ phương trình thuần nhất bao giờ cũng có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

* Nếu nghiệm tầm thường là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thuần nhất, thì ta kết luận hệ véc tơ đã cho độc lập tuyến tính.

* Ngược lại nghiệm tầm thường không phải là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thuần nhất thì hệ véc tơ đã cho là phụ thuộc tuyến tính

Trường hợp số véc tơ của hệ bằng số chiều của véc tơ, khi đó hệ phương trình tương ứng có dạng CRAME.

Theo CRAME nếu định thức $D \neq 0$ nghiệm tầm thường là duy nhất hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Nếu định thức $D = 0$ nghiệm tầm thường là không duy nhất hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 1: Xét hệ 3 véc tơ $X_1 = (1, 2, 3)$; $X_2 = (2, -1, 0)$; $X_3 = (3, -4, 5)$.

Ta có hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -24 + 30 + 9 + 20 = 35 \neq 0$$

hệ phương trình có duy nhất nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ Hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2: Xét hệ 3 véc tơ 4 chiều

$X_1 = (1, 2, 3, -1)$; $X_2 = (2, -1, 1, -2)$; $X_3 = (3, -4, -5, 1)$.

Ta có hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có hệ phương trình $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$
 $-5\alpha_2 - 10\alpha_3 = 0$
 $4\alpha_3 = 0$

duy nhất của hệ phương trình Hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 3: Xét hệ 4 véc tơ 3 chiều

$X_1 = (1, 2, 3)$; $X_2 = (2, -1, -4)$; $X_3 = (3, 1, -5)$; $X_4 = (-1, -2, 1)$.

Ta có hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 &= 0 \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_2 - 5\alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có hệ phương trình $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \alpha_4 = 0$
 $-5\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$
 $-4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$
 $\alpha_1 = -2\alpha_3 + 3\alpha_3 - \alpha_3$
 $\alpha_2 = -\alpha_3$
 $\alpha_4 = \alpha_3$

$$\alpha_1 = -2\alpha_3 + 3\alpha_3 - \alpha_3 \quad \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -\alpha_3 \quad \alpha_2 = -\alpha_3 \quad \alpha_3 \text{ là ẩn tự do có thể nhận bất kỳ giá trị nào với}$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 \quad \alpha_4 = \alpha_3$$

$\alpha_3 = 1$ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_4 = 1$ Hệ phương trình có nghiệm $(0, -1, 1, 1)$ Hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Chú ý: - Mọi hệ véc tơ độc lập tuyến tính đều có số véc tơ nhỏ hơn hoặc bằng số chiều của véc tơ.

- Mọi hệ véc tơ có số véc tơ lớn hơn số chiều của véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính.

- Điều ngược lại chưa chắc đúng.

BÀI TẬP CHƯƠNG I:

1.1. Thực hiện các phép tính nhân ma trận.

$$1.1.1. \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$1.1.3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.1.2. \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 5 & 6 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1.1.4. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Tính x_1, x_2, x_3 biết rằng :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.3. Tính các định thức sau :

$$1.3.1. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.3.2. \begin{vmatrix} 9 & 2 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

1.4. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau :

$$1.4.1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.4.2. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.4.3. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1.4.4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau :

$$1.5.1. \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$1.5.2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$$