

LỜI NÓI ĐẦU

Học phần Xử lý số tín hiệu được xem là học phần nền tảng của ngành Điện tử, vì vậy việc biên soạn giáo trình là rất cần thiết nhằm phục vụ hiệu quả việc đào tạo nguồn nhân lực cũng như trang bị cho sinh viên những kiến thức về một số tín hiệu trong hệ thống, cách xử lý tín hiệu ở các miền biến số, các bộ lọc số.... Giáo trình được dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên các ngành Công nghệ kỹ thuật Điện - Điện tử, Công nghệ kỹ thuật Điện tử truyền thông, Công nghệ kỹ thuật Tự động hóa. Giáo trình bám sát chương trình đào tạo của trường Đại học sư phạm kỹ thuật Vĩnh Long nhằm giúp cho sinh viên đạt được các mục tiêu của học phần. Đảm bảo chuẩn kiến thức, kỹ năng và chuẩn đầu ra đã ban hành.

Nội dung giáo trình bao gồm 7 chương:

- Chương 1: Tổng quan về xử lý số tín hiệu.
- Chương 2: Biểu diễn, phân tích tín hiệu rời rạc và hệ thống rời rạc trong miền thời gian.
- Chương 3: Biểu diễn và phân tích hệ thống rời rạc trong miền Z.
- Chương 4: Phân tích tần số của tín hiệu rời rạc.
- Chương 5: Biểu diễn và phân tích hệ thống rời rạc trong miền tần số.
- Chương 6: Thiết kế bộ lọc FIR.
- Chương 7: Thiết kế bộ lọc IIR.

Để học tốt học phần này, Sinh viên cần có kiến thức về toán học.

Ngoài ra giáo trình này còn giúp các Giảng viên thống nhất nội dung giảng dạy học phần Xử lý số tín hiệu, làm cơ sở để xây dựng ngân hàng đề thi chung.

Khi biên soạn, chúng tôi đã tham khảo các giáo trình và tài liệu giảng dạy học phần này của một số trường đại học trong và ngoài nước để giáo trình vừa đạt yêu cầu về nội dung vừa thích hợp với đối tượng là sinh viên của trường Đại học sư phạm kỹ thuật Vĩnh Long. Trong quá trình biên soạn, chúng tôi nhận được sự đóng góp ý kiến rất quý báu và sự hỗ trợ của các đồng nghiệp trong khoa Điện – Điện tử và một số đồng nghiệp khác.

Mặc dù đã hết sức cố gắng để giáo trình được hoàn chỉnh, song chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Nhóm biên soạn rất mong nhận được sự góp ý của độc giả.

Biên soạn

CHƯƠNG 1: MỞ ĐẦU

1.1 Một số khái niệm cơ bản

1.1.1 Tín hiệu – Tín hiệu số

a. Định nghĩa tín hiệu

Tín hiệu là biểu diễn vật lý của thông tin

Ví dụ:

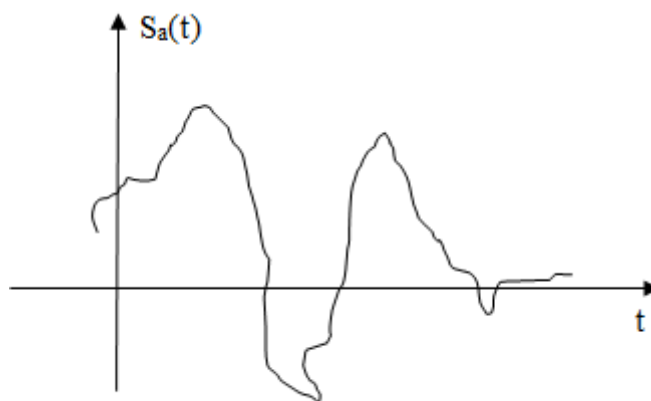
- Tín hiệu nhìn thấy: các sóng ánh sáng mang thông tin tới mắt chúng ta
- Tín hiệu nghe thấy: sự biến đổi của áp suất không khí truyền thông tin tới tai chúng ta

b. Biểu diễn toán học của tín hiệu

Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của 1 hoặc nhiều biến số độc lập

Ví dụ:

Tín hiệu microphone $S_a(t)$ được biểu diễn ở hình 1.1, $S_a(t)$ là hàm 1 biến số và biến này là thời gian t .



Hình 1.1: Tín hiệu $S_a(t)$

Chúng ta chia tín hiệu làm 2 nhóm lớn: tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

c. Tín hiệu liên tục

Nếu biến độc lập của sự biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu liên tục

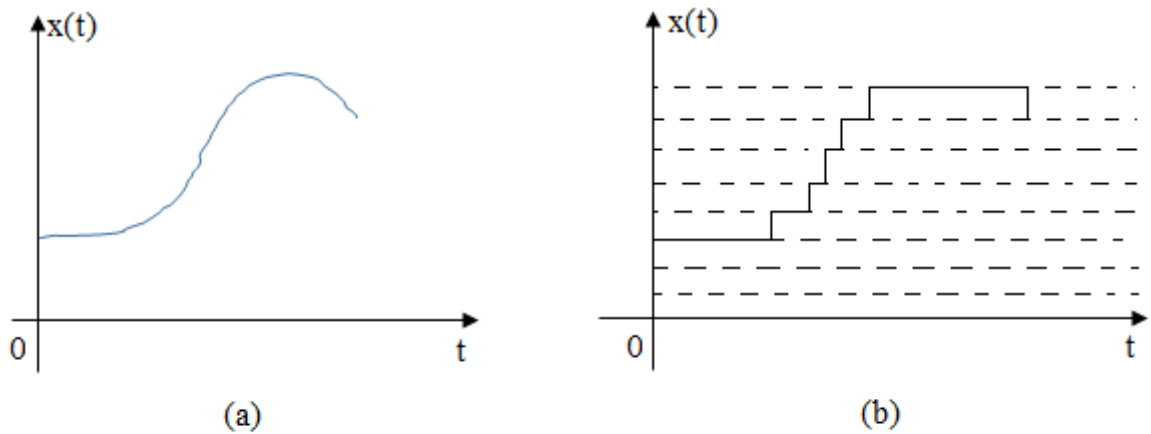
Nếu dựa vào hàm số, chúng ta có thể phân loại tín hiệu liên tục ra làm hai loại: tín hiệu tương tự và tín hiệu lượng tử hóa

- Tín hiệu tương tự: nếu hàm của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu tương tự

- Tín hiệu lượng tử: nếu hàm của tín hiệu liên tục là rời rạc thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lượng tử

Ví dụ:

Chúng ta có 2 tín hiệu liên tục có biến số là thời gian t được biểu diễn trên hình 1.2



Hình 1.2: (a) Tín hiệu tương tự
(b) Tín hiệu lượng tử hóa

d. Tín hiệu rời rạc

Nếu tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của các biến rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu rời rạc

Nếu dựa vào biên độ, chúng ta có thể phân tín hiệu rời rạc làm 2 loại: tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số

- Tín hiệu lấy mẫu: nếu hàm của tín hiệu rời rạc là liên tục (không được lượng tử hóa) thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lấy mẫu

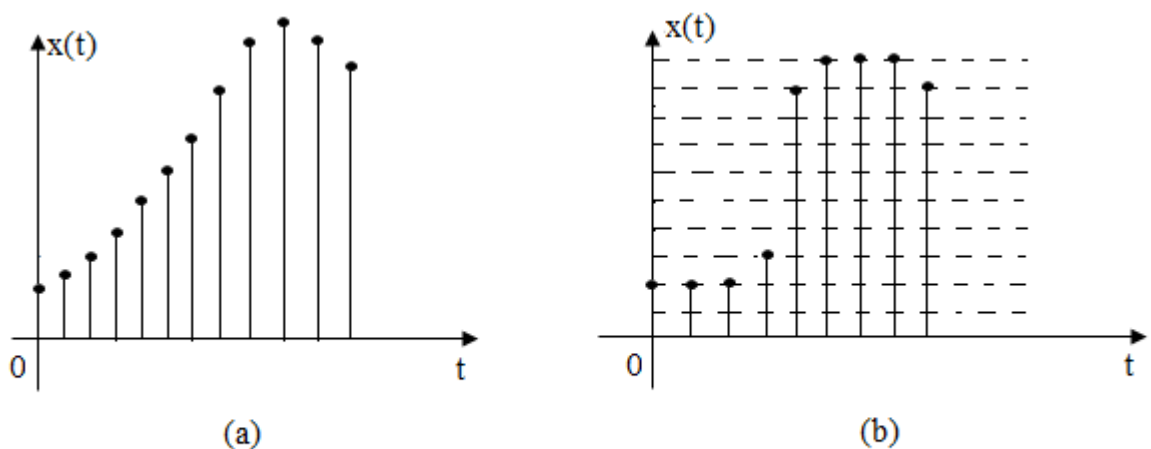
- Tín hiệu số: nếu hàm của tín hiệu rời rạc là rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu số

* Nhận xét:

- Tín hiệu số là tín hiệu được rời rạc hóa cả về biến số và biên độ
- Tín hiệu liên tục là tín hiệu liên tục cả về biến số và biên độ

Ví dụ:

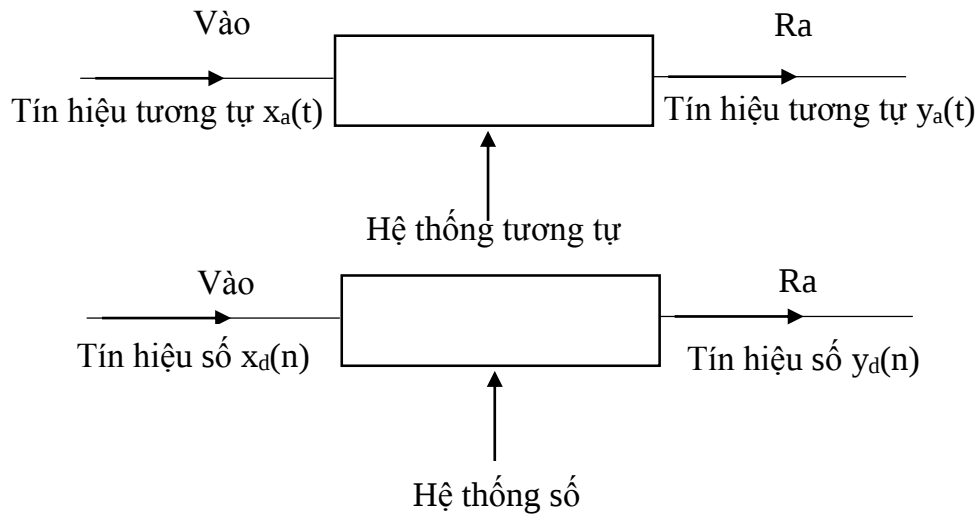
Chúng ta có 2 tín hiệu rời rạc có biến số là thời gian t (thời gian t được rời rạc hóa với chu kỳ rời rạc T_s) được biểu diễn trên hình 1.3



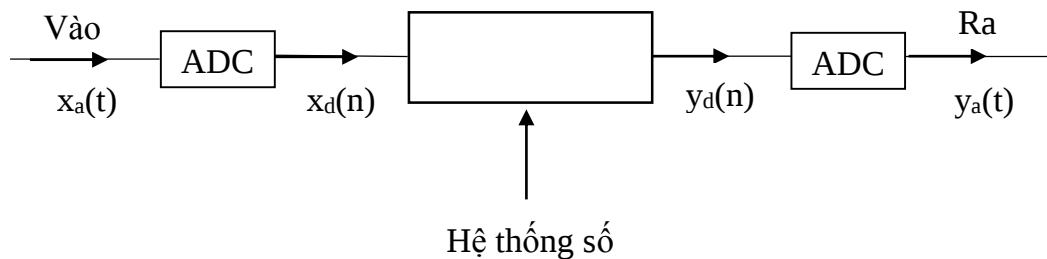
Hình 1.3: (a) Tín hiệu lấy mẫu
(b) Tín hiệu số

1.1.2 Các hệ thống xử lý tín hiệu

Chúng ta có thể phân loại các hệ thống xử lý theo chính tín hiệu cần xử lý: hệ thống tương tự, hệ thống số



Sơ đồ tổng quát của hệ thống xử lý số được cho bởi hình 1.4, hệ thống số này làm nhiệm vụ xử lý tín hiệu số $x_d(t)$ và đưa ra tín hiệu số $y_d(n)$



Hình 1.4: Sơ đồ tổng quát hệ thống xử lý số

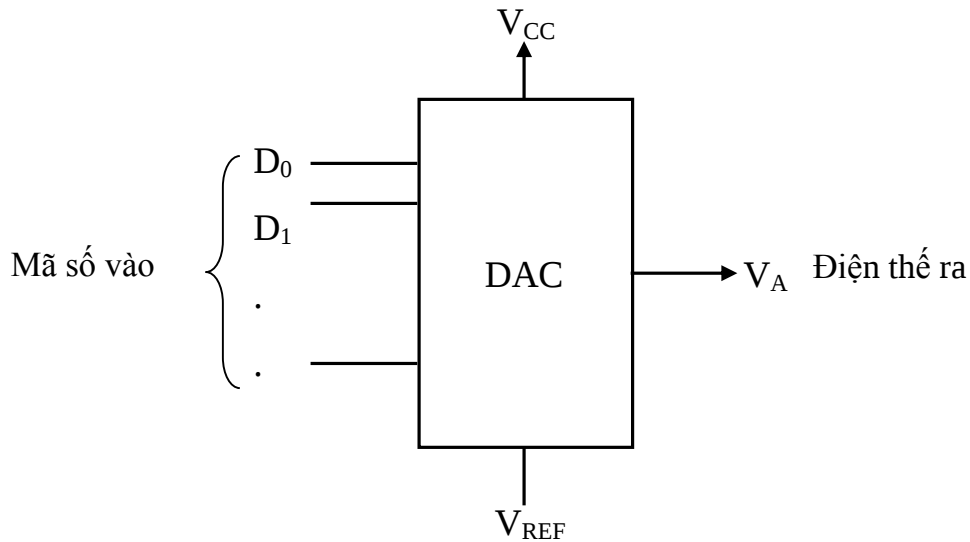
1.2 Hệ thống xử lý số tín hiệu tương tự.

1.2.1 Biến đổi D/A

a. Tổng quát về chuyển đổi DAC

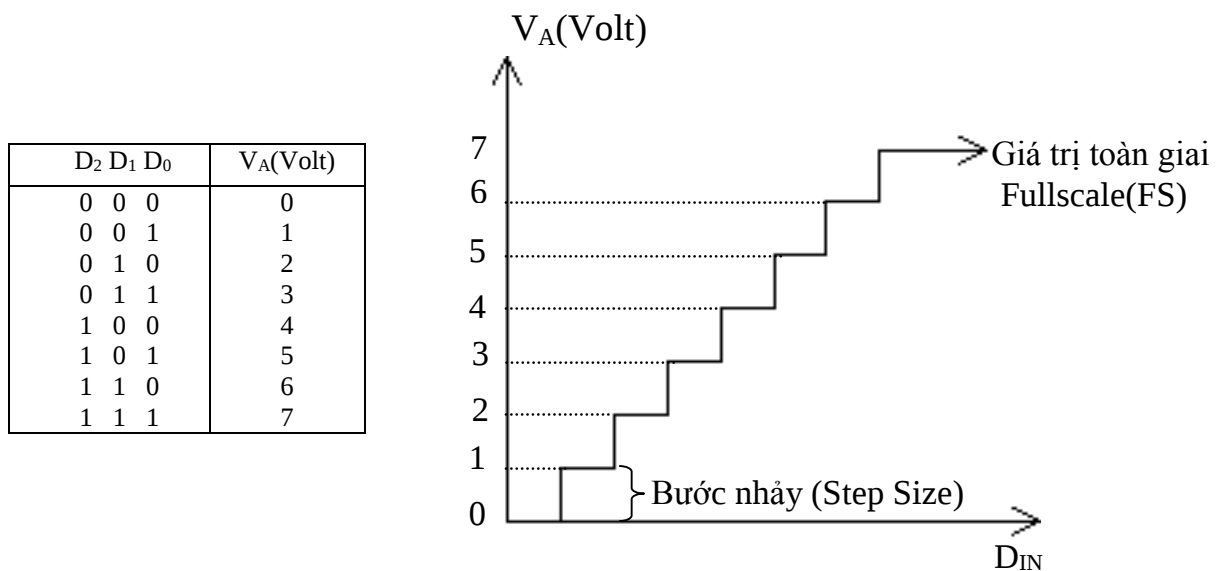
DAC là bộ chuyển đổi tín hiệu ngõ vào dạng số thành tín hiệu ngõ ra dạng tương tự. Nói một cách khác mạch DAC nhận vào mã số nhị phân n bit chuyển đổi thành tín hiệu điện có điện thế V_A . Tín hiệu điện áp V_A tỉ lệ với mã số nhị phân ngõ vào.

Sơ đồ khối DAC:



Hình 1.5: Sơ đồ khối DAC

Khảo sát quan hệ giữa mã số nhị phân 3 bit vào và điện thế ngõ ra trên hình 1.6



Hình 1.6: Bảng trạng thái và biểu đồ dạng sóng ngõ ra DAC 3 bit.

b. Thông số kỹ thuật của bộ chuyển đổi DAC

❖ Độ phân giải

Độ phân giải của bộ DAC là lượng (là điện áp hoặc dòng điện) thay đổi nhỏ nhất có thể xảy ra ở ngõ ra tương tự tương ứng với ngõ vào số.

Độ phân giải bằng với kích thước bậc thang (Step Size- được thể hiện ở hình 1.6)

Quan hệ giữa ngõ ra tương tự và ngõ vào số là:

$$V(A) = K \times D_i \quad (1.1)$$

K: Hệ số tỷ lệ (Vol hoặc A) phụ thuộc vào từng đặc điểm của DAC

Ví dụ1:

Cho bộ DAC 5 bit với đặc điểm dòng điện ra bằng 10 mA tương ứng với trạng thái nhị phân ngõ vào là: 10100. Hãy xác định thông số tỷ lệ K và giá trị dòng điện ra nếu ngõ vào của bộ DAC là 11101.

Giải:

Ngõ ra tương tự = 10 mA; ngõ vào số $10100_2 = 20_{10}$

$$\Rightarrow \text{thông số tỷ lệ: } K = \frac{10\text{mA}}{20} = 0,5\text{mA}$$

Với ngõ vào số $11101_2 = 29_{10}$

$$\Rightarrow I_{\text{OUT}} = K \times \text{ngõ vào số} = 0,5 \times 29 = 14,5\text{mA}$$

Ví dụ 2:

Cho bộ DAC 8 bit biết rằng $V_{\text{OUT}} = 1\text{V}$ nếu trạng thái nhị phân ngõ vào là 00110010. Hãy xác định điện áp ra cực đại của DAC.

Giải:

Ta có: ngõ vào cực đại $= 2^8 - 1 = 255$; ngõ vào với trạng thái $00110010_2 = 50$; $V_{\text{OUT}} = 1\text{V}$

$$\Rightarrow \text{Thông số tỷ lệ } K = \frac{1}{50} = 0,02\text{V} = 20\text{mV}$$

$$\Rightarrow V_{\text{OUT(MAX)}} = 0,02 \times 255 = 5,1\text{V}$$

Độ phân giải:

$$Q = \frac{FS}{2^n - 1} \quad (1.2)$$

n: số bit ngõ vào của DAC

FS: giá trị ngõ ra cực đại

❖ Độ phân giải phần trăm

Mặc dù có thể biểu diễn độ phân giải bằng dòng điện hoặc điện áp ở mỗi bước (Step Size), nhưng cũng rất hữu ích nếu biểu diễn độ phân giải theo tỷ lệ phần trăm của ngõ ra cực đại toàn giai (Full Scale).

$$R \% = \frac{\text{Stepsize}}{FS} \times 100 = \frac{Q}{FS} \times 100 = \frac{1}{2^n - 1} \times 100 \quad (1.3)$$

Ví dụ :

Một DAC 10 bit có bước nhảy = 10mV. Hãy xác định điện áp đầu ra cực đại (đầy thang) và độ phân giải phần trăm.

Giải:

Với 10 bit sẽ có $2^{10} - 1 = 1023$, mỗi bước 10mV

$$\Rightarrow FS = 10\text{mV} \times 1023 = 10,23 \text{ V}$$

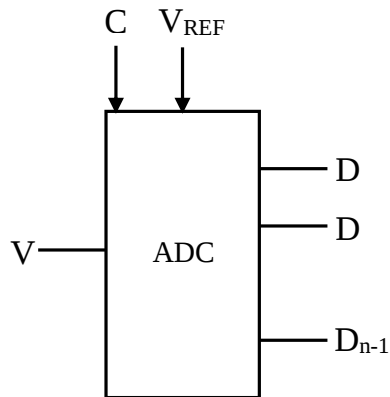
$$R\% = \frac{10\text{mV}}{10,23\text{V}} \times 100 = 0,1\%$$

1.2.2 Biến đổi A/D

a. Tổng quát về chuyển đổi ADC

ADC là bộ chuyển đổi tín hiệu ngõ vào tương tự có giá trị V_A thành chuỗi số nhị phân n bit

❖ *Sơ đồ khối tổng quát:*



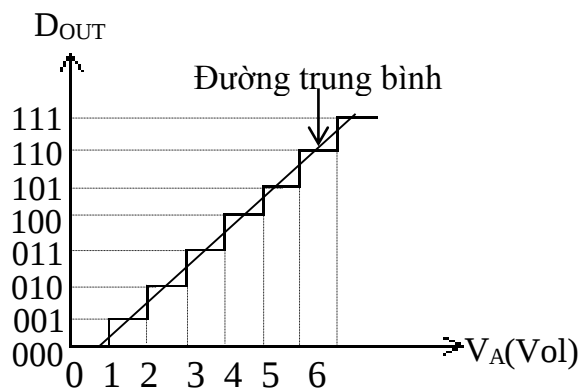
C_K : Chuỗi xung đồng hồ có tần số xác định

V_{REF} : Điện thế tham chiếu phục vụ cho việc chuyển đổi A – D

Khảo sát quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra:

Giả sử ta có quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của 1 mạch ADC như sau:

$V_A(\text{Vol})$	D_2	D_1	D_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



Hình 1.7: Bảng trạng thái và biểu đồ dạng sóng vào ra của ADC

Nhận thấy rằng đường trung bình không qua gốc tọa độ. Như vậy khi điện áp ngõ vào biến thiên từ 0 – 0,9999 V mã số ngõ ra vẫn là 000.

Nếu cộng thêm vào V_A một điện thế có giá trị là - 0,5V tức - $\frac{1}{2}$ LSB lúc này đường trung bình sẽ qua gốc tọa độ và sự chuyển đổi sẽ xảy ra như sau:

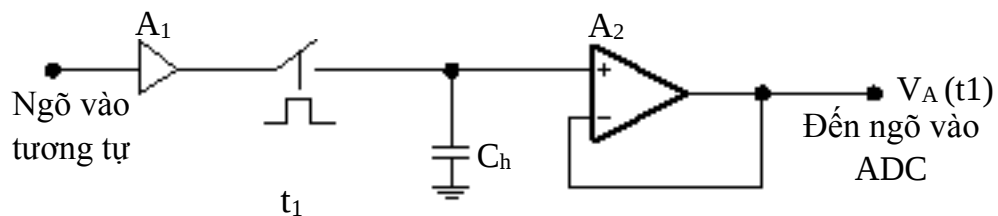
$V_A(\text{Volt})$	D_2 D_0	D_1
-0,5 → 0,5	0	0
0,5 → 1,5	0	1
1,5 → 2,5	0	0
2,5 → 3,5	0	1
3,5 → 4,5	1	0
4,5 → 5,5	1	0
5,5 → 6,5	1	1
6,5 → 7,5	1	1

Như vậy độ chính xác sẽ cao hơn sai số xem như giảm đi $\frac{1}{2}$

b. Mạch lấy mẫu và giữ (Sample and Hold – SH)

Khi nối trực tiếp điện thế tương tự với đầu vào của ADC, nếu điện thế tương tự biến thiên trong quá trình chuyển đổi mạch điện sẽ làm việc sai, mã số ngõ ra không tương ứng với điện áp ngõ vào. Người ta sử dụng mạch lấy mẫu và giữ để duy trì điện thế tương tự ngõ vào không đổi trong suốt thời gian thực hiện việc chuyển đổi

Một mạch lấy mẫu và giữ có thể thực hiện như hình vẽ 1.8



Hình 1.8: Sơ đồ mạch lấy mẫu và giữ

* Hoạt động của mạch như sau:

A_1 là mạch khuếch đại đệm có trở kháng ngõ vào cao, trở kháng ngõ ra thấp nhằm tạo điều kiện nạp nhanh cho tụ C_h

Tại thời điểm t_1 khi xung lấy mẫu tác động tụ C_h nhanh chóng đạt đến giá trị V_A

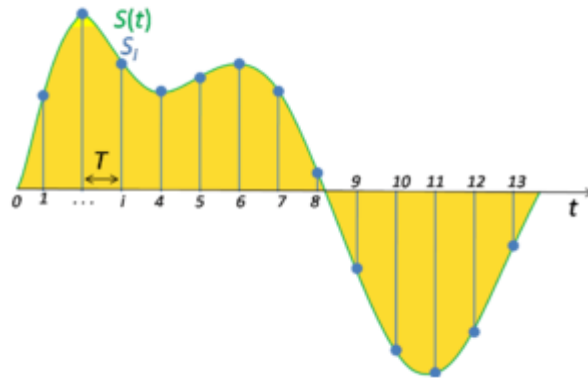
Khi xung lấy mẫu chấm dứt tụ C_h duy trì điện áp $V_A(t_1)$ tại ngõ ra cung cấp cho mạch ADC.

1.2.3 Lấy mẫu - Định lý lấy mẫu

a. Lấy mẫu

Trong xử lý tín hiệu, lấy mẫu là chuyển đổi một tín hiệu liên tục thành một tín hiệu rời rạc. Một ví dụ phổ biến là việc chuyển đổi của một sóng âm thanh (một tín hiệu liên tục) thành một chuỗi các mẫu (một tín hiệu thời gian rời rạc).

Một mẫu chứa một giá trị hoặc tập hợp các giá trị tại một điểm trên trục thời gian (và/hoặc không gian).



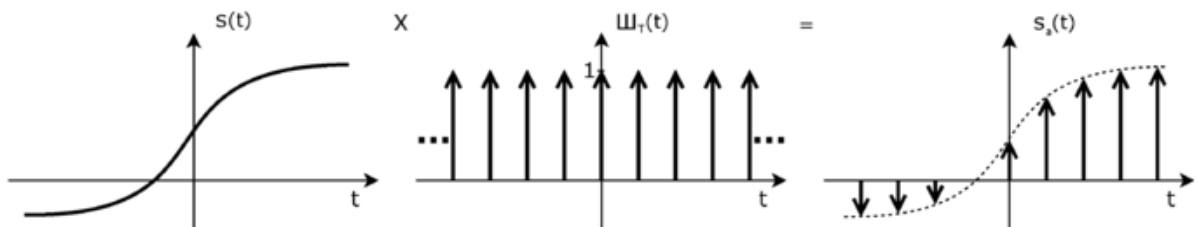
Hình 1.9: Lấy mẫu tín hiệu

Lấy mẫu có thể được thực hiện cho các tín hiệu khác nhau trong hệ tọa độ thời gian, hoặc với các hệ tọa độ bất kỳ, và kết quả tương tự thu được trong hệ tọa độ 2 hoặc nhiều chiều.

Đối với các tín hiệu khác nhau theo thời gian, ví dụ $s(t)$ là một tín hiệu liên tục được lấy mẫu, và việc lấy mẫu được thực hiện bằng cách **đo các giá trị của** tín hiệu liên tục ở thời điểm mỗi giây T , T được gọi là khoảng thời gian lấy mẫu. Như vậy, tín hiệu sau khi được lấy mẫu $s[n]$ được đưa ra bởi:

$$s[n] = s(nT), \text{ với } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ở đây, tín hiệu được xác định chính xác tại thời điểm lấy mẫu nT . Trong toán học, có thể được biểu diễn bằng phép nhân hàm tín hiệu $s(t)$ với hàm răng lược Dirac (hệ quả của hàm delta Dirac):



Hình 1.10: Tín hiệu sau khi lấy mẫu

Tín hiệu sau khi lấy mẫu là s_a :

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.4)$$

Phổ tần của s_a là chuỗi Fourier của tín hiệu s_a :

$$S_a(f) = S(f) * \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] \quad (1.5)$$

Tần số lấy mẫu hay tỷ lệ lấy mẫu f_s được định nghĩa là số lượng các mẫu thu được trong một giây, hoặc $f_s = 1/T$. Tỷ lệ lấy mẫu được đo bằng **hertz** hoặc **số mẫu/giây**.

b. Định lý lấy mẫu

Định lý lấy mẫu Nyquist–Shannon là một định lý được sử dụng trong lĩnh vực lý thuyết thông tin, đặc biệt là trong viễn thông và xử lý tín hiệu do Harry Nyquist và Claude Shannon phát minh

Định lý lấy mẫu được phát biểu như sau:

Một hàm số tín hiệu $x(t)$ không chứa bất kỳ thành phần tần số nào lớn hơn hoặc bằng một giá trị f_m có thể biểu diễn chính xác bằng tập các giá trị của nó với chu kỳ lấy mẫu $T = 1/(2f_m)$.

Như vậy, tần số lấy mẫu phải thỏa mãn điều kiện $f_s \geq 2f_m$. Tần số giới hạn $f_s/2$ này được gọi là tần số Nyquist và khoảng $(-f_s/2; f_s/2)$ gọi là khoảng Nyquist. Thực tế, tín hiệu trước khi lấy mẫu sẽ bị giới hạn bằng một bộ lọc để tần số tín hiệu nằm trong khoảng Nyquist.

Trong một số trường hợp có thể tái tạo lại hoàn toàn và chính xác tín hiệu ban đầu (tái lập hoàn hảo).

Định lý lấy mẫu Nyquist-Shannon cung cấp điều kiện đủ (nhưng không phải lúc nào cũng cần thiết), theo đó có thể tái lập hoàn hảo tín hiệu. Định lý lấy mẫu đảm bảo rằng các tín hiệu có tần số giới hạn có thể được tái tạo hoàn toàn từ phiên bản mẫu của nó, nếu tỷ lệ lấy mẫu lớn hơn gấp đôi tần số tối đa ($f_s > 2f_{max}$). Tái lập trong trường hợp này có thể đạt được bằng cách sử dụng công thức nội suy Whittaker-Shannon.

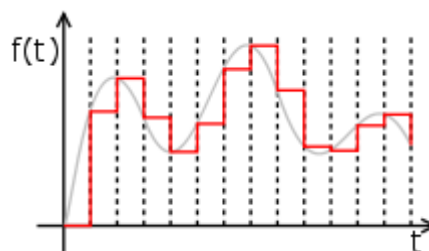
Ví dụ về sóng $f_a(t)$ (màu đỏ) được thu bằng một mạch lấy mẫu và giữ.

Do không thể tạo ra một hàm delta Dirac lý tưởng, cho nên tín hiệu có phần nào nhanh hơn so với thời điểm lấy mẫu thực tế, hay nói cách khác, khi đó tín hiệu biến đổi nhanh tương đối so với chuyển đổi của mạch ADC. Trong trường hợp này người ta sử dụng một 'mạch lấy mẫu và giữ' (sampling and hold). Hàm răng lược Dirac được thay thế bằng một xung chữ nhật với độ dài xung t_0 . Việc lấy mẫu được thực hiện bởi một mạch lấy mẫu và giữ để giữ giá trị của một mẫu không đổi trong một độ dài của xung hình chữ nhật. Trong toán học, điều đó tương đương với một tích chập với một hàm rect:

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \text{rect}\left(\frac{t-nT}{t_0}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-nT) \quad (1.6)$$

Phổ thu được:

$$F_a(f) = t_0 \cdot \text{sinc}(\pi f t_0) \cdot \left[F(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_a) \right] \quad (1.7)$$



Hình 1.11: Tín hiệu trước và sau khi qua mạch lấy mẫu và giữ

Phổ tần này chứa đựng một yếu tố của hàm sinc. Điều này có thể sai lệch tín hiệu phục hồi và phải được khắc phục bởi một bộ lọc tái thiết (*reconstruction filter*).

Có thể thấy các tần số lớn hơn tần số Nyquist f_N trong tín hiệu lấy mẫu, nhưng những tần số này không rõ ràng. Một phần tín hiệu có tần số f không thể được phân biệt với các thành phần khác có tần số $Nf_N + f$ và $Nf_N - f$ với N là số nguyên dương khác 0, sự không rõ ràng này được gọi là hiện tượng chồng phổ hay răng cưa.

Để xử lý vấn đề này một cách càng mịn càng tốt, hầu hết các tín hiệu tương tự (analog) được lọc với một bộ lọc chống răng cưa (thường là một bộ lọc thông thấp với tần số cắt tại tần số Nyquist) trước khi chuyển đổi để lấy mẫu.

Các biến dạng trong thực tế

Trong thực tế, các tín hiệu liên tục được lấy mẫu bằng cách sử dụng một mạch chuyển đổi tín hiệu tương tự sang tín hiệu số (ADC), đây là 1 thiết bị không lý tưởng. Điều này dẫn đến xuất hiện một độ lệch trong quá trình tái dựng lại tín hiệu so với lý thuyết, gọi chung là bị méo.

Các loại méo có thể xảy ra, bao gồm:

- Răng cưa hay hiện tượng chồng phổ (aliasing): một điều kiện tiên quyết của định lý lấy mẫu là tín hiệu phải có được giới hạn băng tần (bandlimited). Tuy nhiên, trong thực tế, không có tín hiệu nào trong thời gian vô hạn mà có băng tần hữu hạn cả.

- Jitter: là hiện tượng xung đồng bộ (xung điều khiển khoảng cách thời gian lấy mẫu) bị méo dạng hoặc bị sai lệch một cách không đồng đều.

- Nhiều bao gồm cả nhiễu do nhiệt hoặc nhiễu trong mạch analog...

- Lỗi do vận tốc tăng thế (Slew rate), gây ra bởi giá trị ngõ ra của thiết bị chuyển đổi ADC không thể thay đổi đủ nhanh.

- Lượng tử hóa như một hệ quả của độ chính xác hữu hạn các từ đại diện cho các giá trị chuyển đổi.

- Sai số mã hóa hay sai số lượng tử (Quantization): là lỗi xảy ra trong quá trình số hóa các giá trị của tín hiệu mẫu. Số bit mã hóa càng lớn thì sai số lượng tử sẽ càng nhỏ.

1.2.4 Hiện tượng Aliasing

Theo lý thuyết, một tần số Nyquist chỉ cần lớn hơn độ rộng dải tần của tín hiệu là đã đủ để có thể phục dựng lại một cách chuẩn xác toàn bộ tín hiệu từ những mẫu: xem thêm Định lý lấy mẫu. Tuy nhiên, việc phục dựng này yêu cầu một bộ lọc có khả năng cho qua các tần số không thay đổi trong khi chặn hoàn toàn tất cả các tần số khác (bộ lọc này được gọi là bộ lọc thông thấp lý tưởng hay brick-wall filter). Trên thực tế việc phục dựng hoàn hảo như vậy là không thể có, tức là sai sót và hiện tượng chồng phổ là điều chắc chắn phải xảy ra.

Tần số tín hiệu lớn hơn tần số Nyquist sẽ gặp phải một sự "gấp lại" cho gần bằng tần số Nyquist, trở về các tần số thấp hơn. Ví dụ như tần số của tín hiệu mẫu là 20 kHz, tần số Nyquist là 10 kHz, và một tín hiệu 11 kHz sẽ bị "méo gấp" lại còn 9 kHz. Tuy nhiên một tín hiệu 9 kHz có thể bị "méo" thành 11 kHz nếu như bộ lọc có chất

lượng không tốt như yêu cầu. Cả hai kiểu "méo" này có thể gây ra những hệ quả quan trọng.

Khi một bộ lọc có chất lượng không đạt yêu cầu được sử dụng, việc tăng tần số lấy mẫu (oversampling) là cần thiết để khắc phục những lỗi của các bộ lọc chống méo dạng: kể cả 1 bộ lọc thông thấp (brickwall) cắt ngang một dải thông ở một điểm gọi là tần số cắt hay tần số giới hạn, (cho qua tất cả các tần số dưới ngưỡng này mà không thay đổi gì), sau đó dần dần sẽ giảm tần trong một dải tần chuyển tiếp và cuối cùng chặn hoàn toàn các tín hiệu nằm trên một điểm nào đó hoặc chặn gần như hoàn toàn ở dải chặn (stopband). Thế là, các tần số có giá trị gần bằng tần số Nyquist có thể bị méo trong quá trình lấy mẫu và quá trình phục dựng tín hiệu, vì vậy độ rộng dải tần nên có giá trị thấp hơn tần số Nyquist, thấp hơn bao nhiêu thì tùy vào tính chất của bộ lọc.

Ví dụ:

Một đĩa CD ghi âm có tần số lấy mẫu là 44100 Hz thì tần số Nyquist phải là 22050 Hz, nó là giới hạn trên của tần số tối đa của dữ liệu, vì tín hiệu gốc là tín hiệu âm thanh, mà âm thanh tai người có thể nghe được có tần số tối đa $f_{max}=22050$ Hz. Nếu như bộ lọc chống méo dạng (trong trường hợp này là một bộ lọc tần số thấp) có một dải tần chuyển tiếp là 2000 Hz, như vậy để có được một tín hiệu với năng lượng không đáng kể ở tần số 22050 Hz hoặc hơn thì tần số cắt không thể nào vượt quá 20050 Hz.

1.2.5 Lượng tử hóa

Lượng tử hóa (quantization) có thể được định nghĩa một cách khái quát rằng: đó là một quá trình xấp xỉ một tập đại lượng có giá trị tương đối lớn hoặc thay đổi liên tục (hoặc thay đổi một cách rời rạc trong một khoảng rất nhiều giá trị) (ví dụ, các số thực) bằng một lượng có giá trị nhỏ hơn (hoặc thay đổi một cách rời rạc trong một khoảng tương đối ít giá trị) (ví dụ, các số nguyên).

Ứng dụng thường gặp nhất của lượng tử hóa là lượng tử hóa tín hiệu. Đây là một trong nhiều bước biến tín hiệu tương tự thành tín hiệu số, hay nói cách khác là quá trình lấy mẫu (sampling) các tín hiệu tương tự và chuyển thành các giá trị tương ứng với tín hiệu số. Mục đích của quá trình này là biểu diễn lại một cách chính xác nhất các tín hiệu tương tự bằng tín hiệu số.

1.3 Tổng quan về DSP

1.3.1 Sự hình thành và phát triển của DSP

Xử lý tín hiệu số (tiếng Anh: Digital signal processing) là việc xử lý những tín hiệu đã được biểu diễn dưới dạng chuỗi những dãy số. Xử lý tín hiệu số và xử lý tín hiệu tương tự là 2 phần của Xử lý tín hiệu.

Công nghệ xử lý tín hiệu số là công nghệ bùng nổ nhanh chóng trong ngành công nghiệp điện tử và viễn thông hiện nay. Xử lý tín hiệu số có nhiều ứng dụng đa dạng, ví dụ như trong lĩnh vực điện tử y sinh, trong điều chỉnh động cơ diesel, xử lý thoại, các cuộc gọi điện thoại khoảng cách xa, xử lý tiếng nói, xử lý âm thanh, và tăng cường chất lượng hình ảnh và truyền hình. Các công nghệ nén MPEG hay WMV hiện nay đều dựa trên tiến bộ của công nghệ xử lý tín hiệu số.

1.3.2 Sự khác nhau của 1 bộ DSP và 1 bộ xử lý chung

DSP có khả năng thực hiện đa tác vụ từ điều khiển đến xử lý tín hiệu với giá thành rẻ hơn bộ xử lý khác

Tốc độ xử lý của kit DSP chỉ phụ thuộc chủ yếu vào xung nhịp của chip do đó có thể đạt được hiệu suất cao hơn trong thời gian ngắn

DSP sử dụng ngôn ngữ lập trình C, ASM tương đối phổ dụng nên tỏ ra mềm dẻo hơn khi lập trình

1.3.3 Các lĩnh vực ứng dụng của DSP

DSP (công nghệ xử lý tín hiệu số) là một công nghệ được sử dụng để thiết lập các vị trí lọc khác nhau và nhằm tránh can nhiễu. Các bộ lọc âm thanh audio tiêu chuẩn đưa ra một dải audio nhất định được gọi là dải thông. Để tránh can nhiễu giữa các kênh gần kề, máy thu tín hiệu analog truyền thống kết hợp với các bộ lọc dải hẹp cho phép nghe được tín hiệu ở dải thông hẹp hơn. Với dải thông hẹp, audio ở dải hẹp hơn từ các tín hiệu khác có thể ảnh hưởng đến tín hiệu mà bạn đang nghe. Chỉ có một vấn đề là do các vị trí bộ lọc hẹp nên các audio ở dải hẹp hơn có thể đi qua và tín hiệu sẽ phát ra tiếng như bị tắc. Một số bộ lọc CW dải cực hẹp đi qua audio quá nhỏ đến nỗi gần như không có tác dụng đối với các truyền dẫn thoại.

Hiện nay có một số xu hướng trong điều khiển động cơ. Trong một số trường hợp, vấn đề cần quan tâm chỉ đơn giản là điều khiển tốc độ, gia tốc, mômen hoặc các thuộc tính khác của động cơ trên cơ sở tín hiệu điều khiển đầu vào là từ phía con người, chẳng hạn như qua bảng điều khiển.

CHƯƠNG 2: BIỂU DIỄN VÀ PHÂN TÍCH TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN THỜI GIAN

2.1 Tín hiệu rời rạc - dãy

2.1.1 Cách biểu diễn tín hiệu rời rạc

a. Biểu diễn toán học

Một tín hiệu rời rạc được biểu diễn bởi một dãy các giá trị thực hoặc phức

Tín hiệu rời rạc gồm 2 loại: tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số

Ký hiệu:

$x_s(nT_s)$: Tín hiệu lấy mẫu

$x_d(nT_s)$: Tín hiệu số

Ký hiệu chung của tín hiệu rời rạc là $x(nT_s)$ với nT_s là biến độc lập, n là số nguyên, T_s là chu kỳ lấy mẫu. Để tiện cho cách biểu diễn tín hiệu rời rạc chúng ta sẽ chuẩn hóa biến số độc lập nT_s bởi chu kỳ lấy mẫu T_s như sau:

$$\frac{nT_s}{T_s} = n$$

Như vậy sau khi chuẩn hóa ta có:

$$X(nT_s) \xrightarrow[\text{Bởi } T_s]{\text{Chuẩn hóa}} x(n)$$

Chú ý: Trong miền biến số chúng ta chuẩn hóa bởi chu kỳ lấy mẫu T_s thì trong miền tần số chúng ta phải chuẩn hóa bởi tần số lấy mẫu F_s ($F_s = \frac{1}{T_s}$)

Cách biểu diễn toán học như sau:

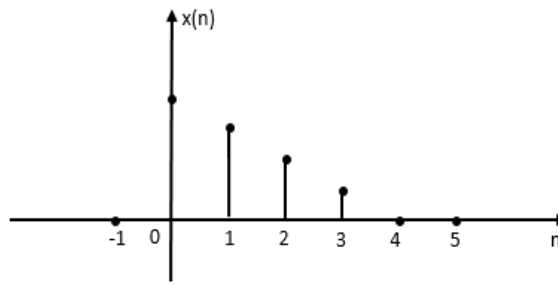
$$x(n) = \begin{cases} \text{biểu thức toán} & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ví dụ:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

b. Biểu diễn đồ thị

Để minh họa 1 cách trực quan trong nhiều trường hợp chúng ta dùng biểu diễn đồ thị



Hình 2.1: Đồ thị biểu diễn tín hiệu ví dụ phần 2.1.2a

c. Biểu diễn bằng dãy số

Là liệt kê các giá trị của $x(n)$ thành 1 dãy số như sau:

$$x(n) = \{ \dots, x(n-1), \underset{\vec{n}}{x(n)}, x(n+1), \dots \}$$

$\vec{n}$: chỉ giá trị của $x(n)$ tại vị trí thứ n

Vì tín hiệu rời rạc thực chất là các dãy số nên tín hiệu rời rạc $x(n)$ còn gọi là dãy $x(n)$

Chú ý:

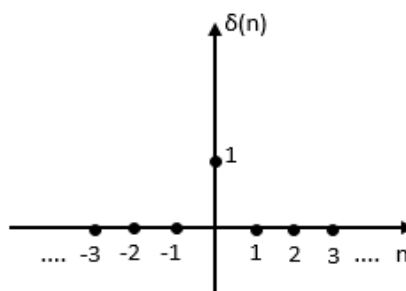
Tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa chỉ với giá trị nguyên, $x(n)$ không được coi như bằng 0 đối với các giá trị không nguyên, $x(n)$ không được định nghĩa với các giá trị không nguyên này

2.1.2 Các dãy cơ bản

a. Dãy xung đơn vị

Dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$



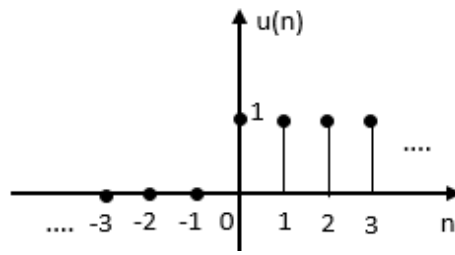
Hình 2.2: Đồ thị dãy xung đơn vị

Chú ý: Vai trò của $\delta(n)$ tương đương với phân bố $\delta(t)$ đối với hệ thống liên tục

b. Dãy nhảy đơn vị

Dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

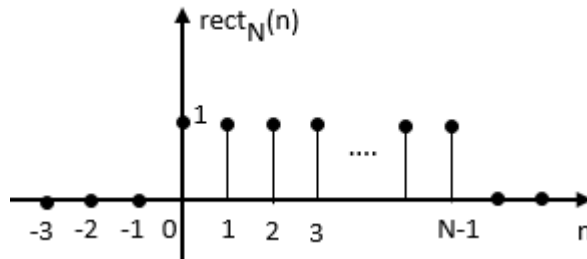


Hình 2.3: Đồ thị dãy nhảy đơn vị

c. Dãy chữ nhật

Dãy chữ nhật được định nghĩa như sau:

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (2.3)$$

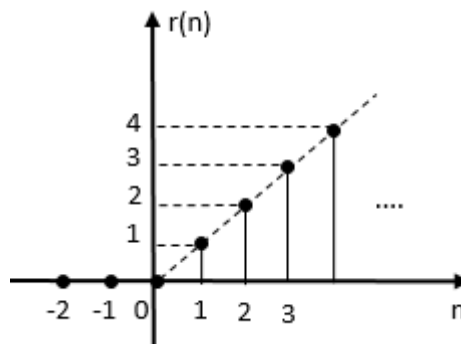


Hình 2.4: Đồ thị dãy chữ nhật

d. Dãy dốc đơn vị

Dãy dốc đơn vị được định nghĩa như sau:

$$r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$



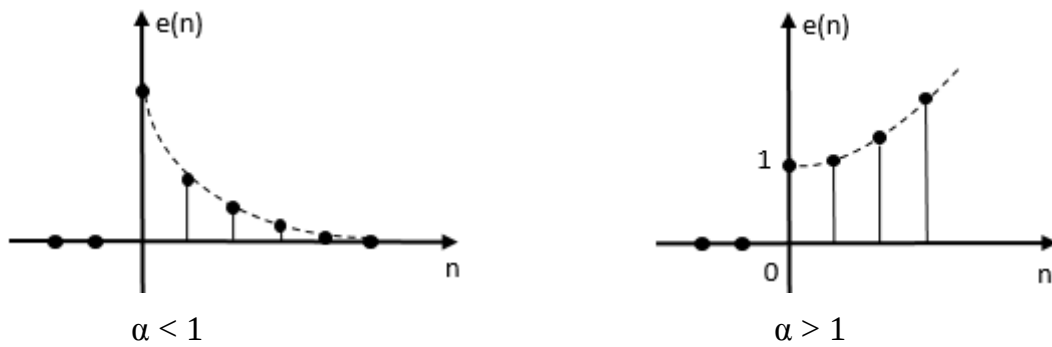
Hình 2.5: Đồ thị của dãy dốc đơn vị

e. Dãy hàm mũ thực

Dãy hàm mũ thực được định nghĩa:

$$e(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Với α là tham số. Dãy này tăng hay giảm phụ thuộc tham số $\alpha > 1$ hay $\alpha < 1$

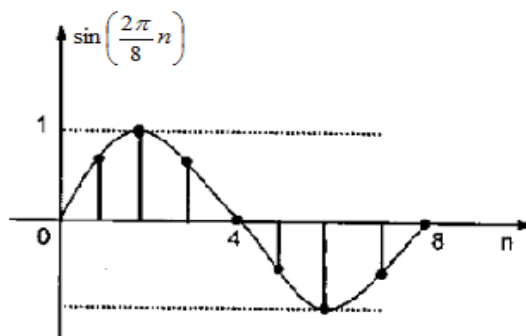


Hình 2.6 : Đồ thị của dãy hàm mũ thực

f. Dãy sin

Dãy sin được định nghĩa như sau :

$$s(n) = \sin(\omega_0 n) \quad (2.6)$$



Hình 2.7: Đồ thị dãy $s(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{8}n\right)$

g. Dãy mũ phức

Dãy mũ phức được định nghĩa như sau:

$$x(n) = \exp[(\sigma + j\omega)n] \quad (2.7)$$

Nhờ công thức Euler ta có:

$$x(n) = e^{\sigma n} [\cos(\omega n) + j \sin(\omega n)] \quad (2.8)$$

2.1.3 Các phép toán cơ bản của dãy

a. Tổng của hai dãy

Tổng của hai dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng 1 trị số của biến độc lập

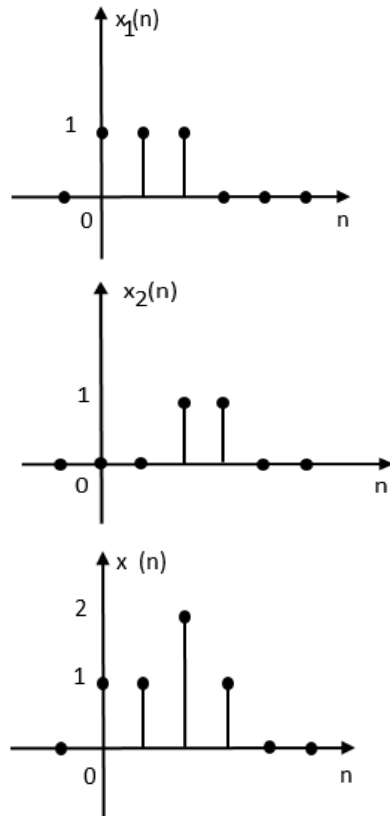
Ví dụ:

Hãy tìm tổng $x(n)$ của 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = \text{rect}_3(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_2(n - 2)$$

Giải:



b. Tích của 2 dãy:

Tích của 2 dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng 1 trị số của biến độc lập

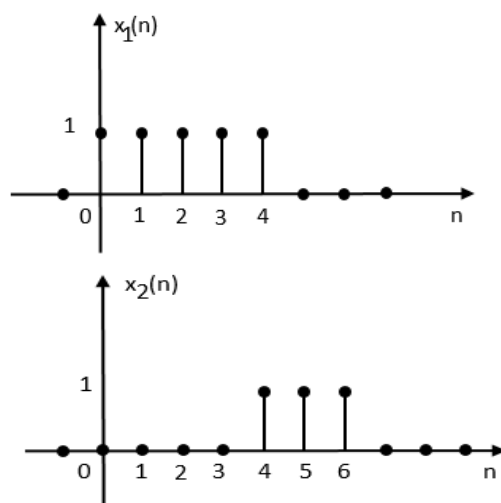
Ví dụ:

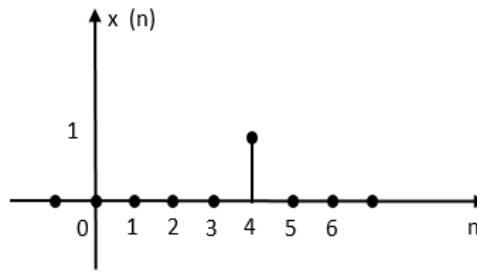
Hãy tìm tích $x(n)$ của 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = \text{rect}_5(n)$$

$$x_2(n) = \text{rect}_3(n - 4)$$

Giải:





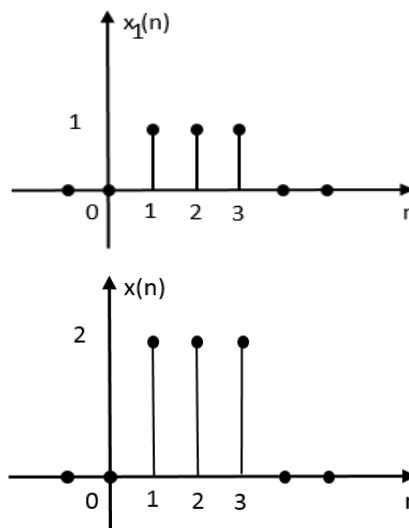
c. Tích với hằng số

Tích của 1 dãy với 1 hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của dãy với chính 1 hằng số đó

Ví dụ:

Hãy tìm tích của hằng số $\alpha = 2$ và dãy $x(n) = \text{rect}_3(n - 1)$

Giải:



d. Trễ (dịch)

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ khác nếu ta có:

$$x_2(n) = x_1(n - n_0) \quad \text{với mọi } n, n_0 \text{ là số nguyên âm hoặc dương}$$

Ví dụ:

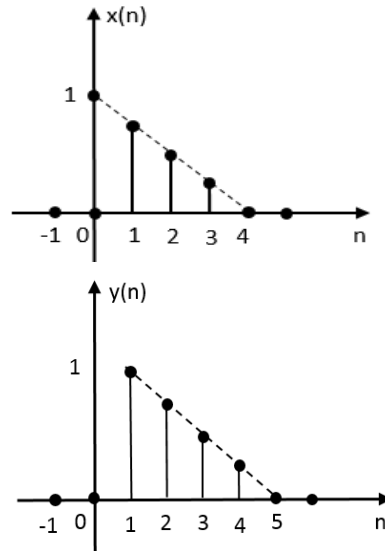
Hãy tìm dãy trễ $y(n)$ của dãy $x(n)$ như sau:

$$y(n) = x(n - 1)$$

Với

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải:



Nhận xét:

Nhờ có phép tổng, tích và trễ, chúng ta có thể diễn tả 1 dãy dưới dạng tổng sau đây:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n - k) \quad (2.9)$$

Với $\delta(n - k)$ là dãy xung đơn vị trễ

2.1.4 Tín hiệu công suất và tín hiệu năng lượng

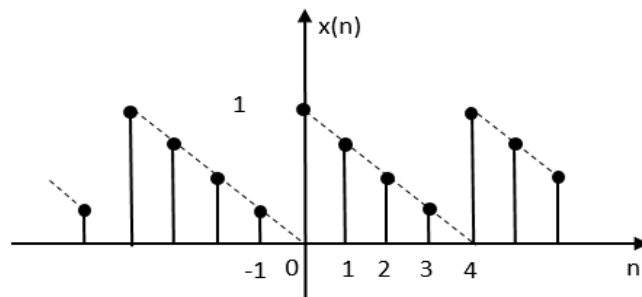
a. Dãy chu kỳ (Dãy tuần hoàn)

Một dãy là tuần hoàn với chu kỳ N , nếu:

$$x(n) = x(n + N) = x(n + kN) \quad \text{với } \forall n \quad (2.10)$$

Kí hiệu dãy tuần hoàn: $\tilde{x}(n); \tilde{x}(n)_N$

Ví dụ: Một dãy tuần hoàn với chu kỳ $N = 3$

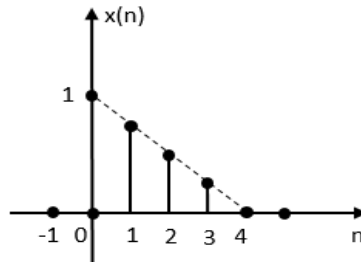


Hình 2.8: Dãy tuần hoàn

b. Dãy có chiều dài hữu hạn

Dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu (N điểm trên trục hoành) gọi là dãy có chiều dài hữu hạn. N gọi là chiều dài dãy

Ví dụ: Dãy có chiều dài hữu hạn $N = 4$



Hình 2.9: Dãy có chiều dài hữu hạn

Nếu ký hiệu chiều dài của dãy $x(n)$ là L : $L[x(n)]$ thì dãy $\text{rect}_N(n)$ có chiều dài là:

$$L[\text{rect}_N(n)] = [0, N - 1] = N$$

c. Năng lượng và công suất của dãy

- Năng lượng của dãy được định nghĩa là:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (2.11)$$

Ví dụ:

Tính năng lượng của dãy $u(n)$ và $\text{rect}_N(n)$

Giải:

$$E_u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

$$E_{\text{rect}_N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{rect}_N(n)|^2 = N$$

- Công suất trung bình của dãy $x(n)$ được định nghĩa là:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (2.12)$$

Năng lượng của dãy $x(n)$ trong khoảng hữu hạn $-N \leq n \leq N$ được định nghĩa là:

$$E_{x_N} = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (2.13)$$

Vậy:

$$E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} E_{x_N} \quad (2.14)$$

Và

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_{x_N} \quad (2.15)$$

d. Dãy năng lượng, dãy công suất

+ Dãy năng lượng

Nếu năng lượng của dãy $x(n)$ là hữu hạn ($0 < E < \infty$) thì $x(n)$ gọi là dãy năng lượng

+ Dây công suất

Nếu P_x là hữu hạn ($0 < P_x < \infty$) thì $x(n)$ gọi là dây công suất

Ví dụ:

Tính công suất trung bình của dây $u(n)$ và $\text{rect}_N(n)$

Giải:

$$P_u = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\text{rect}_M} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |\text{rect}_M(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{2N+1} = 0$$

Ta thấy $E_{\text{rect}_M} = M$ vì vậy $P_{\text{rect}_M} = 0$

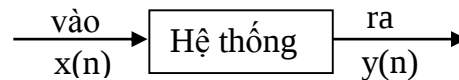
Trường hợp tổng quát: nếu E_x là vô hạn thì P_x có thể là hữu hạn hoặc vô hạn

→ $\text{rect}_M(n)$ là dây năng lượng, còn $u(n)$ là dây công suất

2.2. Hệ thống thời gian rời rạc (Gọi tắt là hệ thống rời rạc)

2.2.1 Khái niệm

Ký hiệu hệ thống



Kích thích và đáp ứng: Dây vào được gọi là dây kích thích, dây ra được gọi là đáp ứng của hệ thống với kích thích đang khảo sát

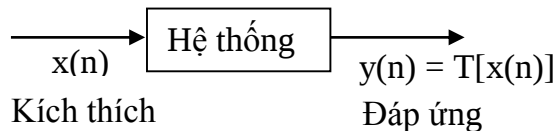
Đặc trưng của hệ thống: Một hệ thống xử lý số được đặc trưng bởi 1 toán tử T làm nhiệm vụ biến đổi dây vào $x(n)$ thành dây ra $y(n)$. Chúng ta có thể sử dụng 2 loại toán tử sau đây:

$$T[x(n)] = y(n)$$

Hoặc

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

Chúng ta có thể biểu diễn hệ thống này bằng sơ đồ như sau:



Hình 2.10: Sơ đồ biểu diễn hệ thống

Đối với các hệ thống tuyến tính, toán tử T phải thỏa mãn nguyên lý xếp chồng, vì vậy T đặc trưng cho 1 hệ thống tuyến tính bất buộc phải tuân theo quan hệ sau:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (2.16)$$

Với a, b là hằng số bất kỳ

- $y_1(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_1(n)$

- $y_2(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_2(n)$

2.2.2 Đáp ứng xung (impulse response) của một hệ thống rời rạc

Một dãy bất kỳ $x(n)$ có thể được biểu diễn bằng biểu thức sau đây:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Giả sử hệ thống là tuyến tính, chúng ta có thể viết:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

Vì $x(k)$ độc lập với n nên ta có:

$$y(n) = T[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \quad (2.17)$$

Nên ta ký hiệu $h_k(n)$ là đáp ứng của hệ thống với kích thích $\delta(n-k)$, có nghĩa là:
 $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$

Và

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)$$

Đáp ứng $h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính

Nhận xét:

Các hệ thống tuyến tính được đặc trưng hoàn toàn bởi đáp ứng xung của nó

$h_k(n)$ là hàm của k và n , như vậy ở các giá trị k khác nhau sẽ cho các đáp ứng xung khác nhau, hệ thống tuyến tính này sẽ phụ thuộc vào biến k , nếu biến k là thời gian thì ta có hệ thống tuyến tính phụ thuộc vào thời gian

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến (LTI: Linear Time-Invariant System)

2.3.1 Khái niệm

Nếu $y(n)$ là đáp ứng với kích thích $x(n)$, thì hệ thống tuyến tính gọi là bất biến khi $y(n-k)$ là đáp ứng của kích thích $x(n-k)$, ở đây k là số nguyên dương hoặc âm

Nếu biến số là thời gian, thì ta nói hệ thống bất biến theo thời gian

Ví dụ:

Hệ thống $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1)$ là hệ thống tuyến tính bất biến

2.3.2 Tích chập

a. Định nghĩa

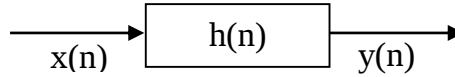
Khi hệ thống là tuyến tính và bất biến, thì ta có quan hệ sau:

$$T[\delta(n)] = h(n)$$

$$T[\delta(n-k)] = h(n-k) = h_k(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (2.18)$$

Như vậy $h_k(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính. Còn $h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến, lúc này $h(n)$ sẽ không phụ thuộc k , tức là nếu biến là thời gian thì ở mọi thời điểm khác nhau đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến luôn là $h(n)$



Hình 2.11: Hệ thống tuyến tính bất biến

Ta có quan hệ sau:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \quad (2.19)$$

Chú ý: Tích chập này chỉ đúng với hệ thống tuyến tính bất biến

Ví dụ:

Cho $x(n) = \text{rect}_5(n)$

$$\text{Và} \quad h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính $x(n) * h(n)$?

Giải:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

Để thu được $y(n)$ ta phải tính $y(n)$ theo từng giá trị của n , mà n và k giữ giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$, vì vậy ta không thể tính hết được, nhưng thực tế chúng ta thường làm việc với các dãy có chiều dài hữu hạn. Với mỗi giá trị của $y(n)$ ta phải tính 1 tổng theo k của tích $x(k).h(n-k)$ như sau:

$$\text{Nếu } n = -1 \rightarrow y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(-1-k)$$

$$\text{Nếu } n = 0 \rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(-k)$$

$$\text{Nếu } n = 1 \rightarrow y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(1-k)$$

Tập hợp các giá trị này ta có $y(n)$

Áp dụng vào ví dụ này ta có:

$x(k) = \text{rect}_5(k)$ (ta biến đổi n thành k)

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{4} & 0 \leq n-k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases} \quad (\text{biến } n \text{ thành } n-k)$$

$$\text{vì } x(k) = \text{rect}_5(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

nên:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=0}^4$$

$$\text{Nếu } n = -1 \rightarrow y(n) = \sum_{k=-0}^4 x(k).h(-1-k) = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 0$$

$$\text{Nếu } n = 0 \rightarrow y(n) = \sum_{k=-0}^4 x(k).h(-k) = 1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 1$$

$$\text{Nếu } n = 1 \rightarrow y(n) = \sum_{k=-0}^4 x(k).h(1-k) = 1.0,75 + 1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 1,75$$

$$\text{Nếu } n = 2 \rightarrow y(n) = \sum_{k=-0}^4 x(k).h(2-k) = 1.0,5 + 1.0,75 + 1.1 + 1.0 + 1.0 = 2.25$$

Tiếp tục tính tương tự ta được kết quả:

$$y(3) = 2,5$$

$$y(4) = 2,5$$

$$y(5) = 1,5$$

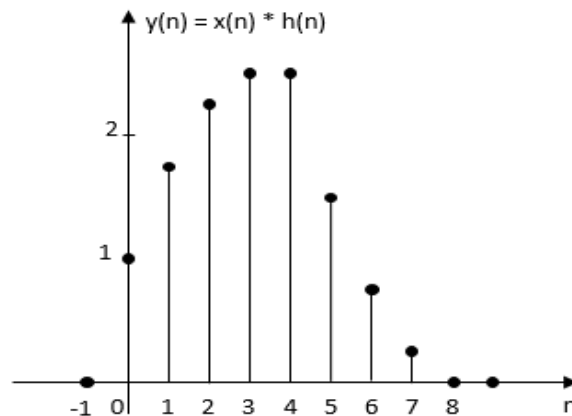
$$y(6) = 0,75$$

$$y(7) = 0,25$$

$$y(8) = 0$$

$$y(9) = 0...$$

Ta có $y(n)$ cho bởi đồ thị sau:

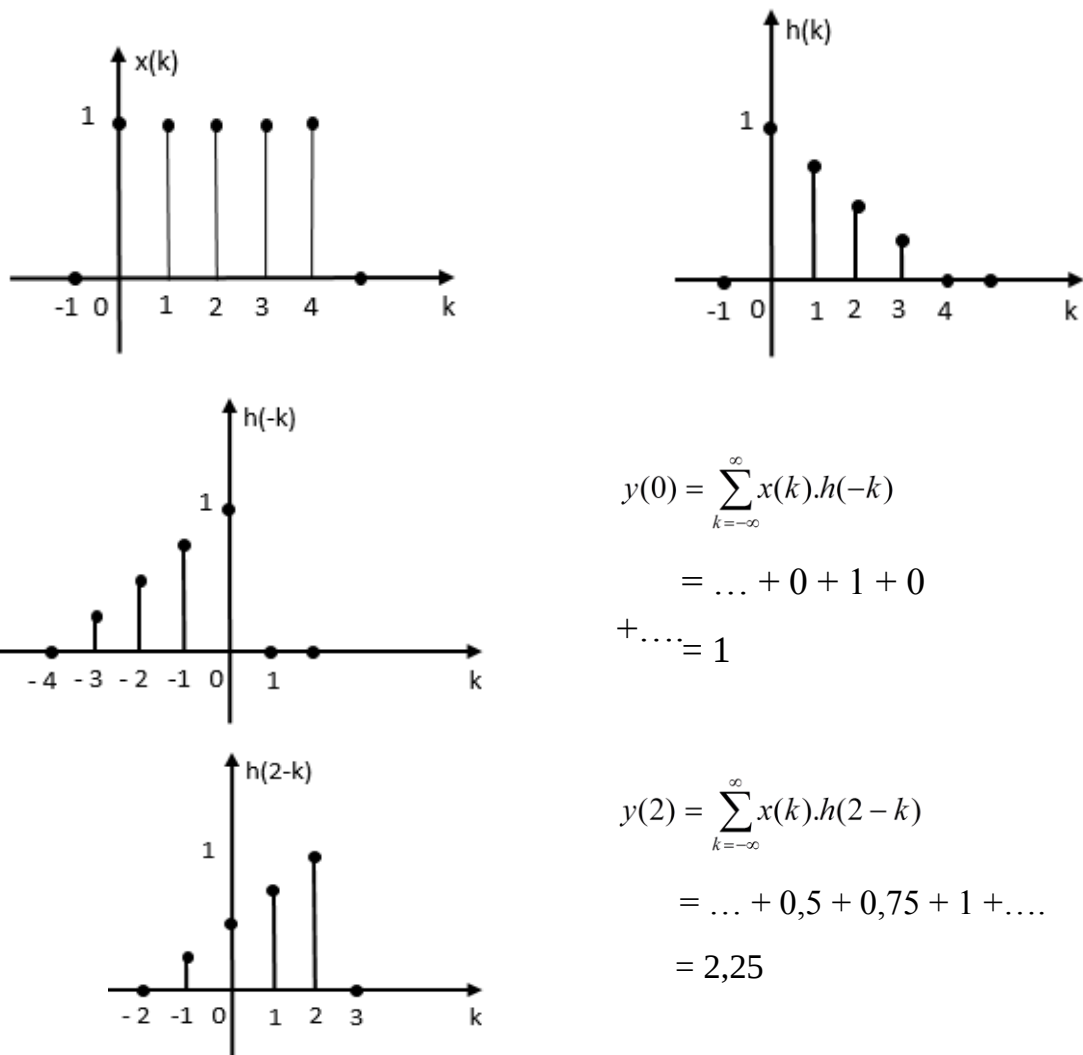


Hình 2.12: Đồ thị $y(n)$

Cách tính tích chập bằng đồ thị

- Đổi biến số n thành k , $x(n) \rightarrow x(k)$, $h(n) \rightarrow h(k)$, cố định $x(k)$ lại
- Quay $h(k)$ đối xứng qua trục tung, để thu được $h(-k)$ tức là ta có $h(0 - k)$ (ứng với $n = 0$)
- Dịch chuyển $h(-k)$ theo từng giá trị n , nếu n dương dịch chuyển về phía phải, nếu n âm dịch chuyển về phía trái, ta sẽ thu được $h(n - k)$
- Thực hiện phép nhân $x(k).h(n - k)$ theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của k

- Cộng các giá trị thu được ta sẽ có 1 giá trị của $y(n)$, tổng hợp các kết quả ta sẽ có dãy $y(n)$



Hình 2.13: Cách tính tích chập bằng đồ thị

Chúng ta còn có thể tính tích chập trực tiếp từ biểu thức giải tích của $x(n)$ và $h(n)$

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{4} & 0 \leq n-k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$$x(k) = \text{rect}_5(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Ta thấy rằng $x(k) = 1$ trong khoảng $0 \leq k \leq 4$ vì vậy: $\sum_{k=0}^4 x(k) \cdot h(n-k)$

Còn đối với $h(n-k)$ thì chỉ xác định trong khoảng $0 \leq n-k \leq 4$, còn ngoài khoảng này $h(n-k) = 0$, vậy nếu n chạy trong khoảng từ $0 \rightarrow 4$ thì k chỉ lấy giá trị lớn nhất là n . Vì nếu $k > n$ thì $(n-k) < 0$ mà $(n-k) < 0$ mà $(n-k) < 0$ thì $h(n-k) = 0$. Như vậy:

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 x(k) \cdot h(n-k) \quad \text{với } 0 \leq n \leq 4$$

Sẽ thay bằng tổng từ 0 đến n theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).h(n-k) \quad \text{với } 0 \leq n \leq 4$$

Còn nếu n chạy trong khoảng từ 5 đến 7 thì k sẽ lấy giá trị nhỏ nhất là $(n-4)$ vì nếu $k < n-4$ (tức $k < n-5$) thì $(n-k) > 4$, mà $(n-k) > 4$ thì $h(n-k)$ không xác định

Vậy tổng từ 0 đến 4 theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).h(n-k) \quad \text{với } 5 \leq n \leq 7$$

Sẽ được thay bằng tổng từ $(n-4)$ đến 4 theo k

$$y(n) = \sum_{k=n-4}^4 x(k).h(n-k) \quad \text{với } 5 \leq n \leq 7$$

Còn nếu n nằm ngoài khoảng từ 0 đến 7:

$n < 0$ và $n > 7$ thì $y(n) = 0$

Vậy thay vào ta có:

$$\text{Với } 0 \leq n \leq 4 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot \left[1 - \frac{n-k}{4} \right]$$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^n 1}_{n+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n}{4}}_{\frac{n}{4}(n+1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k}{4}}_{\frac{1}{4} \frac{n+1}{2} n}$$

$$\Rightarrow y(n) = (n+1) \left(\frac{8-n}{8} \right) \quad \text{với } 0 \leq n \leq 4$$

$$\text{Với } 5 \leq n \leq 7 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=n-4}^4 1 \cdot \left[1 - \frac{n-k}{4} \right]$$

$$\Rightarrow \text{Với } 5 \leq n \leq 7 \Rightarrow y(n) = \frac{5}{2} \left(3 - \frac{n}{2} \right) - (n-4) \left(\frac{3-n}{8} \right) \quad \text{Vậy cuối cùng ta có:}$$

$$y(n) = \begin{cases} (n+1) \left(\frac{8-n}{8} \right) & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{5}{2} \left(3 - \frac{n}{2} \right) - (n-4) \left(\frac{3-n}{8} \right) & 5 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{Các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Nếu các dãy có chiều dài quá lớn và hình dạng quá phức tạp thì ta phải lập trình bằng máy tính điện tử

b. Tính chất

+ Tính giao hoán

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k) \quad (2.20)$$

Vậy: Hệ thống tuyến tính bất biến có kích thích $x(n)$ và đáp ứng $h(n)$ sẽ tương đương với hệ thống có kích thích $h(n)$ và đáp ứng $x(n)$



+ Tính kết hợp

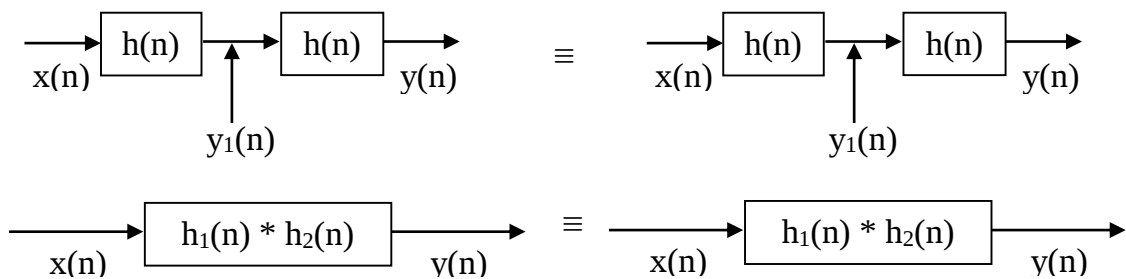
$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (2.21)$$

Ta thấy rằng việc nối tiếp hai hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với 1 hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tích chập của $h_1(n)$ và $h_2(n)$:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n)$$

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

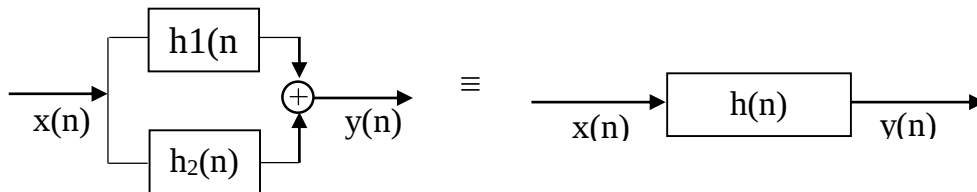
$$\Rightarrow h(n) = h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$$



+ Tính phân phối

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)] \quad (2.22)$$

Ta thấy rằng nối song song 2 hệ thống bất biến có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với 1 hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là tổng của $h_1(n)$ và $h_2(n)$



2.3.3 Các hệ thống LTI đặc biệt

a. Hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

+ Định nghĩa

Một hệ thống tuyến tính bất biến gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở 1 thời điểm bất kỳ $n = n_0$ hoàn toàn độc lập với kích thích của nó ở các thời điểm tương lai $n > n_0$

Nói cách khác, đối với 1 hệ thống nhân quả đáp ứng ra không bao giờ đi trước kích thích của nó

+ Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Định lý: Một hệ thống tuyến tính bất biến là nhân quả nếu và chỉ nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad (2.23)$$

Định lý đảo: Nếu đáp ứng xung $h(n)$ của 1 hệ thống tuyến tính bất biến bằng 0 với $n < 0$, thì hệ thống đó là nhân quả

Nhận xét: Các hệ thống nhân quả là hệ thống duy nhất thực hiện được về mặt vật lý

Đối với các hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả, ta có thể biến dạng công thức tích chập dựa theo tính chất: $h(n) = 0$ với $n < 0$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$$

$$h(n-k) = 0 \quad \text{với } k > n$$

$$h(n-k) \neq 0 \quad \text{với } k \leq n$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k).h(n-k)$$

Nếu viết ở dạng:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)$$

$$h(k) = 0 \quad \text{với } k < 0$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k).x(n-k)$$

Nếu đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn

$$h(n) \neq 0 \quad \text{với } 0 \leq n \leq N-1$$

$$h(n) = 0 \quad \text{giá trị khác}$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k).x(n-k)$$

Ví dụ:

Kiểm tra tính nhân quả của 2 hệ thống tuyến tính bất biến được cho bởi phương trình sau:

$$y_1 = 2x(n-1) + x(n-2)$$

$$y_2 = 3x(n-1) + 2x(n-2) + x(n+2)$$

Giải:

$$\text{Đặt } x(n) = \delta(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = h(n)$$

$$\text{Ta có: } h_1(n) = 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n+2)$$

Ta thấy rằng:

$$h_1(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad \Rightarrow \quad h_1(n) \text{ là nhân quả}$$

$$h_2(n) \neq 0 \quad \text{với } n < 0 \quad \Rightarrow \quad h_2(n) \text{ là không nhân quả}$$

Dãy nhân quả

Chúng ta có thể dùng khái niệm nhân quả đối với dãy

Một dãy $x(n)$ được gọi là nhân quả nếu:

$$x(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad (2.24)$$

Đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có kích thích $x(n)$ nhân quả ta có thể viết:

$$\text{Nếu } h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0 \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k).h(n-k)$$

$$\text{Nhưng } x(k) = 0 \quad \text{với } k < 0 \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).h(n-k)$$

$$\text{Tương tự ta có: } y(n) = \sum_{k=0}^n h(k).x(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).h(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k).x(n-k)$$

Chú ý: Đối với hệ thống $h(n)$ nhân quả có kích thích vào $x(n)$ nhân quả thì ta sẽ có đáp ứng ra $y(n)$ nhân quả.

Tín hiệu và hệ thống phản nhân quả

Một tín hiệu gọi là phản nhân quả nếu:

$$x(n) = 0 \quad \text{với } n > 0 \quad (2.25)$$

Vậy chiều dài của tín hiệu phản nhân quả là:

$$L[x(n)] = [-\infty, 0] = \infty$$

Một hệ thống rời rạc được gọi là phản nhân quả nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó thỏa mãn điều kiện:

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n > 0$$

$$\text{Vậy } L[h(n)] = [-\infty, 0] = \infty$$

b. Hệ thống tuyến tính bất biến ổn định

+ Định nghĩa

Một hệ thống được gọi là ổn định, nếu ứng với dãy đầu vào giới hạn ta có dãy đầu ra giới hạn

$$\text{Nếu } |x(n)| < \infty \quad \text{với } n \text{ bất kỳ}$$

$$\text{Ta có } |y(n)| < \infty \quad \text{với } n \text{ bất kỳ}$$

Ví dụ:

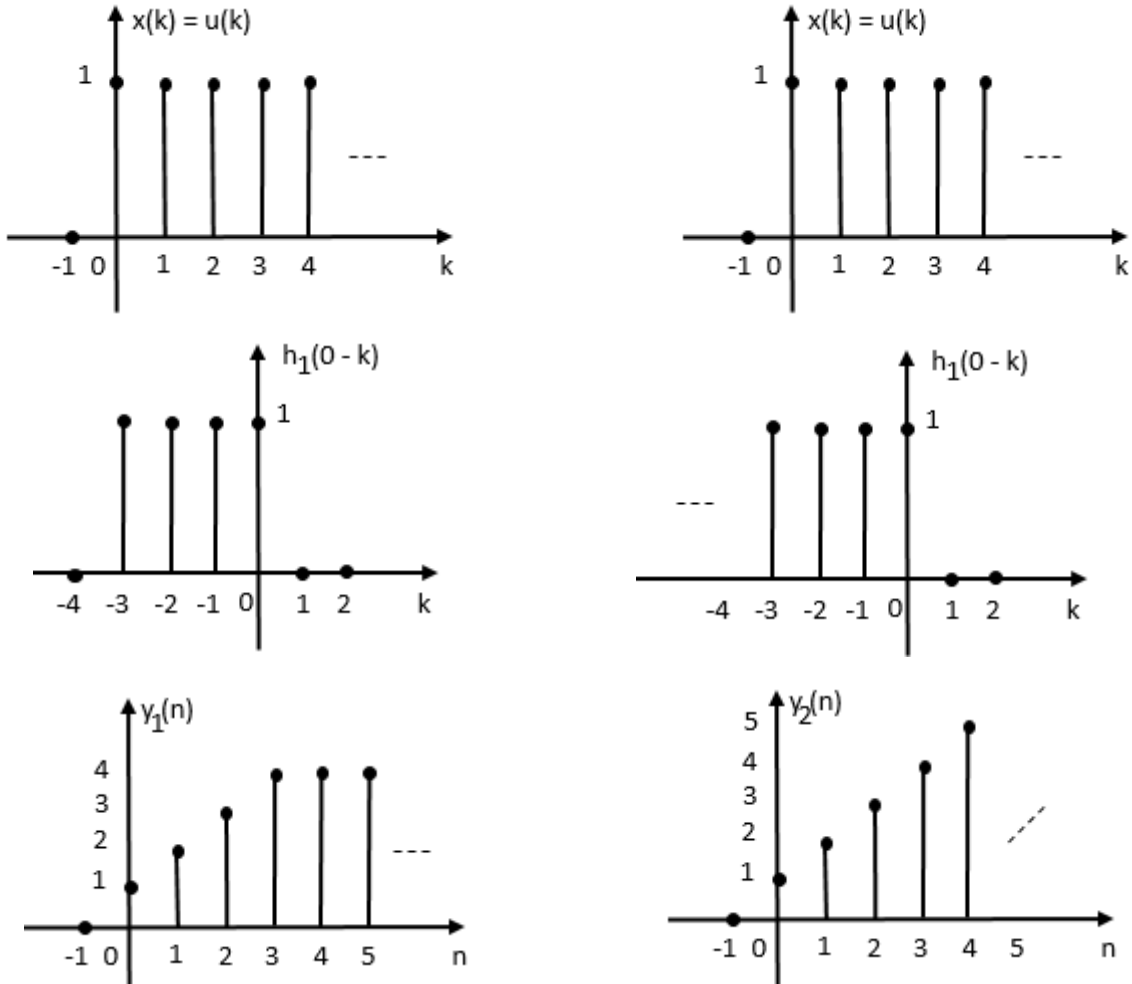
Cho 2 hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n) = \text{rect}_4(n)$ và $h_2(n) = u(n)$ có cùng dãy kích thích đầu vào là $x(n) = u(n)$. Xét sự ổn định của 2 hệ thống này

Giải

Ta có $|x(n)| = 1 < \infty$ với n bất kỳ

Xét 2 dãy $y_1(n)$ và $y_2(n)$:

$$y_1(n) = u(n) * \text{rect}_4(n) \quad \text{và} \quad y_2(n) = u(n) * u(n)$$



Hình 2.14: Dãy $y_1(n)$ và $y_2(n)$

Ta thấy rằng:

$$|y_1(n)| < 4 < \infty \quad \text{với mọi } n \quad \Rightarrow \quad \text{Hệ thống ổn định}$$

$$|y_2(n)| = \infty \quad \text{khi } n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hệ thống không ổn định}$$

Chú ý nếu xét đáp ứng xung của hệ thống ta có:

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_1(n)| = 1+1+1+1 = 4 < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hệ thống ổn định}$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2(n)| = 1+1+1+1+\dots = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hệ thống không ổn định}$$

Vậy ta có thể dựa vào đáp ứng xung $h(n)$ để xét sự ổn định của hệ thống mà không cần tính đáp ứng ra $y(n)$

Định lý: Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung của nó thỏa mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (2.26)$$

Ví dụ:

Xét tính nhân quả và ổn định của hệ thống có đáp ứng xung

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải:

+ Tính nhân quả:

Hệ thống có $h(n) = 0$ với $n < 0 \Rightarrow$ Hệ thống nhân quả

+ Tính ổn định:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k$$

- Nếu $|a| < 1$ thì chuỗi này sẽ hội tụ về số hữu hạn:

$$S = \frac{1}{1-|a|}$$

- Nếu $|a| \geq 1$ thì chuỗi này sẽ phân kỳ

Vậy hệ thống này ổn định nếu $|a| < 1$ và hệ thống sẽ không ổn định nếu $|a| \geq 1$

2.4 Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (LCCDE: Linear Constant-Coefficient Difference Equations)

2.4.1 Khái niệm

a. Phương trình sai phân tuyến tính

Về mặt toán học, kích thích vào $x(n)$ và đáp ứng ra $y(n)$ của hầu hết các hệ thống tuyến tính thỏa mãn 1 phương trình sai phân tuyến tính sau đây:

$$\sum_{k=0}^N a_k(n).y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r(n).x(n-r) \quad (2.27)$$

Với N, M là số nguyên dương

N là bậc của phương trình sai phân

Nhận xét: Trong phương trình này, tập hợp các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ sẽ biểu diễn toàn bộ hành vi của hệ thống đối với 1 giá trị n cho trước.

Phương trình này chính là ảnh rời rạc của phương trình vi phân tuyến tính đối với các hệ số liên tục, phương trình có dạng sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k(t). \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M b_r(t). \frac{d^r x(t)}{dt^r} \quad (2.28)$$

Chúng ta có thể nhận được 1 phương trình sai phân tuyến tính từ 1 phương trình vi phân tuyến tính bằng cách thay gần đúng của các đạo hàm vào vị trí của các đạo hàm. Như là với đạo hàm bậc 1, ta có gần đúng sau:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Chú ý: Chỉ xem phương trình sai phân là gần đúng của phương trình vi phân khi nghiên cứu hệ thống tương tự bằng con đường số và dùng nó đặc trưng cho hệ thống số tuyến tính rời rạc.

b. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) \quad (2.29)$$

Tập hợp các hệ số a_k và b_r sẽ biểu diễn một hệ thống tuyến tính bất biến

Phương trình (2.18) có thể viết dưới dạng sau đây:

$$a_0 \cdot y(n) + \sum_{k=1}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r)$$

$$\text{Nếu } a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} \cdot x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} \cdot y(n-k)$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = \sum_{r=0}^M b'_r \cdot x(n-r) - \sum_{k=1}^N a'_k \cdot y(n-k) \quad (2.30)$$

Ví dụ:

Chúng ta có 2 hệ thống tuyến tính được cho bởi hai phương trình sai phân tuyến tính sau:

$$y_1(n) = n \cdot x(n)$$

$$y_2(n) = 2 \cdot x(n) + 3 \cdot x(n-1)$$

Hãy tìm các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$?

Giải:

+ Hệ thống $y_1(n)$ có: $N = 0, M = 0 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$$a_0(n) = 1; a_1(n) = \dots = a_N(n) = 0$$

$$b_0(n) = n; b_1(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây $a_0(n) = 1$ là hằng số nhưng $b_0(n) = n$ phụ thuộc biến số n không phải là hằng số

+ Hệ thống $y_2(n)$ có: $N = 0, M = 1 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$$a_0(n) = 1; a_1(n) = \dots = a_N(n) = 0$$

$$b_0(n) = 2; b_1(n) = 3; b_2(n) = \dots = b_M(n) = 0$$

Ở đây $a_k(n)$ và $b_r(n)$ đều là hằng số độc lập với n

Nhận xét:

Hệ thống $y_1(n)$ và $y_2(n)$ đều là hệ thống tuyến tính nhưng hệ thống $y_1(n)$ không phải là hệ thống bất biến vì hệ số của nó không phải là hằng số và phương trình $y_1(n)$ không phải là phương trình sai phân hệ số hằng

Hệ thống $y_2(n)$ là bất biến vì hệ số của nó là hằng số và phương trình $y_2(n)$ là phương trình sai phân hệ số hằng

2.4.2 Nghiệm của LCCDE

Cũng giống như phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng đối với các hệ thống tương tự. Cách giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cũng gồm các bước tương tự sau:

+ Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình thuần nhất là phương trình không có thành phần thứ 2, tức là tìm $y(n)$ ứng với đầu vào $x(n) = 0$, nghiệm này ký hiệu là $y_0(n)$

Như vậy phương trình sai phân thuần nhất sẽ có dạng sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = 0 \quad (2.31)$$

Thông thường ta tìm nghiệm dưới dạng dãy hàm mũ như sau:

$$y_0(n) = \alpha^n$$

Thay vào công thức (2.20) ta có phương trình đa thức theo α như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot \alpha^{n-k} = 0$$

$$\text{Hoặc: } a_0 \cdot \alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_{N-1} \cdot \alpha^{n-(N-1)} + a_N \cdot \alpha^{n-N} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{n-N} (a_0 \cdot \alpha^N + a_1 \cdot \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \cdot \alpha + a_N) = 0$$

Và ta có phương trình:

$$a_0 \cdot \alpha^N + a_1 \cdot \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \cdot \alpha + a_N = 0 \quad (2.32)$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống và đa thức bên trái gọi là đa thức đặc trưng, đa thức này có bậc là N

Phương trình đặc trưng (2.21) sẽ có N nghiệm, ký hiệu là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Các nghiệm này có thể là thực hoặc phức. Nếu nghiệm này trùng nhau thì ta có nghiệm bội. Nếu các hệ số $a_1, a_2, \dots, a_N$ là thực thì các cặp nghiệm phức sẽ là các cặp liên hợp phức

Giả sử ta có các nghiệm đơn, ta sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất dưới dạng sau:

$$y_0(n) = A_1 \cdot \alpha_1^n + A_2 \cdot \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \cdot \alpha_{N-1}^n + A_N \cdot \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N A_k \alpha_k^n \quad (2.33)$$

Ở đây $A_1, A_2, \dots, A_N$ là các hằng số sẽ được xác định bởi điều kiện đầu đã cho đối với hệ thống.

Còn phương trình đặc trưng có các nghiệm bội, thì dạng của nghiệm $y_0(n)$ sẽ thay đổi. Giả sử α_2 là nghiệm bội bậc 1, ta sẽ có:

$$\begin{aligned} y_0(n) &= A_1 \alpha_1^n + A_{20} \alpha_2^n + A_{21} n \alpha_2^n + A_{22} n^2 \alpha_2^n + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1} \alpha_2^n + \dots + A_N \alpha_N^n \\ \Rightarrow y_0(n) &= A_1 \alpha_1^n + (A_{20} + A_{21} n + \dots + A_{2(l-1)} n^{l-1}) \alpha_2^n + \dots + A_{N-1} \alpha_{N-1}^n + A_N \alpha_N^n \end{aligned} \quad (2.34)$$

+ Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân có thành phần thứ 2

Phương trình có thành phần thứ 2 tức là phương trình ứng với đầu vào $x(n) \neq 0$, có dạng tổng quát như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) \quad (2.35)$$

Ký hiệu nghiệm riêng là: $y_p(n)$

Thông thường dạng của $y_p(n)$ được chọn giống như dạng của $x(n)$

+ Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân sẽ là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_0(n)$ và nghiệm riêng của phương trình có thành phần thứ 2 $y_p(n)$:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) \quad (2.36)$$

+ Bước 4: Tìm giá trị các hệ số

Giá trị các hệ số của nghiệm cuối cùng $y(n)$ sẽ được xác định nhờ điều kiện đầu

Chú ý:

Ở bước 2 khi ta đã chọn $y_p(n)$ giống dạng của $x(n)$ nhưng nếu $y_p(n)$ lại nằm trong $y_0(n)$, tức là trong thành phần $y_0(n)$ có $y_p(n)$, như vậy trong $y(n)$ thì $y_p(n)$ là thừa và vô nghĩa. Trong trường hợp này ta sẽ chọn $y_p(n)$ độc lập với các thành phần của $y_0(n)$, cách chọn $y_p(n)$ lúc này cũng giống như cách chọn $y_0(n)$ khi phương trình đặc trưng có nghiệm bội

Ví dụ nếu $y_0(n)$ có chứa thành phần $A_i \alpha_i^n$ thì $y_p(n)$ sẽ chọn là $B n \alpha_i^n$ chứ không chọn là $A_i \alpha_i^n$

Ví dụ:

Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc 1 sau đây:

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 0$ và $x(n) = n$

Giải:

+ Tìm $y_0(n)$

Ta có phương trình thuần nhất:

$$y(n) + 2y(n-1) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n

$$\Rightarrow \alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0$$

$$\alpha^{n-1}(\alpha + 2) = 0$$

Phương trình đặc trưng là:

$$\alpha + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = -2$$

Phương trình đặc trưng chỉ có 1 nghiệm đơn $\Leftrightarrow y_0(n) = A_1 \alpha_1^n = A_1 (-2)^n$

+ Tìm $y_p(n)$

Ta có phương trình có thành phần thứ 2:

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n)$$

$y_p(n)$ có dạng giống $x(n) = n$

$$\Leftrightarrow y_p(n) = Bn + C$$

Thay vào phương trình ta sẽ tìm được B và C:

$$Bn + C + 2[B(n-1) + C] = n$$

Đồng nhất các hệ số của 2 vế ta có:

$$B = \frac{1}{3} \quad ; \quad C = \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow y_p(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

+ Tìm $y(n)$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1 (-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

+ Xác định hệ số A_1

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có:

$$y(-1) = A_1 (-2)^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{2}{9}$$

Vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}[1 - (-2)^n] & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

2.4.3 Hệ thống rời rạc đệ quy và hệ thống rời rạc không đệ quy

a. Hệ thống số không đệ quy

Hệ thống tuyến tính bất biến được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r)$$

Trong trường hợp nếu $N = 0$, ta có:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} \cdot x(n-r) \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$\text{Hoặc } y(n) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) \quad ; \quad a_0 \neq 0 \quad (2.37)$$

Định nghĩa: Hệ thống được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính bậc 0 ($N = 0$) được gọi là hệ thống không đệ quy

Nhận xét:

Từ công thức (2.26) ta thấy rằng b_r là các hằng số. Vậy thì hệ thống không đệ quy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó chỉ phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ. Ta có thể viết:

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (2.38)$$

Từ công thức (2.26) ta gọi: $h(k) = b_k$

$$\text{Ta có: } y(n) = \sum_{k=0}^M h_k \cdot x(n-k) \quad (2.39)$$

Phương trình (2.28) là biểu thức của tích chập giữa $h(n)$ và $x(n)$ khi $h(n)$ là nhân quả và có chiều dài hữu hạn: $L[h(n)] = M + 1$: hữu hạn, $h(n)$ chính là đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy. Vậy ta có thể nói rằng: Hệ thống tuyến tính bất nhân quả có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn được mô tả bởi tích chập (2.28) là hệ thống không đệ quy (hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn: Finite – duration Impulse Response system, viết tắt FIR system)

Ví dụ:

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy cho bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

Giải:

Trong trường hợp này $N = 0$, $M = 3$, vậy hệ thống này là không đệ quy và $L[h(n)] = 4$.

Để tìm $h(n)$ ta thay $x(n) = \delta(n)$ thì $y(n) = h(n)$

Ta có:

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

$$h(n) = \text{rect}_4(n)$$

Vậy hệ thống này là hệ thống FIR

Nhận xét về đáp ứng xung của hệ thống FIR:

Ta có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng của hệ thống FIR là:

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k)$$

Như vậy đáp ứng xung $h(k)$ của hệ thống FIR chính là hệ số b_k và ta có:

$$y(n) = \begin{cases} b_k & \text{với } 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{các giá trị khác} \end{cases} \quad (2.40)$$

+ Tính ổn định của hệ thống FIR:

Ta thấy rằng hệ thống FIR là hệ thống luôn luôn ổn định, bởi vì:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^M |h(k)| = \sum_{k=0}^M |b_k|$$

Nếu b_k là số hữu hạn thì tổng S sẽ luôn luôn hữu hạn:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Vậy hệ thống FIR luôn thỏa mãn điều kiện ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến

b. Hệ thống số đệ quy

Trong trường hợp nếu $N > 0$ ta có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N như sau:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{r=0}^M \frac{b_r}{a_0} \cdot x(n-r) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k) & ; & \quad a_0 \neq 0 \\ &= \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) & ; & \quad a_0 = 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Định nghĩa: Hệ thống được đặc trưng bởi phương trình sai phân bậc $N > 0$ được gọi là hệ thống đệ quy

Nhận xét:

Từ (2.30) ta thấy rằng b_r và a_k là các hằng số, vậy hệ thống đệ quy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó phụ thuộc vào kích thích vào ở thời điểm hiện tại và quá khứ và phụ thuộc cả vào đáp ứng ra ở thời điểm quá khứ

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)] \quad (2.42)$$

Nếu ta giải phương trình (2.30) với kích thích vào $x(n) = \delta(n)$ ta sẽ tìm được đáp ứng xung $h(n)$. Ta thấy rằng đáp ứng xung của hệ thống đệ quy sẽ có chiều dài vô hạn. Và nếu ta giải phương trình với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$ thì hệ thống sẽ là nhân quả và $h(n)$ sẽ là dãy nhân quả. Vậy hệ thống đệ quy là hệ thống mà đáp ứng xung $h(n)$ của nó có chiều dài vô hạn (Infinite – duration Impulse Response System: IIR system)

Ví dụ:

Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống đệ quy cho bởi phương trình sai phân sau:

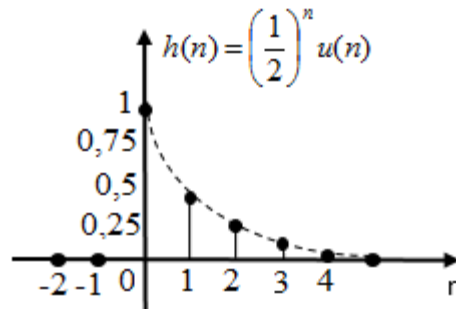
$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$

Giải:

Trong trường hợp này $N = 1$, $M = 0$ vậy hệ thống này là hệ thống đệ quy. Nếu ta thay $x(n) = \delta(n)$ ta sẽ có $y(n) = h(n)$. Phương trình này đơn giản ta có thể dùng phương pháp thế để tìm $h(n)$

Và ta có: $h(n) = \alpha^n \cdot u(n)$



Hình 2.15: Đồ thị của $h(n)$

Đây là hệ thống đệ quy và cũng là hệ thống IIR, $L[h(n)] = [0, +\infty] = \infty$

Xét tính ổn định của hệ thống:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

Nếu $|a| < 1$ thì S sẽ hội tụ: $S = \frac{1}{1-|a|}$ và hệ thống IIR này sẽ ổn định

Nếu $|a| \geq 1$ thì S sẽ phân kỳ, hệ thống này sẽ không ổn định

Vậy hệ thống IIR ta phải luôn xét tính ổn định của nó. Đây là nhược điểm của bộ lọc số IIR so với bộ lọc FIR xét về quan điểm độ ổn định

+ Điều kiện ổn định:

Điều kiện cần và đủ cho sự ổn định của 1 hệ thống IIR nhân quả được biểu diễn bởi 1 phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm α_k của phương trình đặc trưng phải nhỏ hơn 1

$$|\alpha_k| < 1 \quad \text{với mọi } k \quad (2.43)$$

thì

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Ví dụ:

Hãy tìm $h(n)$ và xét tính ổn định của hệ thống IIR được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

với điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$

Giải:

+ Tìm $y_0(n)$

Ta có phương trình đặc trưng: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

$$\rightarrow \alpha_1 = 1 \quad \text{và} \quad \alpha_2 = 2$$

$$\text{Vậy} \quad y_0(n) = A_1.1^n + A_2.2^n = h(n)$$

Xác định hệ số A_1, A_2 theo điều kiện đầu $y(n) = 0$ với $n < 0$ và đặt $x(n) = \delta(n)$

$$n = 0: \quad y(0) - 3y(-1) + 2y(-2) = \delta(0) + 2\delta(-1)$$

$$\rightarrow y(0) = 1$$

$$n = 1: \quad y(1) - 3y(0) + 2y(-1) = \delta(1) + 2\delta(0)$$

$$\rightarrow y(1) = 3y(0) + 2y(0) = 5$$

Mặt khác thay $y_0(n)$ vào ta có:

$$y(0) = A_1 + A_2 = 1$$

$$y(1) = A_1 + 2A_2 = 5$$

$$\rightarrow A_1 = -3 \quad \text{và} \quad A_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow h(n) = -3 + 4.2^n = 2^{n+2} - 3 \quad n \geq 0$$

Vì $|\alpha_1| = 1$ và $|\alpha_2| = 2 > 1$ nên hệ thống IIR này không ổn định

c. Hệ thống đệ quy thuần túy

Hệ thống đệ quy thuần túy là trường hợp riêng của hệ thống đệ quy khi $M = 0$

Nếu $N > 0$ và $M = 0$ ta có phương trình sai phân tuyến tính bậc N như sau:

$$y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad , \quad a_0 = 1 \quad (2.44)$$

Nhận xét:

Ta thấy b_0 và a_k là các hằng số, vậy hệ thống đệ quy thuần túy là hệ thống mà đáp ứng ra $y(n)$ của nó phụ thuộc kích thích vào chỉ ở thời điểm hiện tại và phụ thuộc đáp ứng ra chỉ ở thời điểm quá khứ

$$y(n) = F[x(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)] \quad (2.45)$$

Hệ thống đệ quy thuần túy cũng là hệ thống IIR, tức là đáp ứng xung $h(n)$ của nó có chiều dài vô hạn

2.4.4 Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

a. Các phần tử thực hiện

Để dễ hiểu sơ đồ khối thực hiện hệ thống, chúng ta viết lại phương trình sai phân của các hệ thống sau:

Hệ thống không đệ quy:

$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^M b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]}$$

Hệ thống đệ quy:

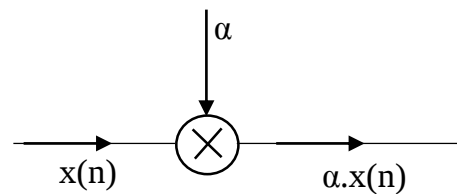
$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^M b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1), \dots, x(n-M)]} + \underbrace{\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]}$$

Hệ thống đệ quy thuần túy:

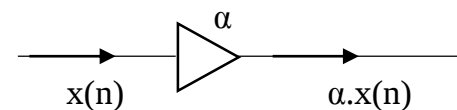
$$y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1), \dots, y(n-N)]}$$



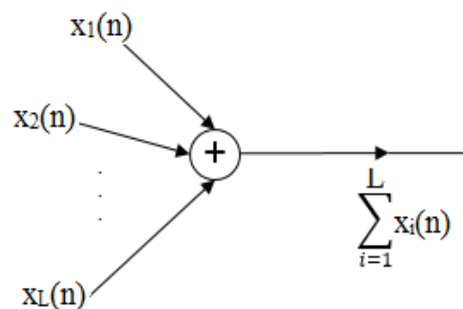
Phân tử trễ



Phân tử nhân với hằng số



Phân tử nhân với hằng số



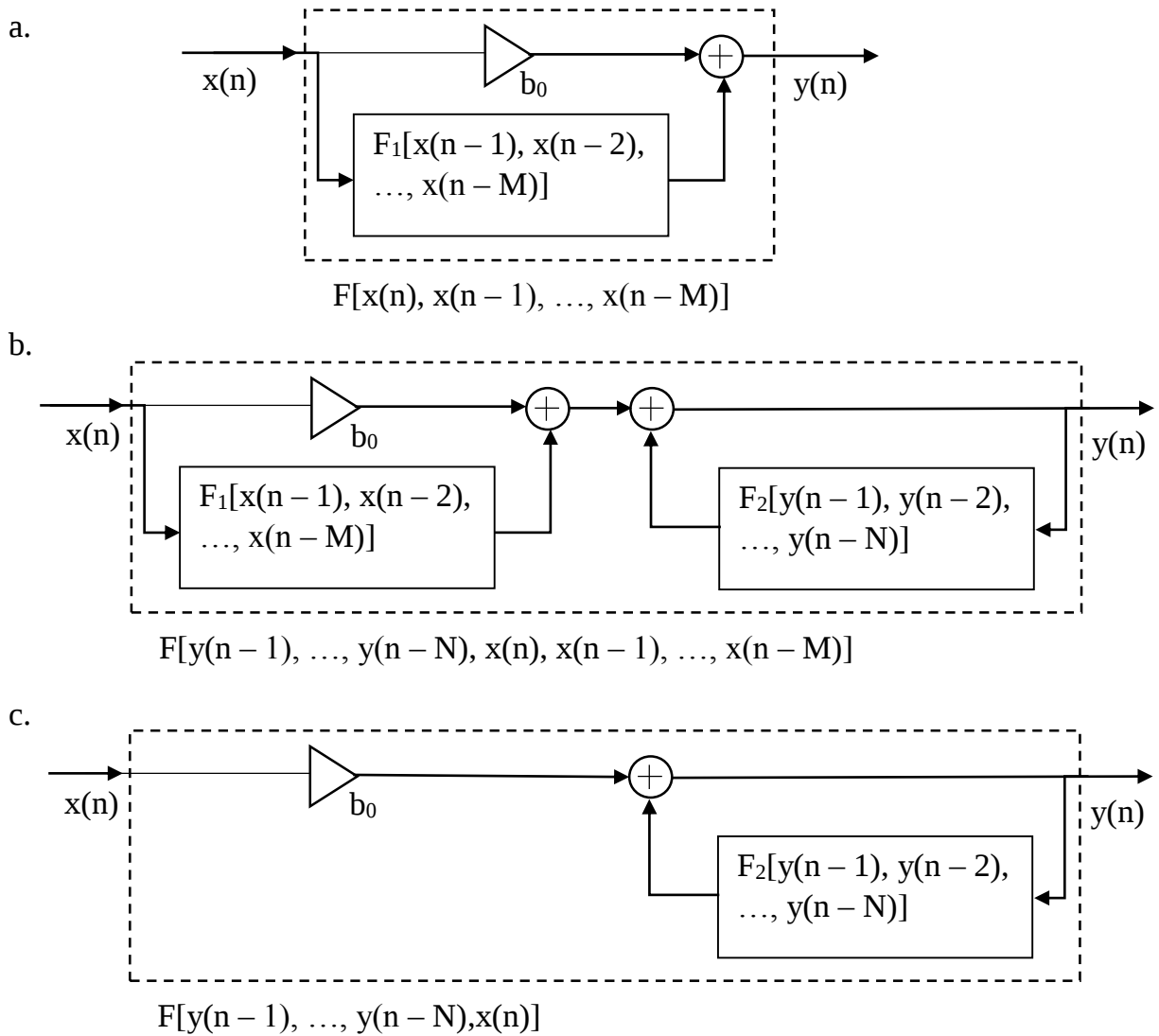
Phân tử cộng

Hình 2.16 : Các phân tử thực hiện hệ thống rời rạc

b. Thực hiện các hệ thống rời rạc

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định là hệ thống thực hiện được về mặt vật lý, dù cho là hệ thống đó là không đệ quy, đệ quy hay đệ quy thuần túy

Dựa vào phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cho từng hệ thống này chúng ta có thể xây dựng sơ đồ khối tổng quát của chúng



Hình 2.17: a. Hệ thống không đệ quy

b. Hệ thống đệ quy

c. Hệ thống đệ quy thuần túy

Nhận xét:

- Hệ thống không đệ quy, sơ đồ của nó không có nhánh phản hồi, vì vậy nó luôn luôn ổn định, tức là hệ thống số FIR luôn ổn định
- Hệ thống đệ quy, sơ đồ của nó gồm 2 khối F_1 và F_2 , F_1 giống hệ thống không đệ quy còn F_2 là nhánh phản hồi. Do có nhánh phản hồi nên ta phải xét độ ổn định của hệ IIR
- Hệ thống đệ quy thuần túy, sơ đồ của nó chỉ có b_0 và khối F_2 , do F_2 là nhánh phản hồi nên nó cũng là hệ thống IIR và ta phải xét độ ổn định của nó.

2.5. Tương quan của các tín hiệu

Trong việc xử lý tín hiệu, chúng ta cần phải so sánh các tín hiệu với nhau. Ví dụ như tín hiệu radar, radar sẽ phát tín hiệu để tìm mục tiêu là $x(n)$, tín hiệu này sau khi đập vào mục tiêu (như máy bay chẳng hạn) sẽ phản xạ trở lại radar, radar thu tín hiệu này nhưng bị trễ đi 1 thời gian $D = n_0 T_s$ (T_s là chu kỳ lấy mẫu), tín hiệu mà radar thu lại sẽ

bị suy giảm với hệ số suy giảm A, tức là radar sẽ thu lại tín hiệu $Ax(n - n_0)$. Ngoài tín hiệu phản xạ từ mục tiêu này, radar còn bị nhiễu cộng can thiệp $v(n)$. vậy tổng cộng nếu trong không gian có mục tiêu mà radar phát hiện được thì radar sẽ thu được tín hiệu:

$$y(n) = Ax(n - n_0) + v(n)$$

Còn nếu không có mục tiêu trong không gian hoặc radar không phát hiện được mục tiêu thì radar chỉ thu được nhiễu cộng $v(n)$ và:

$$y(n) = v(n)$$

So sánh hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ ta sẽ phát hiện được có mục tiêu hay không và xác định được thời gian trễ $D = n_0Ts$, từ đó xác định được khoảng cách của mục tiêu

Một phương pháp so sánh hay dùng nhất đó là tương quan

2.5.1 Tương quan chéo (crosscorrelation)

Giả sử ta có 2 dãy $x(n)$ và $y(n)$, tối thiểu 1 trong 2 dãy có năng lượng hữu hạn. tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$ được định nghĩa như sau:

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.46)$$

Ví dụ:

Cho hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ sau:

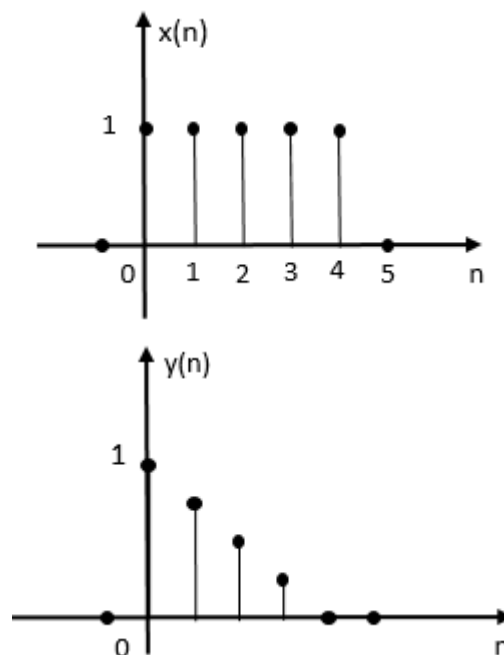
$$x(n) = \text{rect}_5(n)$$

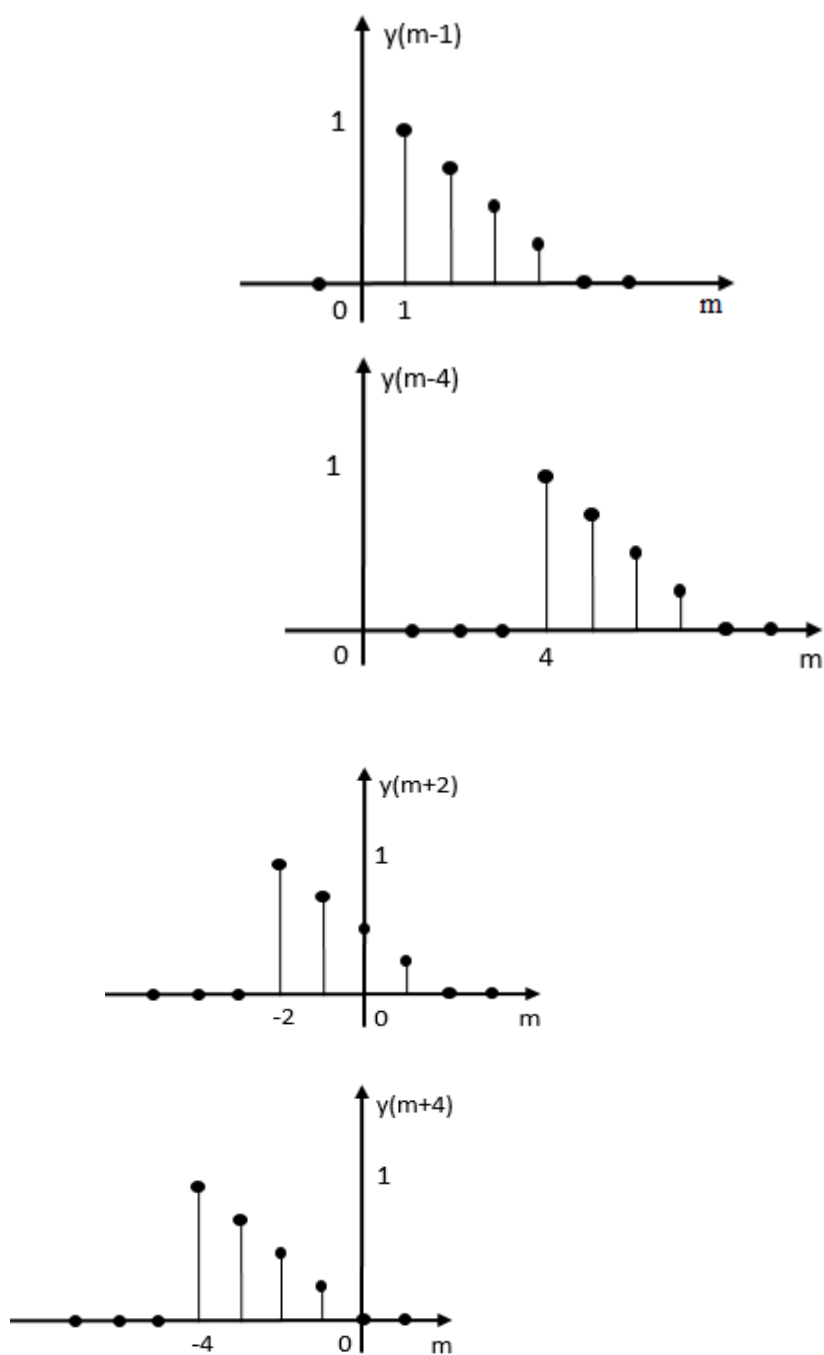
$$y(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$

Giải:

Theo định nghĩa ta có thể giải bằng đồ thị





$$\begin{array}{cccccc}
 r_{xy}(0) = 2,5 & r_{xy}(1) = 2,5 & r_{xy}(2) = 2,25 & r_{xy}(3) = 1,75 & r_{xy}(4) = 1 & \\
 r_{xy}(5) = 0 & r_{xy}(-1) = 1,5 & r_{xy}(-2) = 0,75 & r_{xy}(-3) = 0,25 & r_{xy}(-4) = 0 &
 \end{array}$$

Hình 2.18: Tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$

2.5.2 Tự tương quan (autocorrelation)

Trong định nghĩa tương quan chéo nếu ta có $x(n) \equiv y(n)$ thì ta có định nghĩa tự tương quan

Hàm tự tương quan được định nghĩa như sau:

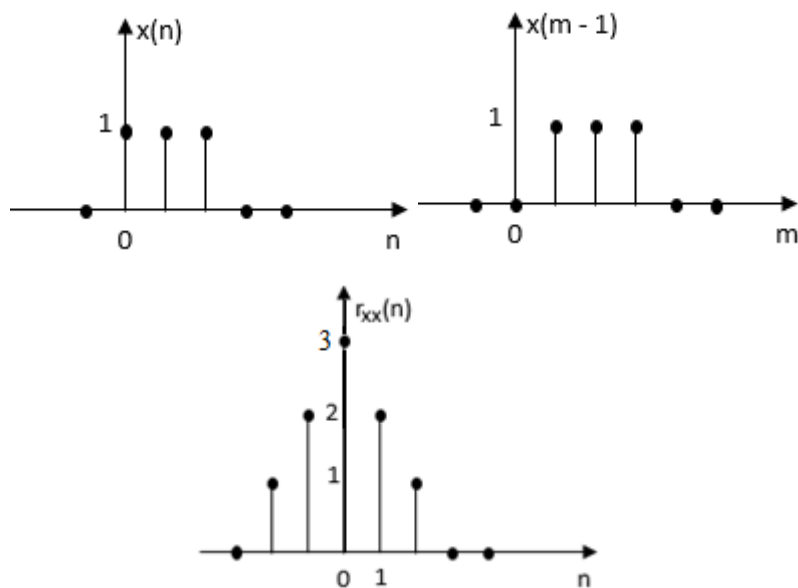
$$r_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n) \quad (2.47)$$

Ví dụ:

Cho dãy: $x(n) = \text{rect}_3(n)$

Hãy tìm hàm tự tương quan r_{xx} ?

Giải:



Hình 2.19: Hàm tự tương quan $r_{xx}(n)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 2.1

Đáp ứng xung của 1 hệ thống tuyến tính bất biến được cho bởi $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$$

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống này với kích thích $x(n) = \text{rect}_N(n)$

Bài 2.2

Cho 2 hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$ và $h_2(n)$ ghép nối tiếp với nhau:

$$h_1(n) = 2^n \quad \text{với mọi } n$$

$$h_2(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tổng quát

Hãy nhận xét tính nhân quả của hệ thống $h_1(n)$, $h_2(n)$ và hệ thống tổng quát

Bài 2.3

Cho 2 tín hiệu rời rạc $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$x_1(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_2(n) + u(n-2)$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2} u(n)$$

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến $h(n) = \text{rect}_6(n)$

Nhận xét tính bất biến nhân quả và tính ổn định

Bài 2.4

Hãy tính tích chập $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ với:

$$x_1(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x_2(n) = \text{rect}_6(n)$$

Bài 2.5

Hãy tìm đáp ứng ra $y(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến sau:

$$x(n) = \text{rect}_3(n+1)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Bài 2.6

Hãy giải phương trình sai phân bậc nhất sau đây:

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

Với điều kiện đầu $y(-1) = 0$; $x(n) = u(n)$

Bài 2.7

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$y(n) - 3y(n-1) + 5y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$, $x(n) = (-1)^n u(n)$

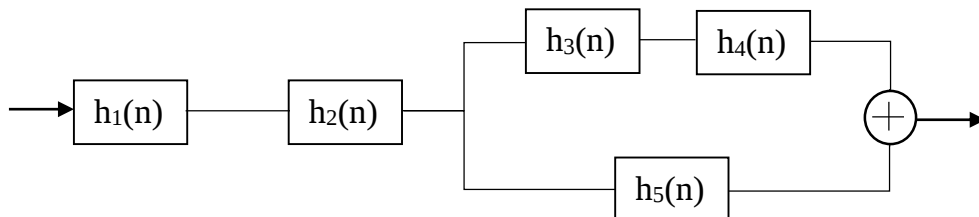
Bài 2.8

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n] - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

Bài 2.9

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ sau:



$$h_1(n) = \delta(n-4)$$

$$h_4(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_3(n-3)$$

$$h_2(n) = \text{rect}_4(n+4)$$

$$h_3(n) = \delta(n+2)$$

$$h_5(n) = \frac{1}{2} \text{rect}_3(n-1)$$

Bài 2.10

Hãy vẽ sơ đồ thực hiện các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

a. $y(n) - 2y(n-1) + 3y(n-2) = x(n) + x(n-1) + 2x(n-4)$

b. $2y(n) + 6y(n-3) + 3y(n-4) = x(n)$

Bài 2.11

Hãy tính tương quan chéo của các dãy sau đây:

$$x_1(n) = \{1, 2, 3, 1, 1\}$$

$\xrightarrow{0}$

$$x_2(n) = \{1, 1, 1, 2, 3\}$$

$\xrightarrow{0}$

Hãy cho nhận xét?

CHƯƠNG 3: BIỂU DIỄN VÀ PHÂN TÍCH HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

Trong chương 2 chúng ta đã khảo sát tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền biến số độc lập. Đây là cách khảo sát trực tiếp, nhưng nhiều trường hợp cách khảo sát trực tiếp này gặp phải những khó khăn hoặc phức tạp và không hiệu quả

Ngoài phương pháp khảo sát trực tiếp này chúng ta có thể dùng nhiều phương pháp khảo sát gián tiếp khác thông qua kỹ thuật biến đổi. Các biến đổi này làm nhiệm vụ chuyển miền biến số độc lập sang các miền khác và như vậy tín hiệu và hệ thống rời rạc sẽ được biểu diễn trong các miền mới với các biến số mới. Nếu cần chúng ta sẽ biến đổi ngược lại để đưa về biến số cũ

Phương pháp khảo sát gián tiếp này sẽ làm đơn giản rất nhiều công việc khi chúng ta dùng phương pháp khảo sát trực tiếp trong miền biến số độc lập

Trong chương này chúng ta sẽ dùng biến đổi Z (Z – Transform: ZT). Biến đổi Z đóng vai trò như biến đổi Laplace trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống liên tục

3.1 Biến đổi Z (ZT)

3.1.1 Định nghĩa biến đổi z hai phía và một phía

a. Biến đổi Z hai phía

Biến đổi Z hai phía của dãy $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (3.1)$$

Z: là biến số phức

Như vậy $X(Z)$ là biểu diễn $x(n)$ trong miền Z (tức trong mặt phẳng Z, vì Z là biến số phức và $X(Z)$ là hàm phức của biến số Z

Ký hiệu ZT:

$$ZT[x(n)] = X(Z) \quad (3.2)$$

$$x(n) \xrightarrow{ZT} y(n)$$

Theo định nghĩa ta thấy rằng biến đổi Z là chuỗi lũy thừa vô hạn, nó tồn tại chỉ đối với các giá trị của Z mà tại đó chuỗi này hội tụ

Ví dụ:

Tìm biến đổi Z của các tín hiệu có chiều dài hữu hạn sau:

$$x_1(n) = \delta(n)$$

$$x_2(n) = \delta(n - n_0) \quad n > 0$$

$$x_3(n) = 2\delta(n + 2) + \delta(n) + 3\delta(n - 1)$$

$$x_4(n) = 3\delta(n + 4) + \delta(n + 1)$$

Giải: Theo định nghĩa ta có:

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = 1.Z^0 = 1$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = 1.Z^{-n_0} = Z^{-n_0}$$

$$X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)Z^{-n} = 2.Z^2 + 1 + 3Z^{-1}$$

$$X_4(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_4(n)Z^{-n} = 3.Z^4 + Z^1$$

Nhận xét:

$X_1(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z , tức là $ZT[x_1(n)]$ hội tụ trong toàn bộ mặt phẳng Z

$X_2(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z , trừ $Z = 0$, tức là $ZT[x_2(n)]$ hội tụ trong toàn bộ mặt phẳng Z , trừ gốc tọa độ

$X_3(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z , trừ $Z = 0$ và $Z = \infty$, tức là $ZT[x_3(n)]$ hội tụ trong toàn bộ mặt phẳng Z , trừ gốc tọa độ và ∞

$X_4(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z , trừ $Z = \infty$, tức là $ZT[x_4(n)]$ hội tụ trong toàn bộ mặt phẳng Z , trừ ∞

Ví dụ:

Tìm ZT của các tín hiệu có chiều dài vô hạn sau:

$$x_5(n) = \begin{cases} e^{-0,5n} & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases}$$

$$x_6(n) = \begin{cases} e^{-0,5n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải:

$$X_5(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} e^{-0,5n} Z^{-n} = e.Z^2 + e^{0,5}Z + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-0,5}.Z^{-1})^n$$

$$= eZ^2 + e^{0,5}Z + \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| = e^{-0,5} \text{ và } Z \neq \infty$$

$$X_6(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0,5n} Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-0,5}.Z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0,5}$$

b. Biến đổi z một phía

Biến đổi Z một phía được định nghĩa như sau:

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} \quad (3.3)$$

Ký hiệu:

$$ZT^1[x(n)] = X^1(Z) \quad (3.4)$$

Sự khác nhau giữa biến đổi Z một phía và hai phía:

- Không biểu diễn được tín hiệu $x(n)$ đối với miền biến số độc lập âm ($n < 0$)
- Biến đổi Z 1 phía và 2 phía của tín hiệu nhân quả là như nhau
- Đối với tín hiệu nhân quả thì biến đổi Z 1 phía là duy nhất, vì tín hiệu nhân quả = 0 với $n < 0$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z một phía của các tín hiệu $x_1(n), \dots, x_6(n)$ ở 2 ví dụ biến đổi z hai phía

Giải:

Theo định nghĩa biến đổi Z một phía ta có:

$$X_1^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = 1 \cdot Z^0 = 1 \quad \text{với mọi } Z$$

$$X_2^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = 1 \cdot Z^{-n_0} = Z^{-n_0} \quad \text{với } Z \neq 0$$

$$X_3^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_3(n)Z^{-n} = 1 + Z^{-1} \quad \text{với } Z \neq 0$$

$$X_4^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_4(n)Z^{-n} = 0 \quad \text{với mọi } Z$$

$$X_5^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_5(n)Z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0,5}$$

$$X_6^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_6(n)Z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-0,5}Z^{-1}} \quad \text{với } |Z| > e^{-0,5}$$

Nhận xét:

Nếu $x(n)$ là nhân quả thì $ZT[x(n)] = ZT^1[x(n)]$

Nếu $x(n)$ là phản nhân quả thì $ZT^1[x(n)] = 0$ nhưng $ZT[x(n)] \neq 0$

Nếu $x(n)$ là không nhân quả thì $ZT^1[x(n)]$ là không duy nhất

Vậy:

$x_1(n), x_2(n), x_6(n)$ là các dãy nhân quả

$x_4(n)$ là các dãy phản nhân quả

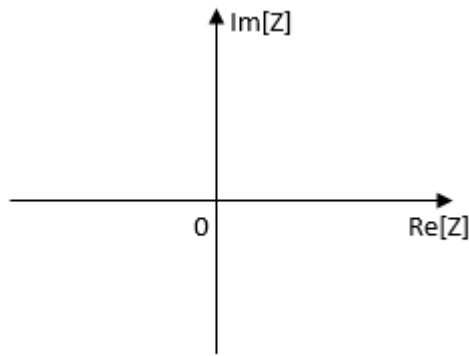
$x_3(n), x_5(n)$ là các không nhân quả

c. Mặt phẳng Z

Z là biến số phức vì vậy ta có thể viết dưới dạng phần thực và phần ảo

$$Z = \text{Re}[Z] + j\text{Im}[Z] \quad (3.5)$$

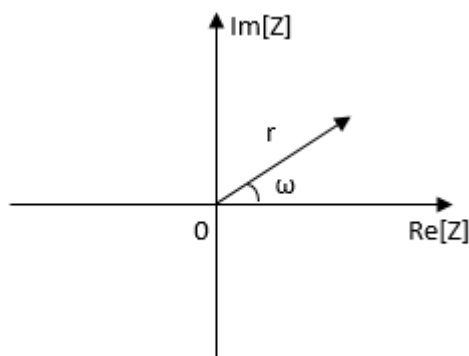
Mặt phẳng Z được tạo bởi trục tung $\text{Im}[Z]$ và trục hoành $\text{Re}[Z]$



Hình 3.1: Mặt phẳng Z

Ngoài ra có thể biểu diễn Z trong tọa độ cực và z được viết dưới dạng như sau:

$$Z = re^{j\omega} \quad (3.6)$$



Hình 3.2: Mặt phẳng Z trong hệ tọa độ cực

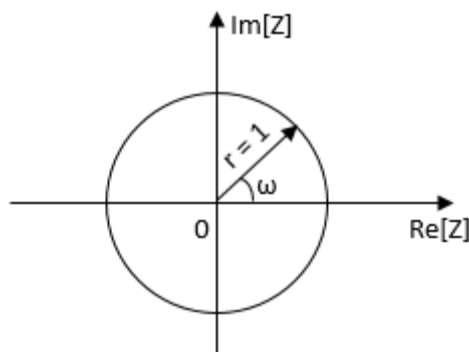
Ta có quan hệ giữa $\text{Re}[Z]$, $\text{Im}[Z]$ và r , ω như sau:

$$\text{Re}[Z] = r \cdot \cos\omega$$

$$\text{Im}[Z] = r \cdot \sin\omega$$

Ngoài ra trong mặt phẳng Z còn có 1 vòng tròn ứng với: $|Z| = r = 1$. Vòng tròn này gọi là vòng tròn đơn vị, trên vòng tròn đơn vị Z được đánh giá như sau:

$$Z = e^{j\omega}$$



Hình 3.3: Vòng tròn đơn vị

3.1.2 Sự tồn tại của biến đổi Z

a. Định nghĩa miền hội tụ của biến đổi Z

Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi $X(Z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z hai phía

Đối với biến đổi Z một phía cũng có định nghĩa tương tự

Ví dụ:

Cho tín hiệu rời rạc sau đây:

$$x(n) = \begin{cases} 2^n & \infty \leq n \leq 2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy xác định biến đổi Z hai phía, một phía và xác định miền hội tụ của chúng

Giải:

Tín hiệu x(n) không là nhân quả có chiều dài $L[x(n)] = [-\infty, 2] = \infty$

+ Theo định nghĩa biến đổi Z hai phía ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n Z^{-n} = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n Z^{-n}$$

Đổi biến $n = -m$ ta có

$$X(Z) = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^m$$

$$\text{Đặt: } X_1(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^m = \frac{2^{-1}Z}{1 - 2^{-1}Z} = \frac{Z}{2 - Z} \quad \text{với } |Z| < 2$$

$$X_2(Z) = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 \quad \text{với } Z \neq 0$$

Vậy:

$$X(Z) = \frac{Z}{2 - Z} + 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 \quad \text{với } |Z| < 2 \text{ và } Z \neq 0$$

Như vậy miền hội tụ của X(Z) là miền nằm bên trong vòng tròn có bán kính = 2 trừ gốc tọa độ

+ Theo định nghĩa biến đổi Z một phía ta có:

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^2 2^n Z^{-n} = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 \quad \text{với } Z \neq 0$$

Vậy miền hội tụ của $X^1(Z)$ là toàn bộ mặt phẳng Z trừ gốc tọa độ $Z = 0$

b. Tiêu chuẩn Cauchy

Tiêu chuẩn Cauchy một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots \quad (3.7)$$

Hội tụ nếu điều kiện sau đây được thỏa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (3.8)$$

Ví dụ:

Xét sự hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=0}^{\infty} u(n) = 1 + 1 + 1 + \dots$
 $u(n) = 1$ với mọi $n > 0$

Giải:

Ứng dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |1|^{\frac{1}{n}} = 1$$

Chuỗi này không thỏa mãn điều kiện hội tụ Cauchy vậy chuỗi này phân kỳ

Ví dụ:

Xét sự hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

Giải:

Ứng dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{1}{3}\right)^n \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

Chuỗi này thỏa mãn điều kiện hội tụ Cauchy vậy chuỗi này hội tụ

c. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

Để áp dụng tiêu chuẩn Cauchy chúng ta có thể chia chuỗi $X(Z)$ thành hai chuỗi như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$$

+ Áp dụng chuỗi Cauchy cho chuỗi $X_1(Z)$

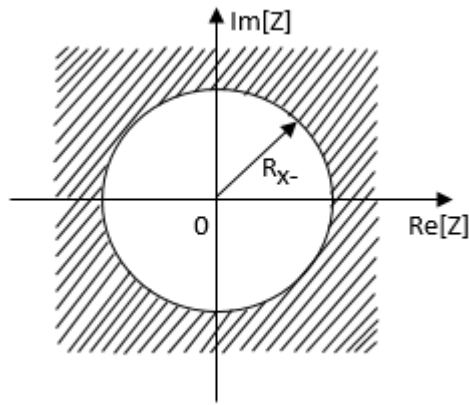
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)Z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} |Z^{-1}|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Đặt $R_x = \lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}}$

Ta có: $R_x |Z^{-1}| < 1$

Vậy $R_x < |Z|$

Khi đó $X_1(Z)$ sẽ hội tụ với $R_x < |Z|$ tức là bên ngoài vòng tròn, tâm là gốc tọa độ có bán kính R_x trong mặt phẳng Z



Hình 3.4: Miền hội tụ của chuỗi $X_1(Z)$

+ Áp dụng chuỗi Cauchy cho chuỗi $X_1(Z)$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)Z^{-n} - x(0)$$

Đổi biến số $l = -n$

Ta có:
$$X_2(Z) = \sum_{l=-\infty}^0 x(-l)Z^l - x(0)$$

Nếu $x(0)$ là số hữu hạn ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $X_2(Z)$ như sau:

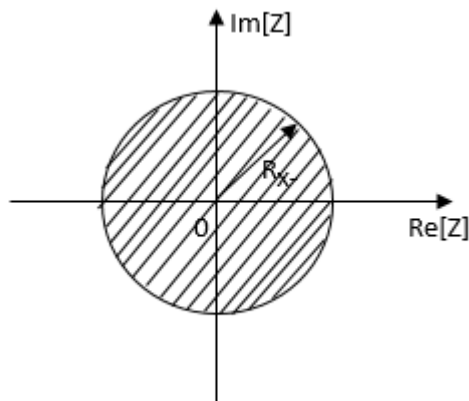
$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)Z^l|^{\frac{1}{l}} < 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{\frac{1}{l}} |Z| < 1$$

Đặt:
$$R_{x+} = \left[\lim_{l \rightarrow \infty} |x(-l)|^{\frac{1}{l}} \right]^{-1}$$

Ta có:
$$\frac{1}{R_{x+}} |Z| < 1$$

Vậy
$$R_{x-} > |Z|$$

Khi đó $X_1(Z)$ sẽ hội tụ với $R_{x-} > |Z|$ tức là bên trong vòng tròn, tâm là gốc tọa độ có bán kính R_{x+} trong mặt phẳng Z



Hình 3.5: Miền hội tụ của chuỗi $X_2(Z)$

Mà ta có: $RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$

Nếu: $R_{x-} < R_{x+}$

Thì miền hội tụ của $X(Z)$ là hình vành khăn có bán kính trong R_{x-} và bán kính ngoài R_{x+} , tâm là gốc tọa độ, trong mặt phẳng phức Z : $R_{x-} < Z < R_{x+}$

Nhận xét:

- Đối với tín hiệu nhân quả có chiều dài vô hạn $L[x(n)] = [0, \infty]$, miền hội tụ của biến đổi Z hai phía $X(Z)$ nằm ngoài vòng tròn có bán kính R_{x-}

- Đối với tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn $L[x(n)] = [0, \infty]$, miền hội tụ của biến đổi Z hai phía $X(Z)$ nằm trong vòng tròn có bán kính R_{x+}

- Nếu $R_{x-} > R_{x+}$ thì $RC[X(Z)] = \emptyset$ và từ đó $X(Z)$ sẽ không tồn tại

- Chuỗi $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$ có tên là chuỗi Laurent, là 1 hàm giải tích. Vì vậy trong miền hội tụ $RC[X(Z)]$ biến đổi Z $X(Z)$ và tất cả các đạo hàm của nó là liên tục của Z

3.1.3 Cực và không (Poles and Zeros)

Trong thực tế chúng ta thường gặp các biến đổi Z cho dưới dạng một thương số của hai đa thức của Z (hoặc Z^{-1}) như vậy $X(Z)$ là hàm hữu tỷ của Z :

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} \quad (3.9)$$

a. Định nghĩa không

Tại các điểm $Z = Z_{0r}$ ta có $X(Z_{0r}) = 0$ thì các điểm đó gọi là các không của $X(Z)$. Vậy nghiệm của tử số $N(Z)$ chính là không của $X(Z)$

Nếu $N(Z)$ là đa thức của Z bậc M thì $X(Z)$ có M không

b. Định nghĩa cực

Tại các điểm $Z = Z_{pk}$ ta có $X(Z_{pk}) = 0$ thì các điểm đó gọi là các cực của $X(Z)$. Vậy nghiệm của mẫu số $D(Z)$ chính là cực của $X(Z)$

Nếu $D(Z)$ là đa thức của Z bậc N thì $X(Z)$ có N không

c. Biểu diễn $X(Z)$ dưới dạng cực và không

Nếu $N(Z)$ là đa thức của Z bậc M : $N(Z) = b_0 + b_1Z + \dots + b_MZ^M$

Ta có thể viết:

$$N(Z) = b_M(Z - Z_{01})(Z - Z_{02})\dots(Z - Z_{0M}) = b_M \prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})$$

Ở đây Z_{0r} là các nghiệm của $N(Z)$

Nếu $D(Z)$ là đa thức của Z bậc N : $D(Z) = a_0 + a_1Z + \dots + a_NZ^N$

Ta có thể viết:

$$D(Z) = a_N(Z - Z_{p1})(Z - Z_{p2})\dots(Z - Z_{pN}) = a_N \prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})$$

Ở đây Z_{pk} là các nghiệm của $D(Z)$

$$\Rightarrow X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} = C \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} \quad (3.10)$$

Ta có thể biểu diễn $X(Z)$ theo đa thức của Z^{-1}

$$X(Z) = C \frac{Z^M \prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{Z^N \prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} = CZ^{M-N} \frac{\prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} \quad (3.11)$$

Vì có Z^{M-N} vậy nếu $M > N$ thì ta có $(M - N)$ Zeros ở $Z = 0$, còn nếu $M < N$ thì ta có $(N - M)$ Poles ở $Z = 0$

Nếu $X(\infty) = 0$ thì ta có Zero tại $Z = \infty$, nếu $X(\infty)$ thì ta có cực tại $Z = \infty$

Chú ý:

Từ biểu thức (3.10) và (3.11) ta thấy rằng $X(Z)$ có thể được biểu diễn chính xác bởi các cực và không

Trong mặt phẳng Z các cực sẽ được ký hiệu bằng dấu (x), còn các không được ký hiệu (o)

Ví dụ:

Cho $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ và các cực, các không của $X(Z)$

Giải:

$$X(Z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = 1 + 3Z^{-1} + 2Z^{-2}$$

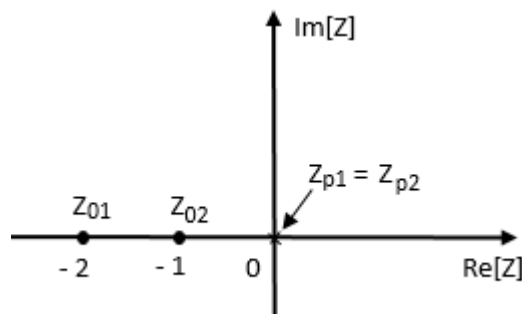
Miền hội tụ: toàn bộ mặt phẳng Z , trừ $Z = 0$

Cực và không:

$$X(Z) = Z^{-2}(Z^2 + 3Z + 2) = Z^{-2}(Z + 1)(Z + 2)$$

$$X(Z) = \frac{(Z+1)(Z+2)}{Z^2}$$

$X(Z)$ có 2 Zeros tại $Z_{01} = -1$ và $Z_{02} = -2$ và có 1 cực kép tại $Z = 0$; $Z_{p1} = Z_{p2} = 0$



Hình 3.6: Vị trí các cực và không của $X(Z)$

3.1.4 Tính chất của biến đổi Z

a. Tính tuyến tính

Ta có hai dãy $x_1(n)$, $x_2(n)$ và biến đổi Z của nó như sau:

$$ZT[x_1(n)] = X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n}$$

$$RC[X_1(Z)]: \quad R_{x_{1-}} < |Z| < R_{x_{1+}}$$

$$ZT[x_2(n)] = X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n}$$

$$RC[X_2(Z)]: \quad R_{x_{2-}} < |Z| < R_{x_{2+}}$$

Giả sử ta có dãy $x(n)$ là tổ hợp tuyến tính của 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \quad \text{với } a, b \text{ là các hằng số}$$

Biến đổi Z của $x(n)$ sẽ là:

$$\begin{aligned} ZT[x(n)] &= X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)]Z^{-n} \\ \Rightarrow X(Z) &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = aX_1(Z) + bX_2(Z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$RC[X(Z)]: \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

$$\text{Vậy: } RC[X(Z)] = RC[X_1(n)] \wedge RC[X_2(n)]$$

b. Trễ

$$\text{Giả sử ta có dãy } x(n) \text{ và } ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$RC[X(Z)]: \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Nếu như ta có $y(n)$ là dãy trễ của $x(n)$ như sau: $y(n) = x(n - n_0)$

$$ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)Z^{-n}$$

$$\text{Đổi biến số:} \quad l = n - n_0 \rightarrow n = l + n_0$$

$$\text{Ta có:} \quad Y(Z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-(l+n_0)} = Z^{-n_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)Z^{-l} = Z^{-n_0} X(Z)$$

$$\text{Với:} \quad RC[Y(Z)]: \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

$$\text{Vậy:} \quad ZT[x(n - n_0)] = Z^{-n_0} X(Z) \quad (3.13)$$

Chú ý:

$$\text{Nếu } n_0 > 0: \quad RC[Y(Z)]: \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+} \text{ và } Z \neq 0$$

Tức là ta có thêm 1 điểm cực $Z_{p1} = 0$

Nếu $n_0 < 0$: $RC[Y(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ và $Z \neq \infty$

Tức là ta có thêm 1 điểm không $Z_{01} = 0$

c. Nhân với dãy hàm mũ

Giả sử ta có dãy $x(n)$ và $ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$

Với: $RC[X(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

Nhân dãy $x(n)$ này với dãy hàm mũ a^n ta có:

$$y(n) = a^n x(n)$$

$$\rightarrow ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{Z}{a}\right)^{-n} = X \frac{Z}{a}$$

$$\text{Vậy } ZT[a^n u(n)] = X\left(\frac{Z}{a}\right) \quad (3.14)$$

$$\text{Và: } RC\left[X\left(\frac{Z}{a}\right)\right]: |a|R_{x-} < |Z| < |a|R_{x+}$$

d. Đạo hàm của biến đổi Z

Theo định nghĩa biến đổi Z ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Thì ta có:

$$\frac{dX(Z)}{dZ} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n) x(n) Z^{-n-1} \quad R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

Nhân cả hai vế với $-Z$ ta có:

$$-Z \frac{dX(Z)}{dZ} = -Z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n) x(n) Z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} n$$

Từ đây ta có thể viết:

$$ZT[nx(n)] = -Z \frac{dX(Z)}{dZ} \quad (3.15)$$

e. Dãy liên hợp phức

Giả sử chúng ta có 2 dãy: $x(n)$ và $x^*(n)$ (liên hợp phức)

Lấy biến đổi Z cả hai dãy ta có:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n}$$

$$ZT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) Z^{-n}$$

Mà ta có:

$$\begin{aligned} [X(Z)]^* &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \right]^* \\ X^*(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) (Z^*)^{-n} \\ X^*(Z^*) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) \left[(Z^*)^* \right]^{-n} \quad \text{mà } (Z^*)^* = Z \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } ZT[x^*(n)] = X^*(Z^*) \quad (3.16)$$

f. Tích chập của 2 dãy

Nếu ta có dãy $x(n)$ là tích chập của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) * x_2(n) \\ \rightarrow X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_1(n) * x_2(n)] Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) \right] Z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) Z^{-n} \end{aligned}$$

Đổi biến số:

$$m = n - k \Leftrightarrow n = m + k$$

Ta có

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) Z^{-m} \right] Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) Z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2(m) Z^{-m}$$

$$\text{Vậy: } X(Z) = X_1(Z) \cdot X_2(Z) \quad (3.17)$$

$$\text{Với } RC[X(Z)] = RC[X_1(n)] \wedge RC[X_2(n)]$$

g. Tích của hai dãy

Giả sử ta có dãy $x(n)$ là tích của 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

Thì trong miền Z ta có quan hệ sau:

$$X(Z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(\nu) X_2\left(\frac{Z}{\nu}\right) \nu^{-1} d\nu \quad (3.18)$$

$$\text{Với: } RC[X_1(Z)]: \quad R_{x_{1-}} < |Z| < R_{x_{1+}}$$

$$RC[X_2(Z)]: \quad R_{x_{2-}} < |Z| < R_{x_{2+}}$$

$$\rightarrow RC[X(Z)] = RC[X_1(n)] \wedge RC[X_2(n)]$$

$$\Leftrightarrow RC[X(Z)]: \quad \max[R_{x_{1-}}, R_{x_{2-}}] < |Z| < \min[R_{x_{1+}}, R_{x_{2+}}]$$

Quan hệ (3.13) còn gọi là tích chập phức

Chú ý: Đường cong kín của tích phân c phải được chọn trong miền giao của hai miền hội tụ của $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$ (chính là miền hội tụ của $X(Z)$)

h. Tương quan của hai tín hiệu

Ta có hàm tương quan của 2 tín hiệu được định nghĩa như sau:

$$r_{xy} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot y(m-n)$$

$$ZT[r_{xy}(n)] = R_{xy}(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xy}(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(m-n) \right] Z^{-n}$$

Đổi biến: $l = m - n, n = m - l$

Ta có:

$$R_{xy}(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(m) y(l) Z^{-(m-l)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) Z^{-m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) (Z^{-1})^{-l} = X(Z) Y\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Vậy $R_{xy}(Z) = X(Z) Y\left(\frac{1}{Z}\right)$ (3.19)

Với: $RC[X(Z)]: R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

$$RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]: \frac{1}{R_{y+}} < |Z| < \frac{1}{R_{y-}}$$

$$\Rightarrow RC[R_{xy}(Z)] = RC[X(Z)] \cap RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$$

$$\rightarrow \max\left[R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right] < |Z| < \min\left[R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right]$$

3.2 Biến đổi Z ngược

3.2.1 Định lý Cauchy

Định lý Cauchy là định lý quan trọng trong lý thuyết biến số phức, là cơ sở để xây dựng công thức biến đổi Z ngược

Phát biểu

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{n-1} dZ = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0 \\ 0 & \text{với } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ở đây c là đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức Z theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ)

3.2.2 Biến đổi Z ngược

Theo định nghĩa biến đổi Z ta có:

$$X(Z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l).Z^{-l}$$

Nhân hai vế với $\frac{Z^{n-1}}{2\pi j}$ và lấy tích phân theo chiều dài của 1 đường cong bao quanh gốc tọa độ và nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$, ta có:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) Z^{-l+n-1} dZ$$

Ở đây tích phân lấy trong miền hội tụ của $X(Z)$ tức là $X(Z)$ hội tụ khi lấy tích phân

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{-l+n-1} dZ$$

Theo định lý Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c Z^{-l+n-1} dZ = \begin{cases} 1 & \text{với } -l + n = 0 \\ 0 & \text{với } -l + n \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{hay } l = n \\ \text{hay } l \neq n \end{matrix}$$

Với $l = n$ ta có biểu thức biến đổi Z :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ \quad (3.21)$$

Đường cong c là đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức Z theo chiều dương và phải nằm trong miền hội tụ của $X(Z)$.

Ký hiệu biến đổi Z ngược:

$$IZT[X(Z)] = x(n)$$

Trong thực tế chúng ta có 3 cách biến đổi Z ngược :

- Phương pháp thặng dư : tính trực tiếp tích phân dùng lý thuyết thặng dư
- Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa theo Z hoặc Z^{-1}
- Phương pháp khai triển thành tổng các phân thức tối giản

a. Phương pháp thặng dư

Theo lý thuyết thặng dư của hàm biến số phức thì tích phân vòng trong biểu thức theo biến đổi Z ngược có thể được đánh giá bằng tổng các thặng dư như sau :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ = \sum_k \text{Res} \left[X(Z) Z^{n-1} \Big|_{Z=Z_{pk}} \right] \quad (3.22)$$

Z_{pk} : là cực của $X(Z) Z^{n-1}$ nằm trong đường cong khép kín c

$\text{Res} \left[X(Z) Z^{n-1} \Big|_{Z=Z_{pk}} \right]$ là thặng dư của $X(Z) Z^{n-1}$ tại cực $Z = Z_{pk}$. $X(Z) Z^{n-1}$ có bao nhiêu cực (đơn hoặc bội) thì phải tính đủ bấy nhiêu thặng dư, sau đó lấy tổng của tất cả các thặng dư này ta sẽ có $x(n)$

Nếu $X(Z) Z^{n-1}$ là 1 hàm hữu tỷ của Z thì ta có thể viết:

$$X(Z)Z^{n-1} = \frac{\psi(Z)}{(Z - Z_{pk})^{s_k}} \quad (3.23)$$

Z_{pk} : là cực bội bậc s_k của $X(Z)Z^{n-1}$

Chú ý : Trong trường hợp này $\psi(Z)$ không có cực tại $Z = Z_{pk}$ và ta có thể viết :

$$\psi(Z) = X(Z)Z^{n-1}(Z - Z_{pk})^{s_k} \quad (3.24)$$

Từ đây ta có công thức tính $\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\right]_{Z=Z_{pk}}$ như sau:

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\right]_{Z=Z_{pk}} = \frac{1}{(s_k - 1)!} \left. \frac{d^{s_k-1} \psi(Z)}{dZ^{s_k-1}} \right|_{Z=Z_{pk}} \quad (3.25)$$

Nếu Z_{pk} là cực đơn, tức là $s_k = 1$, thì biểu thức này có dạng đặc biệt sau đây :

$$\text{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\right]_{Z=Z_{pk}} = \frac{1}{0!} \left. \frac{d^0 \psi(Z)}{dZ^0} \right|_{Z=Z_{pk}} = \psi(Z)|_{Z=Z_{pk}} = \psi(Z_{pk}) \quad (3.26)$$

Sau khi tính tất cả các thặng dư của hàm $X(Z)Z^{n-1}$ ở tất cả các cực ở trong đường cong khép kín c và cộng chúng lại ta thu được $x(n)$

b. Phương pháp khai triển chuỗi lũy thừa

Ta biết rằng trong miền hội tụ của $X(Z)$ thì $X(Z)$ là hàm giải tích của Z , như vậy ta có thể khai triển $X(Z)$ thành chuỗi lũy thừa có dạng:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n Z^{-n} \quad (3.27)$$

Mà theo định nghĩa biến đổi Z ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).Z^{-n}$$

Cả hai chuỗi này đều hội tụ trong miền hội tụ của $X(Z)$. Đồng nhất các hệ số của 2 chuỗi này ta có $x(n) = \alpha_n$. Tức là các hệ số của Z^{-n} chính là các giá trị của $x(n)$

Ví dụ: Cho
$$X(Z) = \frac{Z}{Z+2}$$

Hãy tìm $x(n)$ với miền hội tụ của $X(Z)$: $\text{RC}[X(Z)]: |Z| > 2$

Giải:

$X(Z)$: $\text{RC}[X(Z)]: |Z| > 2$: miền ngoài vòng tròn bán kính 2. Vậy $x(n)$ là dãy nhân quả

$$X(Z) = \frac{Z}{Z+2} = \frac{1}{1+2Z^{-1}}$$

Ta tiến hành chia tử số của $X(Z)$ cho mẫu số của nó thì ta sẽ có chuỗi lũy thừa theo Z^{-1}

$$\begin{array}{r}
1 \\
1 + 2Z^{-1} \\
-2Z^{-1} \\
-2Z^{-1} - 4Z^{-2} \\
+4Z^{-2} \\
+4Z^{-2} + 8Z^{-3} \\
-8Z^{-3} \\
-8Z^{-3} - 16Z^{-4} \\
16Z^{-4}
\end{array}
\left| \begin{array}{l} 1 + 2Z^{-1} \\ 1 - 2Z^{-1} + 4Z^{-2} - 8Z^{-3} \end{array} \right.$$

Vậy: $X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n Z^{-n}$ với $|Z| > 2$

Ta được dãy $x(n)$ như sau: $x(n) = (-2)^n u(n)$

c. Phương pháp khai triển thành phương thức tối giản

Trong thực tế chúng ta thường sử dụng các biến đổi Z hữu tỷ, ta có thể viết biến đổi Z dưới dạng sau đây:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

Phương pháp này chính là việc tiến hành khai triển các biến đổi Z này thành các phân thức tối giản, sau đó tìm biến đổi Z ngược của các phân thức này, kết quả cuối cùng là tổng của các biến đổi Z ngược của các phân thức tối giản này

Phương pháp

Giả sử: $N(Z)$ là đa thức bậc M

$D(Z)$ là đa thức bậc N

+ Nếu $M \geq N$, ta tiến hành chia đa thức $N(Z)$ cho $D(Z)$ kết quả thu được dưới dạng tổng quát sau :

$$X(Z) = S(Z) + \frac{P(Z)}{Q(Z)} \quad (3.28)$$

$S(Z)$ là đa thức bậc $M - N$ có dạng:

$$S(Z) = B_{M-N}Z^{M-N} + B_{M-N-1}Z^{M-N-1} + \dots + B_1Z + B_0 \quad (3.29)$$

Bậc $P(Z)$ bé hơn bậc $Q(Z)$ và $Q(Z) = D(Z)$, vậy $Q(Z)$ là đa thức bậc N

+ Nếu $M < N$ thì $S(Z) = 0$ và

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} \quad (3.30)$$

Chúng ta khai triển thương số $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$ thành các phân thức tối giản trong các trường hợp sau:

- Trường hợp $X(Z)$ chỉ có cực đơn, $X(Z)$ được viết dưới dạng:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} \quad (3.31)$$

Z_{pk} là cực đơn của $X(Z)$ (Z_{pk} là các nghiệm đơn của $X(Z)$)

$$\text{Với } A_k = \left. (Z - Z_{pk}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right|_{Z=Z_{pk}} \quad (3.32)$$

- Trường hợp $X(Z)$ có 1 cực bội

Giả sử $X(Z)$ có 1 cực bội bậc s là Z_{pl} , các cực còn lại là cực đơn thì ta sẽ khai triển $X(Z)$ dưới dạng sau:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{j=1}^s \frac{c_j}{(Z - Z_{pl})^j} \quad (3.33)$$

Với Z_{pl} là cực bội bậc s , Z_{pk} là các cực đơn

A_k và c_j được tính như sau:

$$A_k = \left. (Z - Z_{pk}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right|_{Z=Z_{pk}}$$

$$c_j = \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j}}{dZ^{s-j}} \left[(Z - Z_{pl})^s \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right] \Big|_{Z=Z_{pl}} \quad (3.34)$$

- Trường hợp $X(Z)$ có L cực bội

Giả sử $X(Z)$ có L cực bội $s_1, s_2, \dots, s_n$, các cực còn lại là cực đơn thì ta khai triển $X(Z)$ dưới dạng sau:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^{N-\sum_{i=1}^L s_i} \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{s_i} \frac{c_{js_i}}{(Z - Z_{pli})^j} \quad (3.35)$$

Với Z_{pk} là các cực đơn, Z_{pli} là các cực bội bậc s_i

A_k và c_{js_i} được tính như sau:

$$A_k = \left. (Z - Z_{pk}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right|_{Z=Z_{pk}}$$

$$c_{js_i} = \frac{1}{(s_i-j)!} \frac{d^{s_i-j}}{dZ^{s_i-j}} \left[(Z - Z_{pli})^{s_i} \frac{P(Z)}{Q(Z)} \right] \Big|_{Z=Z_{pli}} \quad (3.36)$$

Sau khi khai triển $X(Z)$ xong ta sẽ tìm IZT của từng phân thức rồi tổng hợp kết quả ta sẽ có $x(n)$

IZT của các phân tử sẽ được tìm bởi các công thức sau:

$$\begin{aligned} \text{IZT} \left[\frac{Z}{Z - Z_{pk}} \right] &= (Z_{pk})^n u(n) \\ \text{IZT} \left[\frac{Z}{Z - Z_{pk}} \right] &= (Z_{pk})^{n-1} u(n-1) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Trường hợp tổng quát ta có:

$$\text{IZT} \left[\frac{Z}{(Z - Z_{pk})^{m+1}} \right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} (Z_{pk})^{n-m} u(n) \quad (3.38)$$

Với $|Z| > |Z_{pk}|$

$$\text{IZT} \left[\frac{Z}{(Z - Z_{pk})^{m+1}} \right] = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} (Z_{pk})^{n-m} u(-n-1) \quad (3.39)$$

Với $|Z| < |Z_{pk}|$

Ví dụ:

Cho
$$X(Z) = \frac{Z+2}{2Z^2 - 7Z + 3}$$

Hãy tìm $x(n)$ bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản

Giải:

Ta có:
$$X(Z) = \frac{Z+2}{2Z^2 - 7Z + 3} = \frac{Z-2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)}$$

Vậy $X(Z)$ có 2 điểm cực là: $Z_{p1} = \frac{1}{2}$ và $Z_{p2} = 3$

Theo công thức (3.31) ta có:

$$X(Z) = \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})}$$

A_1 và A_2 được tính theo công thức (3.32)

$$A_1 = (Z - Z_{p1}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \Big|_{Z=Z_{p1}} = \left(Z - \frac{1}{2} \right) \frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)} \Big|_{Z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = (Z - Z_{p2}) \frac{P(Z)}{Q(Z)} \Big|_{Z=Z_{p2}} = (Z-3) \frac{Z+2}{2 \left(Z - \frac{1}{2} \right) (Z-3)} \Big|_{Z=3} = 1$$

Vậy

$$X(Z) = \frac{-\frac{1}{2}}{Z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{Z-3}$$

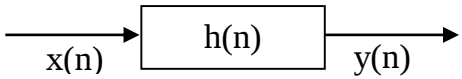
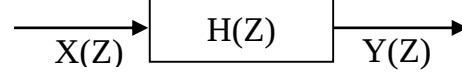
$$\rightarrow x(n) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u(n-1) + 3^{n-1} u(n-1) = 3^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n-1)$$

3.3 Phân tích hệ thống LTI trong miền Z

3.3.1 Hàm truyền đạt

a. Định nghĩa

So sánh quan hệ giữa đầu vào, đầu ra và đáp ứng xung trong miền n sau đó chuyển sang miền Z

Miền n	Miền Z
 $y(n) = x(n) * h(n)$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ $h(n) = \text{IZT}[H(Z)]$	 $Y(Z) = X(Z).H(Z)$ $X(Z) = \text{ZT}[x(n)]$ $H(Z) = \text{ZT}[h(n)]$ $Y(Z) = \text{ZT}[y(n)]$ $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

Hàm truyền đạt của một hệ thống rời rạc chính là biến đổi Z của đáp ứng xung và được ký hiệu là H(Z):

$$H(Z) = \text{ZT}[h(n)]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (3.40)$$

b. Phương trình sai phân mô tả hàm truyền đạt H(Z)

Quan hệ giữa đầu vào - đầu ra của 1 hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến và nhân quả được cho bởi phương trình sai phân sau :

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r)$$

Lấy biến đổi Z các thành phần của phương trình này ta có:

$$ZT \left[\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) \right] = ZT \left[\sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) \right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) \right] Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^M b_r \cdot x(n-r) \right] Z^{-n}$$

Sử dụng các tính chất tuyến tính và trễ của biến đổi Z ta có:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot ZT[y(n-k)] = \sum_{r=0}^M b_r \cdot ZT[x(n-r)]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot Z^{-k} Y(Z) = \sum_{r=0}^M b_r \cdot Z^{-r} X(Z)$$

$$Y(Z) \sum_{k=0}^N a_k \cdot Z^{-k} = X(Z) \sum_{r=0}^M b_r \cdot Z^{-r}$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}} \quad (3.41)$$

Ví dụ:

Hãy tìm hàm truyền đạt của một hệ thống không đệ quy

Giải

Trong trường hợp hệ thống không đệ quy thì $N = 0$ vậy ta có:

$$H(Z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{a_0}$$

Nếu $a_0 = 1$ thì: $H(Z) = \sum_{r=0}^M b_r Z^{-r} \quad (3.42)$

c. Biểu diễn hàm truyền đạt bằng các điểm cực và điểm không

Hàm truyền đạt $H(Z)$ của 1 hệ thống rời rạc có thể được biểu diễn bằng các điểm cực và điểm không như sau:

$$X(Z) = c \frac{\prod_{r=1}^M (1 - Z_{0r} Z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - Z_{pk} Z^{-1})} = c Z^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (Z - Z_{0r})}{\prod_{k=1}^N (Z - Z_{pk})} \quad (3.43)$$

3.3.2 Sự kết nối của các hệ thống LTI

a. Phân tử trễ

Gọi $x(n)$ là đầu vào, $y(n)$ là đầu ra, quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phân tử trễ trong miền Z như sau:

$$y(n) = x(n-1)$$

Lấy biến đổi Z ta có: $ZT[y(n)] = ZT[x(n-1)]$

$$\Rightarrow Y(Z) = Z^{-1}X(Z)$$

b. Phần tử cộng

Gọi $x_i(n)$ là các đầu vào, $y(n)$ là đầu ra, quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử cộng trong miền Z như sau:

$$y(n) = \sum_{i=1}^M x_i(n)$$

Lấy biến đổi Z ta có: $ZT[y(n)] = ZT\left[\sum_{i=1}^M x_i(n)\right]$

$$\Rightarrow Y(Z) = \sum_{i=1}^M Z_i(Z)$$

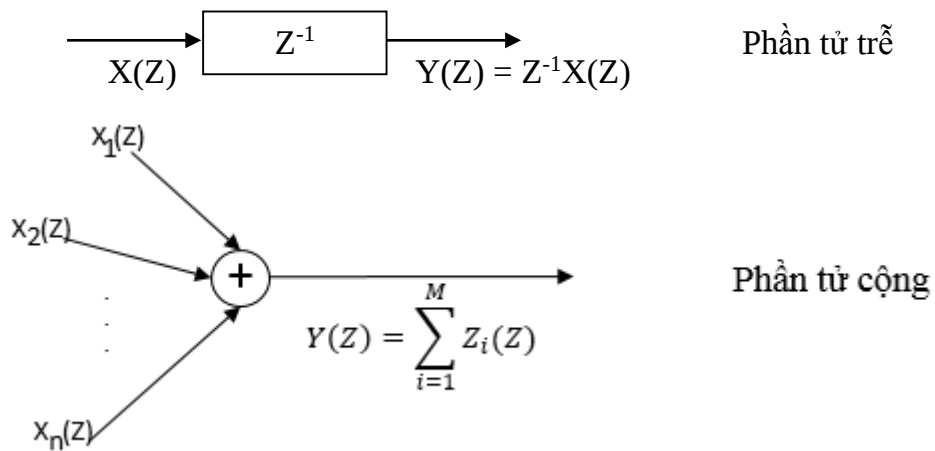
c. Phần tử nhân với hằng số

Gọi $x(n)$ là đầu vào, α là hằng số, $y(n)$ là đầu ra, quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử nhân với hằng số trong miền Z như sau:

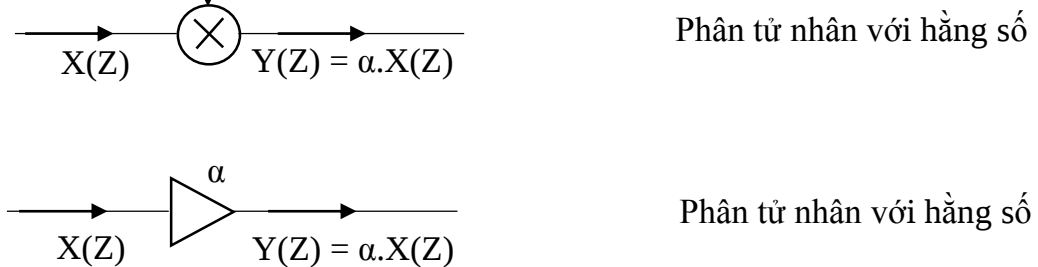
$$y(n) = \alpha x(n)$$

Lấy biến đổi Z ta có: $ZT[y(n)] = ZT[\alpha x(n)]$

$$\Rightarrow Y(Z) = \alpha X(Z)$$

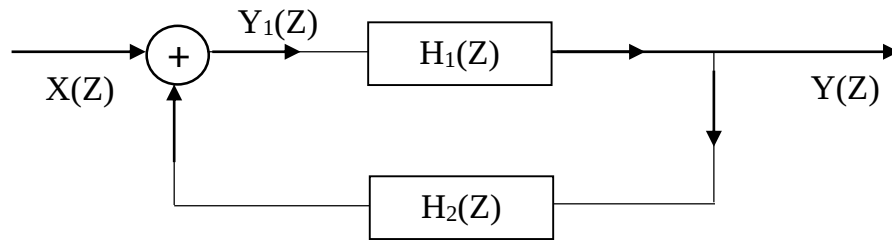


Hình 3.7 : Các phần tử thực hiện trong miền Z



Ví dụ:

Cho hệ thống rời rạc có sơ đồ khối như sau :



Hình 3.8: Sơ đồ khối hệ thống

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ chung của cả hệ thống

Giải:

Ta có $Y_1(Z) = X(Z) + H_2(Z)Y(Z)$

$$\begin{aligned} Y(Z) &= H_1(Z) \cdot Y_1(Z) = H_1(Z)[X(Z) + H_2(Z)Y(Z)] \\ &= H_1(Z)X(Z) + H_1(Z)H_2(Z)Y(Z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{H_1(Z)}{1 - H_1(Z)H_2(Z)}$$

3.4 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z

Việc giải phương trình sai phân thường đi kèm với điều kiện đầu khác 0. Vì vậy ta cần ứng dụng biến đổi Z 1 phía để giải phương trình

Ví dụ :

Giải phương trình sai phân sau :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

$$\text{với } x(n) = 3^{n-2}, \quad y(-2) = -\frac{4}{9}, \quad y(-1) = -\frac{1}{3}$$

Giải:

Lấy biến đổi Z 1 phía 2 vế của phương trình :

$$ZT^1[y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2)] = ZT^1[x(n)]$$

$$ZT^1[y(n)] + ZT^1[-3y(n-1)] + ZT^1[2y(n-2)] = ZT^1[x(n)]$$

$$Y^1(Z) - 3[Z^{-1}Y^1(Z) + y(-1)] + 2[Z^{-2}Y^1(Z) + Z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X^1(Z)$$

Thay điều kiện đầu ta có:

$$Y^1(Z)(1 - 3Z^{-1} + 2Z^{-2}) + 1 - \frac{2}{3}Z^{-1} - \frac{8}{9} = X^1(Z)$$

$$\text{Mà : } X^1(Z) = 3^{-2} \frac{1}{1 - 3Z^{-1}} = \frac{1}{9} \frac{Z}{Z - 3}$$

$$\rightarrow Y^1(Z) \frac{(Z-1)(Z-2)}{Z^2} = \frac{2}{3Z} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \frac{Z}{Z-3} = \frac{Z-2}{Z(Z-3)}$$

Vậy : $\rightarrow Y^1(Z) = \frac{Z}{(Z-1)(Z-3)}$

Dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản để tìm $y(n) = \text{IZT}[Y^1(Z)]$

$$\frac{Y^1(Z)}{Z} = \frac{A_1}{(Z-1)} + \frac{A_2}{(Z-3)}$$

Tìm các hệ số theo công thức (3.34) ta có: $A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}$

Vậy $Y^1(Z) = -\frac{1}{2} \frac{Z}{(Z-1)} + \frac{1}{2} \frac{Z}{Z-3}$

Tìm $\text{IZT}[Y^1(Z)]$ theo công thức (3.37) và (3.38) ta có $y(n)$ như sau:

$$y(n) = -\frac{1}{2} 1^n u(n) + \frac{1}{2} 3^n u(n) = \frac{1}{2} (3^n - 1) u(n)$$

3.5 Hệ thống ổn định và nhân quả

3.5.1 Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến

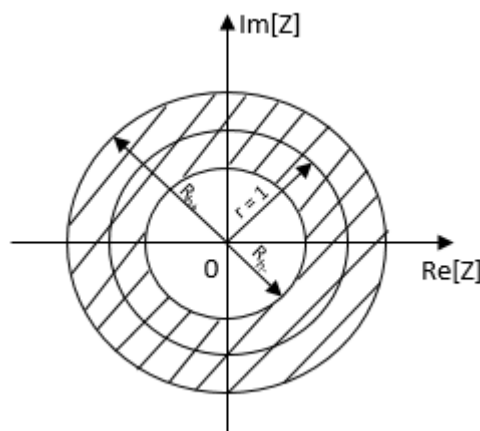
Trong miền n , một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu thỏa mãn điều kiện sau:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Ta chuyển sang miền Z , hàm truyền đạt $H(Z)$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) Z^{-n} \quad R_{h-} < |Z| < R_{h+}$$

So sánh điều kiện ổn định trong miền n với công thức tính $H(Z)$, ta thấy rằng muốn điều kiện ổn định trong miền n thỏa mãn thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải hội tụ với $|Z| = 1$ tức là trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z . Vì vậy miền hội tụ (miền vành khăn) của $H(Z)$ nhất thiết phải chứa vòng tròn đơn vị



Hình 3.9: Miền hội tụ của $H(Z)$ chứa vòng tròn đơn vị

Phát biểu:

Một hệ thống tuyến tính bất biến là ổn định nếu và chỉ nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống

3.5.2 Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả

Trong thực tế chúng ta chỉ gặp những hệ thống nhân quả vì vậy chúng ta sẽ nghiên cứu điều kiện ổn định đối với hệ thống nhân quả

Hàm truyền đạt $H(Z)$ được cho bởi công thức:

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} \quad \text{với } RC[H(Z)] \quad R_{h-} < |Z|$$

Với $R_{h-} = \lim_{n \rightarrow \infty} |h(n)|^{\frac{1}{n}}$ theo tiêu chuẩn Cauchy

Trong thực tế, hệ thống thực hiện được về mặt vật lý là hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định. Vậy để xét hệ thống này chúng ta kết hợp cả hai điều kiện nhân quả và ổn định

Ta thấy rằng đối với hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả thì hàm truyền đạt phải có miền hội tụ nằm ngoài vòng tròn bán kính R_{h-} .

$$RC[H(Z)]: \quad R_{h-} < |Z|$$

Còn đối với các hệ thống ổn định thì miền hội tụ của hàm truyền đạt $H(Z)$ phải chứa vòng tròn đơn vị. Vậy đối với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định thì hàm truyền đạt $H(Z)$ phải có miền hội tụ như sau:

$$\begin{aligned} RC[H(Z)]: \quad R_{h-} &< |Z| \\ R_{h-} &< 1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Điều kiện:

Một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt $H(Z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị

Ví dụ:

Cho một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có hàm truyền đạt $H(Z)$ sau:

$$H(Z) = \frac{Z^2 - Z + 1}{Z^2 - Z + \frac{1}{2}}$$

Xét sự ổn định của hệ thống?

Giải:

$H(Z)$ có 2 điểm cực:

$$Z_{p1} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad Z_{p1} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

Đây là 2 điểm cực phức nằm trong vòng tròn đơn vị. Vì vậy hệ thống này là ổn định

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 3.1

Hãy tìm biến đổi Z hai phía và miền hội tụ của dãy sau đây:

$$x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-|n|} \quad \text{mọi } n$$

Bài 3.2

Cho dãy: $x(n) = u(n) - u(-n - 1)$

Hãy tìm $X(Z)$, $X^1(Z)$ và miền hội tụ $X^1(Z)$ (biến đổi Z 1 phía)

Bài 3.3

Cho: $x(n) = 2^n \text{rect}_3(n)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và các không

Bài 3.4

Cho hai dãy:

a. $x(n) = a^n u(-n)$

b. $x(n) = -a^n u(-n - 1)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ, các cực và không

Bài 3.5

Cho: $X(Z) = \frac{Z^3}{Z - 1}$

Hãy tìm $x(n)$ dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản

Bài 3.6

Hãy tìm Z ngược ứng với dãy nhân quả của $X(Z)$ như sau:

$$X(Z) = \frac{4}{Z^3(2Z - 1)} \quad |Z| > \frac{1}{2}$$

Bài 3.7

Cho: $X(Z) = \frac{4Z^2 + 8Z}{4Z^2 - 5Z + 1}$

Dùng phương pháp triển khai thành phân thức tối giản, tìm biến đổi Z ngược nhân quả của $X(Z)$

Bài 3.8

Cho: $X(Z) = \frac{1}{1 - \sqrt{3}Z^{-1} + Z^{-2}}$

Dùng phương pháp triển khai thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi Z ngược của $X(Z)$

Bài 3.9

Một hệ thống tuyến tính bất biến có phương trình sai phân như sau:

$$y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$$

với điều kiện đầu là: $y(-1) = y(-2) = 0$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$ của hệ thống
- Hãy nghiên cứu tính ổn định và tính nhân quả của hệ thống
- Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống

Bài 3.10

Hãy dùng biến đổi Z 1 phía để giải phương trình sai phân sau

a. $y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$

Điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 1$

b. $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Điều kiện đầu: $y(-1) = 1$

Bài 3.11

Dựa vào vị trí các điểm cực trên mặt phẳng Z để xác định độ ổn định của các hệ thống có hàm truyền đạt như sau:

a. $H_1(Z) = 1 + Z^{-1} - 2Z^{-2} + Z^{-3}$

b. $H_2(Z) = \frac{1 - Z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-2}\right)(1 - 0,3Z^{-1})}$

c. $H_2(Z) = \frac{1}{(Z + 0,5)(Z^2 - Z + 1)}$

Bài 3.12

Cho: $X(Z) = \frac{Z^{-1}}{1 - \sqrt{2}Z^{-1} + Z^{-2}}$

Dùng phương pháp triển khai thành chuỗi lũy thừa, tìm biến đổi Z ngược của $X(Z)$

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH TÍN HIỆU RỜI RẠC Ở MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền tần số rời rạc ω_k hay ngắn gọn ta gọi là miền k . Thực chất cách biểu diễn này là ta lấy từng điểm rời rạc trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng Z để biểu diễn. Để chuyển cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc sang miền tần số rời rạc chúng ta sẽ dùng một công cụ toán học gọi là biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform: DFT). Việc biểu diễn trong miền tần số rời rạc đặt biệt hiệu quả khi xuất hiện các thuật toán tính nhanh DFT, còn gọi là biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform: FFT)

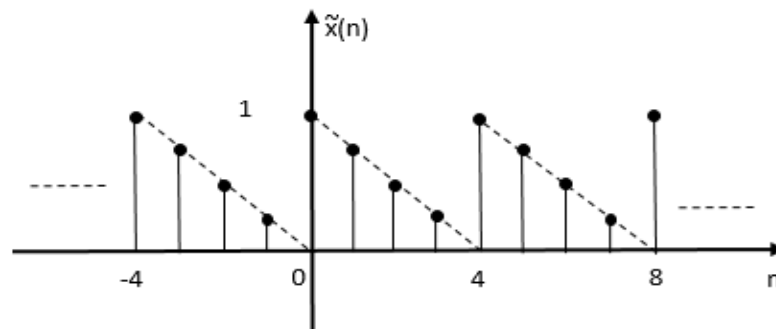
4.1 Phân tích tần số của tín hiệu rời rạc

4.1.1 Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

a. Tổng quan tín hiệu tuần hoàn

Giả sử chúng ta có dãy tuần hoàn có chu kỳ N là:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + lN) \text{ với } N \text{ là số nguyên} \quad (4.1)$$



Hình 4.1: Dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$

Ta thấy rằng 1 dãy tuần hoàn có thể được biểu diễn bởi 1 chuỗi Fourier, tức là 1 tổng của các dãy sin và cos hoặc bởi tổng của các dãy hàm mũ phức có tần số cơ bản $\frac{2\pi}{N}$

Giả sử chúng ta có dãy hàm mũ phức như sau:

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} \text{ với } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

Ta biết rằng:

$$e_0(n) = e^0 = 1$$

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n.k} = e^{j2\pi m} = 1$$

Vậy: $e_0(n) = e_N(n)$

$$e_1(n) = e_{N+1}(n)$$

$$e_2(n) = e_{N+2}(n)$$

$$e_3(n) = e_{N+3}(n)$$

.....

Như vậy chúng ta có thể biểu diễn dãy tuần hoàn có chu kỳ N dưới dạng sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (4.3)$$

$\tilde{X}(k)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N, hệ số $\frac{1}{N}$ dùng để tính toán $\tilde{X}(k)$ dưới dạng gọn hơn

Tính $\tilde{X}(k)$

Nhân 2 vế phương trình (4.3) với $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ ta có:

$$\tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

Lấy tổng theo n từ 0 đến (N - 1) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \\ \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \right] \end{aligned}$$

Ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n.r} = \begin{cases} N & \text{Với } r = lN \quad (l: \text{số nguyên}) \\ 0 & \text{Với } r \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.4)$$

Vậy:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Nếu $l = 0, k = m$ thì:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \right] = \tilde{X}(m)$$

Vậy:

$$\tilde{X}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

Hoặc ta có thể viết:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.5)$$

Chúng ta sẽ lấy cách biểu diễn $\tilde{X}(k)$ trong công thức (4.5) để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn

b. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.6)$$

Đặt: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Ta có:

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.7)$$

$$W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vậy: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (4.8)$

Ký hiệu:

$$DFT[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

Hoặc:

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$$

Ví dụ:

Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

Với chu kỳ N = 10. Hãy tìm $\tilde{X}(k)$

Giải:

Ta có: $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + l10)$

Áp dụng công thức (4.6) ta có:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 \tilde{x}(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j\frac{\pi}{10}k}}$$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j\pi k} \frac{\sin \frac{\pi k}{2}}{\sin \frac{\pi k}{10}} = 5e^{-j\frac{4\pi}{10}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{10}k}$$

Đặt:
$$\tilde{A}(k) = 5 \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k}$$

Ta có: $\tilde{X}(k) = e^{-j\frac{4\pi}{10}k} \cdot \tilde{A}(k) = |\tilde{X}(k)| e^{j\arg[\tilde{X}(k)]} = |\tilde{X}(k)| e^{j\varphi(k)}$

Chú ý: $A(k)$ là thực nhưng có thể là dương hoặc âm, vậy ta có hàm dấu của $A(k)$ là:

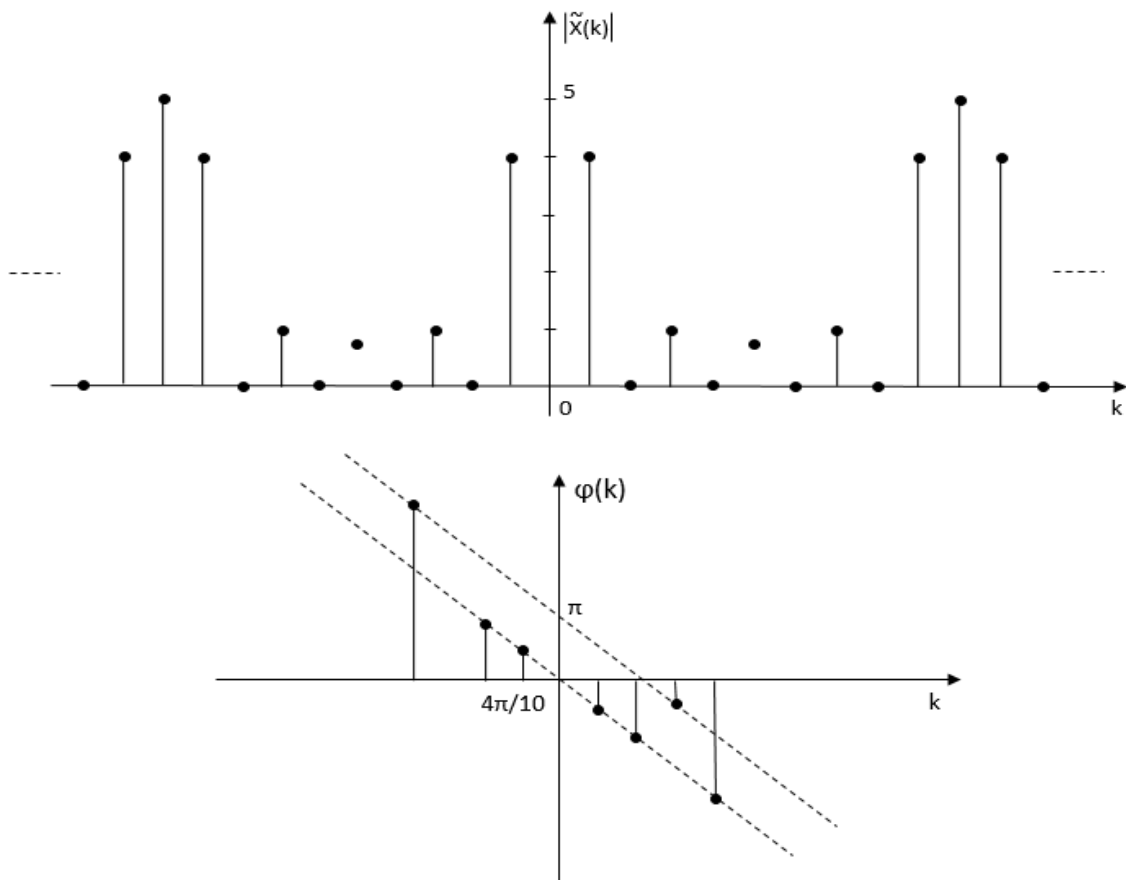
$$\text{Sgn}[\tilde{A}(k)] = \frac{\tilde{A}(k)}{|\tilde{A}(k)|}$$

$$\text{Sgn}[A(k)] = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \tilde{A}(k) \text{ dương} \\ -1, & \text{nếu } \tilde{A}(k) \text{ âm} \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$|\tilde{X}(k)| = |\tilde{A}(k)|$$

$$\varphi(k) = -\frac{4\pi}{10} + \frac{\pi}{2} \{1 - \text{Sgn}[A(k)]\}$$



Hình 4.2: Modun và pha của $\tilde{X}(k)$

c. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược

Biến đổi Fourier rời rạc ngược được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (4.9)$$

Hoặc:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (4.10)$$

Như vậy ta đã lấy cách biểu diễn tín hiệu tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N bởi tổng các dãy hàm mũ làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc ngược

Ký hiệu:

$$IDFT[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$$

Hoặc:

$$\tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFT} \tilde{x}(n)$$

Chú ý:

Trong những trường hợp cần nhấn mạnh chu kỳ của dãy tuần hoàn N ta dùng ký hiệu sau:

$$\tilde{x}(n)_N \text{ và } \tilde{X}(k)_N$$

d. Các tính chất

+ Tính tuyến tính

Cho 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N và dãy $\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$

Nếu ta có: $DFT[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$

$$DFT[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$$

Thì: $DFT[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (4.11)$

+ Tính chất trễ

Cho $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và $DFT[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$

Nếu ta có dãy $\tilde{x}(n+n_0)$ là dãy trễ của dãy $\tilde{x}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N thì:

$$DFT[\tilde{x}(n+n_0)] = W_N^{-kn_0} \tilde{X}(k) \quad (4.12)$$

+ Tính đối xứng

Cho $\tilde{x}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và $DFT[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$

Nếu ta có dãy $\tilde{x}^*(n)$ là dãy liên hợp phức của dãy $\tilde{x}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N thì:

$$DFT[\tilde{x}^*(n)] = \tilde{X}^*(-k) \quad (4.13)$$

+ Tích chập tuần hoàn

Cho 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N và dãy $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)$

Nếu ta có: $\text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$

$\text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$

Thì: $\text{DFT}[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$ (4.14)

+ Tích của hai dãy

Nếu chúng ta có tích của 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N là 1 dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn cũng có chu kỳ N như sau:

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$$

Và: $\text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$

$\text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$

Thì: $\text{DFT}[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) (\tilde{*})_N \tilde{X}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \cdot \tilde{X}_2(k-l)$ (4.15)

+ Tương quan tuần hoàn

Nếu chúng ta có 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ có cùng chu kỳ N thì hàm tương quan chéo của 2 dãy này sẽ được tính toán trên 1 chu kỳ và được cho bởi công thức:

$$\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \cdot \tilde{x}_2(m-n)$$

Và: $\text{DFT}[\tilde{x}_1(n)] = \tilde{X}_1(k)$

$\text{DFT}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_2(k)$

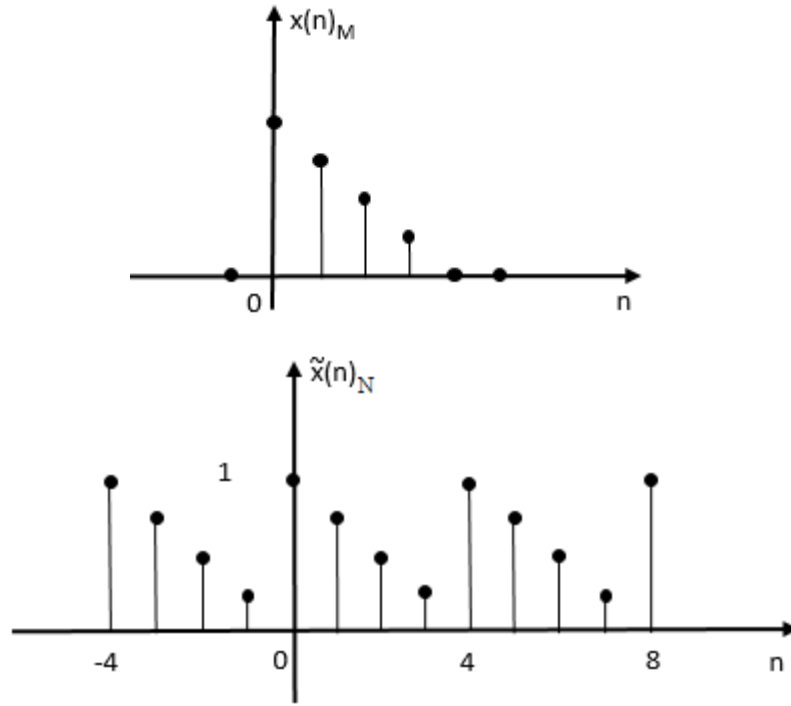
Thì: $\text{DFT}[\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n)] = \tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(-k)$ (4.16)

4.1.2 Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn

a. Tổng quan

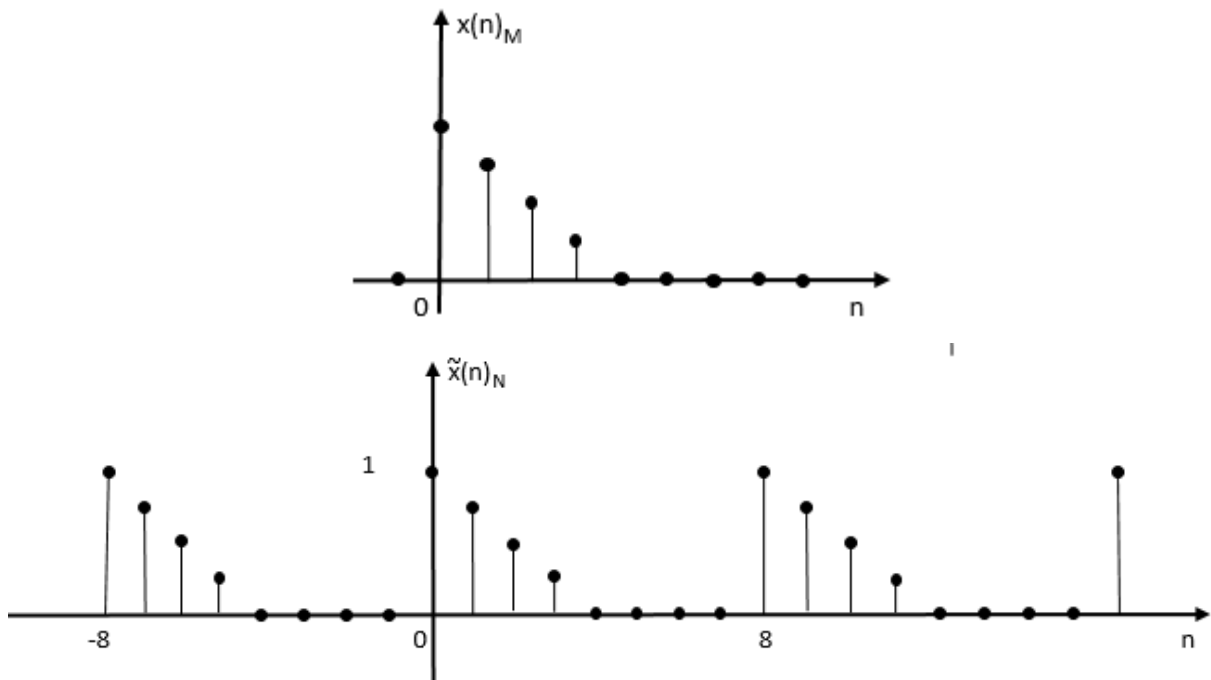
Nếu chúng ta có 1 dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn M và 1 dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Nếu $M = N$ thì dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ chính bằng chính xác 1 chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ $N = M$ $\tilde{x}(n)_N$



Hình 4.3: Dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$ ($M = N = 4$)

Nếu $M < N$ thì dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ sẽ có thể bằng chính 1 chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ khi chúng ta coi dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ là 1 dãy có chiều dài N bằng cách kéo dài dãy này thêm $N - M$ mẫu có giá trị không



Hình 4.4: Dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$ ($M = 4, N = 8$)

Vì vậy nếu $N \geq M$ ta có thể viết:

$$\tilde{x}(n)_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (x(m + rN))_M$$

Hoặc: $\tilde{x}(n)_N = x(n \bmod N) = x(n)_N$

Rõ ràng dãy $x(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N nhận được bằng cách trích ra 1 chu kỳ của dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_N$ có chu kỳ N , tức là:

$$x(n)_N = \begin{cases} x^2(n)_N, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Để nhận được 1 dãy $x(n)$ có chiều dài hữu hạn chúng ta có thể sử dụng 1 dãy chữ nhật

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$x(n)_N = \tilde{x}(n)_N rect_N(n)$$

Chúng ta có tính đối ngẫu giữa miền n và miền k . Vì vậy trong miền k , đối với dãy $X(k)$ ta cũng có thể viết:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k)_N &= X(k, \text{mod } N) = X(k)_N \\ X(k)_N &= \begin{cases} \tilde{X}(k)_N, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ X(k)_N &= \tilde{X}(k)_N rect_N(k) \end{aligned}$$

Biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N chỉ tính trong 1 chu kỳ rồi kết quả đó được tuần hoàn hóa từ $-\infty$ đến $+\infty$ với chu kỳ N . Vậy ta có thể lấy định nghĩa của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N nhưng không được tuần hoàn hóa mà chỉ lấy từ 0 đến $N-1$

b. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau:

+ Biến đổi Fourier thuận

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & K \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.17)$$

Ký hiệu:

$$IDFT[x(n)] = X(k)$$

Hoặc:

$$x(n) \xrightarrow{\text{DFT}} X(k)$$

+ Biến đổi Fourier ngược

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_n^{-kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & K \text{ còn lại} \end{cases} \quad (4.18)$$

Ký hiệu:

$$IDFT[X(k)] = x(n)$$

Hoặc:

$$X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n)$$

$X(k)$ là phổ rời rạc của tín hiệu $x(n)$, biểu diễn dưới dạng modul và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)] \quad (4.19)$$

Ví dụ:

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải:

Theo định nghĩa DFT ta có:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & K \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} (a W_N^k)^n = \frac{1 - (a W_N^k)^N}{1 - a W_N^k} \\ 0 \end{cases}$$

Mà $W_N^{kn} = 1 \quad \forall k$

Vậy:

$$X(k) = \frac{1 - a^N}{1 - a W_N^k} = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \frac{1 - a^N}{\sqrt{\left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k\right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N} k}} = \frac{1 - a^N}{\sqrt{1 - 2a \cos \frac{2\pi}{N} k + a^2}}$$

$$X(k) = \frac{1 - a^N \left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k - ja \sin \frac{2\pi}{N} k\right)}{\left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k\right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N} k}$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)] = \arctg \frac{\text{Im}[X(k)]}{\text{Re}[X(k)]} = -\arctg \left(\frac{a \sin \frac{2\pi}{N} k}{1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k} \right) = \arctg \frac{a \sin \frac{2\pi}{N} k}{a \cos \frac{2\pi}{N} k - 1}$$

c. Tính chất

+ Tính tuyến tính

DFT là 1 biến đổi tuyến tính, nếu ta có 2 dãy có chiều dài hữu hạn $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ và dãy $\tilde{x}_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của 2 dãy này, tức là:

$$\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$$

Nếu ta có: $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$

$$\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

Thì: $\text{DFT}[x_3(n)] = X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$ (4.20)

Chú ý:

Nếu chiều dài của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là khác nhau

$$L[x_1(n)] = N_1$$

$$L[x_2(n)] = N_2$$

Thì ta phải chọn chiều dài của dãy $x_3(n)$ như sau

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max(N_1, N_2)$$

Và tất cả các $\text{DFT}[x_1(n)]$, $\text{DFT}[x_2(n)]$, $\text{DFT}[x_3(n)]$ đều phải tính trên N_3 mẫu. Giả sử $N_1 < N_2$ thì dãy $x_1(n)$ phải được kéo dài thêm $N_2 - N_1$ mẫu không và $\text{DFT}[x_1(n)]$ phải được tính trên $N_3 = N_2$ mẫu và $\text{DFT}[x_2(n)]$, $\text{DFT}[x_3(n)]$ cũng được tính trên $N_3 = N_2$ mẫu:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n)W_{N_2}^{kn} \equiv X_1(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n)W_{N_2}^{kn} \equiv X_2(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

$$X_3(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_3(n)W_{N_2}^{kn} \equiv X_3(k)_{N_3} \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1$$

+ Tính chất trễ vòng

Dựa vào trễ tuyến tính và trễ tuần hoàn ta có thể kết luận trễ vòng

Ta có: $x(n - n_0)$: trễ tuyến tính

$\tilde{x}(n - n_0)_N$: trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n - n_0)_N$: trễ vòng với chiều dài N

Ta thấy rằng nếu trích ra 1 chu kỳ (từ 0 đến $N - 1$) của trễ tuần hoàn chu kỳ N thì ta sẽ được trễ vòng $x(n - n_0)_N$, so sánh với trễ tuyến tính $x(n - n_0)$ thì ta thấy rằng nếu các mẫu trễ tuyến tính vượt ra ngoài khoảng từ 0 đến $N - 1$ thì nó sẽ vòng vào bên trong khoảng đó để làm sao dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_N$ xác định trong khoảng $[0, N - 1]$ thì trễ vòng của nó $x(n - n_0)_N$ xác định trong khoảng $[0, N - 1]$ chứ không được vượt ra ngoài khoảng đó

Vậy: Trễ vòng tương ứng với việc hoán vị vòng các mẫu của dãy $x(n)_N$ trong khoảng $[0, N - 1]$ và ta có thể viết:

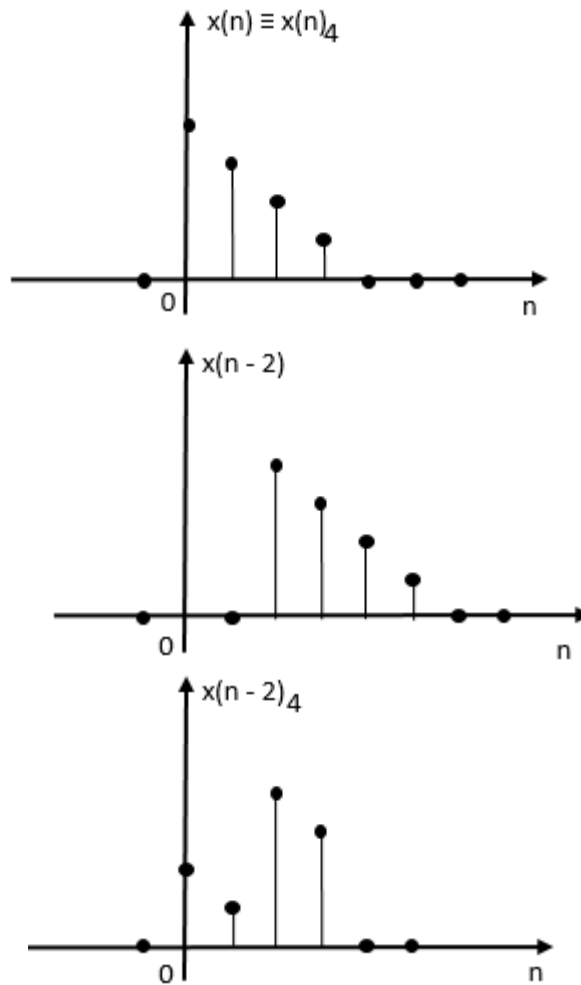
$$\begin{aligned} x(n)_N &= \tilde{x}(n)_N \text{rect}_N(n) \\ x(n \pm n_0)_N &= \tilde{x}(n \pm n_0)_N \text{rect}_N(n) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ví dụ: Cho dãy $x(n) \equiv x(n)_N$ sau:

$$x(n) \equiv x(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm trễ tuyến tính $x(n - 2)$ và trễ vòng $x(n - 2)_4$

Giải:



Hình 4.5: Trễ tuyến tính - Trễ vòng

Chúng ta đã xét bản chất của trễ vòng trong miền n , do tính đối ngẫu trong miền k ta cũng có bản chất tương tự, tức là:

$$\begin{aligned} X(k)_N &= \tilde{X}(k)_N \text{rect}_N(k) \\ X(k - k_0)_N &= \tilde{X}(k - k_0)_N \text{rect}_N(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

→ Tính chất trễ trong miền k :

Nếu ta có:

$$\text{DFT}[x(n)_N] = X(k)_N$$

Thì:

$$\text{DFT}[x(n - n_0)_N] = W_N^{kn_0} X(k)_N \quad (4.23)$$

Ví dụ:

Cho dãy có chiều dài hữu hạn sau:

$$x(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\text{DFT}[x(n - 3)_4]$

Giải:

Trước tiên ta tìm $\text{DFT}[x(n)_4]$ sau đó áp dụng tính chất trễ trong biểu thức (4.23)

$$X(k)_4 = \text{DFT}[x(n)_4]$$

$$X(0)_4 = \sum_{n=0}^3 x(n)_4 W_4^{0 \cdot n} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 \frac{1}{2}$$

$$X(1)_4 = \sum_{n=0}^3 x(n)_4 W_4^{1 \cdot n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^1 + \frac{1}{2} W_4^2 + \frac{1}{4} W_4^3 = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}$$

$$X(2)_4 = \sum_{n=0}^3 x(n)_4 W_4^{2 \cdot n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^2 + \frac{1}{2} W_4^4 + \frac{1}{4} W_4^6 = \frac{1}{2}$$

$$X(3)_4 = \sum_{n=0}^3 x(n)_4 W_4^{3 \cdot n} = 1 + \frac{3}{4} W_4^3 + \frac{1}{2} W_4^6 + \frac{1}{4} W_4^9 = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}$$

Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$\text{DFT}[x(n - 3)_4] = W_4^{3k} X(k)_4 = X'(k)_4 = e^{-j \frac{2\pi}{4} 3k} X(k)_4 = (-j)^{3k} x(k)_4 = (j)^k X(k)_4$$

Vậy:

$$X'(0)_4 = 2 \frac{1}{2}$$

$$X'(1)_4 = j \left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + j \frac{1}{2}$$

$$X'(2)_4 = j^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$X'(3)_4 = j^3 \left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2}$$

+ Tính đối xứng

Cho $x(n)_N$ là dãy có chiều dài hữu hạn N và $\text{DFT}[x(n)_N] = X(k)_N$

thì:

$$DFT[x^*(n)_N] = X^*(-k)_N \quad (4.24)$$

+ Tích chập vòng

Tích chập vòng của 2 dãy không tuần hoàn $x_1(n)_N$, $x_2(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N là 1 dãy không tuần hoàn cũng có chiều dài hữu hạn N $x_3(n)_N$ được cho bởi quan hệ sau:

$$x_3(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N \cdot x_2(n-m)_N \quad (4.25)$$

$$= x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N \quad (4.26)$$

Nếu ta có: $DFT[x_1(n)_N] = X_1(k)_N$

$$DFT[x_2(n)_N] = X_2(k)_N$$

Thì: $DFT[x_3(n)_N] = X_3(k)_N = X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N \quad (4.27)$

Ví dụ:

Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn: $x_1(n)_N = x_2(n)_N = \text{rect}_N(n)$.

Hãy tính $x_3(n)_N = x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$ thông qua DFT

Giải:

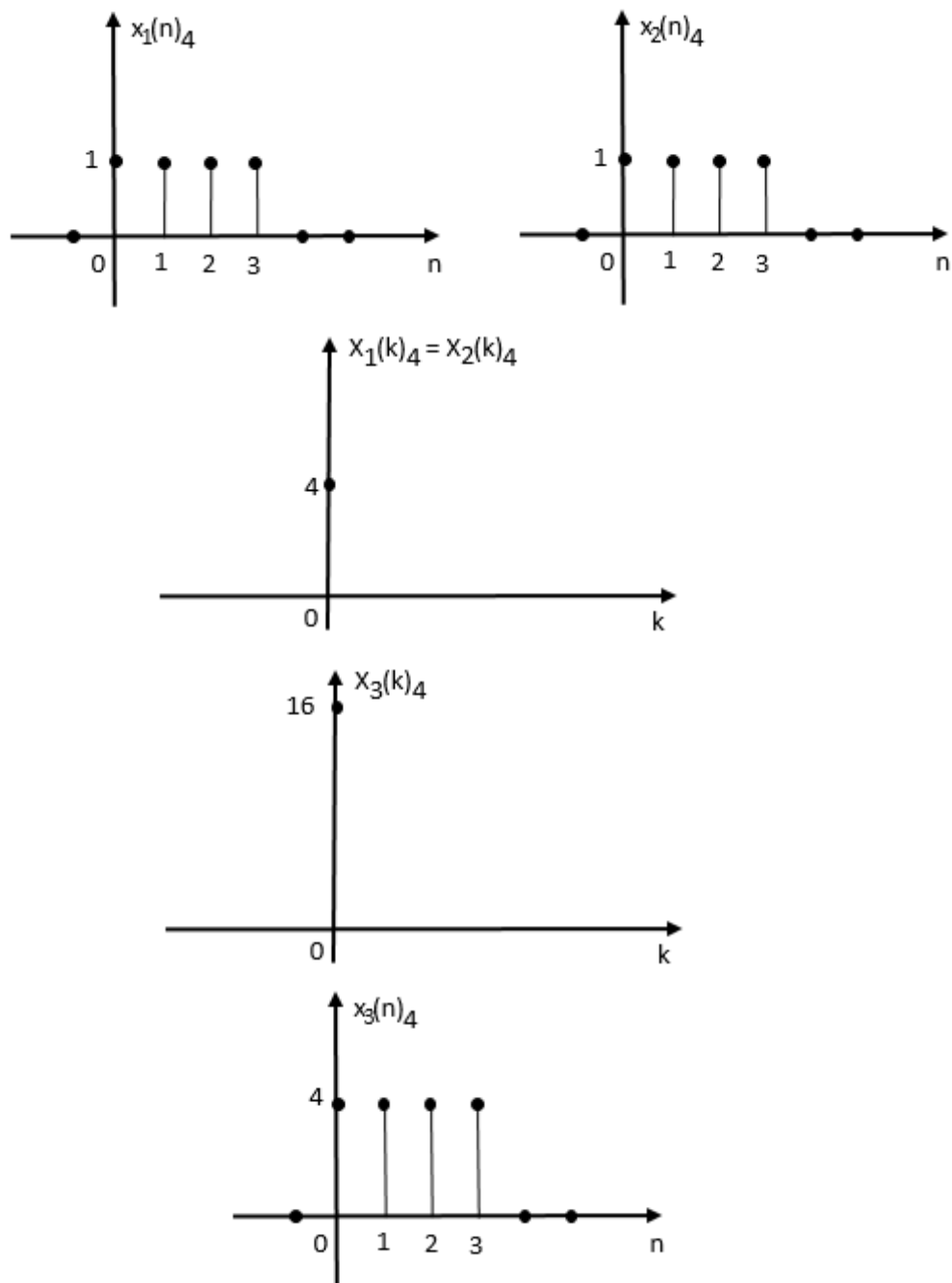
$$\begin{aligned} X_1(k)_N &= X_2(k)_N = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} \\ &= \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Áp dụng biểu thức (4.26) ta có:

$$\begin{aligned} X_3(k)_N &= X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N \\ &= \begin{cases} N^2, & k = 0 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Để tìm $x_3(n)_N$ ta áp dụng công thức IDFT

$$\begin{aligned} x_3(n)_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)_N W_N^{-kn} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} X_3(n)_N W_N^0, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} N, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$



Hình 4.6: Đồ thị minh họa tích chập vòng thông qua DFT

4.2 Quan hệ giữa DFT và ZT

4.2.1 Khôi phục biến đổi Z từ DFT

Giả sử có 1 dãy $x(n)_N$ có chiều dài hữu hạn N

Vậy ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)_N Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N Z^{-n}$$

Chúng ta có thể tìm $X(Z)$ theo hàm của $\text{DFT}[x(n)_N]$

$$\text{DFT}[x(n)_N] = X(k)_N$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{K còn lại} \end{cases}$$

$$\text{IDFT}[X(k)_N] = x(n)_N$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

Ta có ZT[x(n)_N] như sau:

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N W_N^{-kn} \right] Z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} Z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} Z^{-1})^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \frac{1 - (W_N^{-k} Z^{-1})^N}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} \end{aligned}$$

Nhưng $W_N^{-kn} = 1$

Vậy:

$$X(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} \quad (4.28)$$

Nhận xét:

- Chúng ta có thể nhận được biến đổi Z của 1 dãy có chiều dài hữu hạn từ N giá trị của X(k)_N

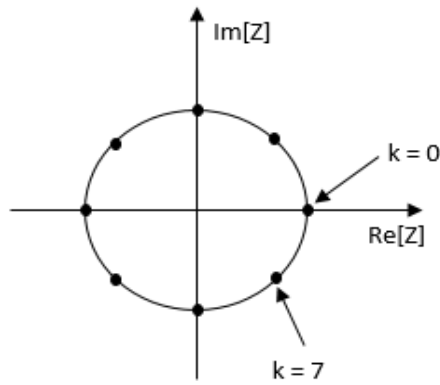
- N giá trị của X(k)_N chính là các mẫu của X(Z) được đánh giá trên vòng tròn đơn vị tại các điểm rời rạc $\frac{2\pi}{N}k$, vậy trên vòng tròn đơn vị ta lấy mẫu X(Z) tại các điểm như sau:

$$Z = e^{j\omega k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k}$$

Và ta có thể viết:

$$X(Z) \Big|_{Z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)_N W_N^{kn} = X(k)_N \quad (4.29)$$

Biểu thức (4.28) cho chúng ta công thức biến đổi Z của 1 dãy có chiều dài hữu hạn N từ N “mẫu tần số” của X(Z) trên vòng tròn đơn vị



Hình 4.7: “Các mẫu tần số” trên vòng tròn đơn vị với $N = 8$

4.2.2 Khôi phục biến đổi Fourier

Chúng ta có thể nhận được biến đổi Fourier từ biến đổi Z nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) = X(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)_N}{1-e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega\right)}} \end{aligned}$$

Ta biết rằng:

$$1-e^{-jx} = e^{-j\frac{x}{2}} \left(e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}} \right) = 2je^{-j\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2}$$

Vậy:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)_N \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} e^{-j \left[\frac{\omega(N-1)}{2} + \frac{\pi}{N}k \right]} \quad (4.30)$$

Biểu thức (4.29) chính là quan hệ cho phép ta tìm biến đổi Fourier bằng cách nội suy từ các giá trị $X(k)_N$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 4.1

Tính DFT với chiều dài $N = 16$ của các dãy sau:

$$x_1(n)_{16} = \begin{cases} 1, & \text{với } n = 0, 1, 2, 14, 15 \\ 0, & \text{với } 3 \leq n \leq 13 \end{cases}$$

$$x_2(n)_{16} = \begin{cases} 1, & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{với } 5 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

Hãy so sánh kết quả và rút ra nhận xét?

Bài 4.2

Cho 1 dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N và ta tạo 1 dãy mới $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn $M.N$ bằng cách sau đây:

$$x_2(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{M}\right), & \text{với } n = 0 \text{ Mod } M \\ 0, & \text{với } n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm $X_1(k)$?

Bài 4.3

Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 4, & n = 2 \\ 3, & n = 3 \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$?

Bài 4.4

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \delta(n)$$

Bài 4.5

Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)_4$ chu kỳ $N = 4$ sau đây:

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{với } n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{x}(n-2)_4$ và $\tilde{x}(n+2)_4$ sau đó lấy ra 1 chu kỳ của 2 dãy này

Bài 4.6

Cho dãy có chiều dài hữu hạn sau đây:

$$x(n)_8 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{với } n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy vẽ $x(n-3)_8$ và tìm $\text{DFT}[x(n-3)_8]$?

Bài 4.7

Cho 2 dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $N = 4$ như sau:

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x_2(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4}, & \text{với } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{với } n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập vòng chiều dài $N = 4$ của 2 dãy này

Bài 4.8

Hãy tính tích chập vòng với chiều dài $2N = 8$ của 2 dãy có chiều dài hữu hạn $N = 4$

$$x_1(n)_4 (*) x_2(n)_4 = x_3(n)_8 \quad \text{với} \quad x_1(n)_4 = x_2(n)_4 = \text{rect}_4(n)$$

Bài 4.9

Cho 2 dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn:

$$x_1(n) = \begin{cases} \neq 0, & \text{với } 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ = 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \neq 0, & \text{với } 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ = 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giả sử $N_1 < N_2$

Nếu chúng ta thực hiện tích chập tuyến tính: $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ và tích chập vòng với chiều dài N_2 : $x_3(n)_{N_2} = x_1(n)_{N_1} (*)_{N_2} x_2(n)_{N_2}$

Hãy xác định số mẫu mà tích chập tuyến tính trùng với tích chập vòng

Bài 4.10

Cho dãy $x_1(n)$ có chiều dài hữu hạn N . Ta tạo 1 dãy mới $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn N như $x_1(n)$ bằng cách sau đây:

$$x_2(n) = \tilde{x}_1(-n-1) \text{rect}_{MN}(n)$$

Hãy tìm $X_2(k)$ theo hàm $X_1(k)$?

CHƯƠNG 5: BIỂU DIỄN VÀ PHÂN TÍCH HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

5.1 Khái niệm.

5.1.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI.

Trong miền thời gian, một hệ thống LTI được đặc trưng bởi đáp ứng xung $h(n)$ của nó.

Với một tín hiệu vào $x(n)$ bất kỳ, đáp ứng của hệ thống được xác định bởi công thức tổng chập:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) \quad (5.1)$$

Hoặc phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x(n-k) \quad (5.2)$$

với các điều kiện đầu xác định.

Trong miền z , hệ thống được đặc trưng bởi hàm truyền đạt $H(z)$ và đáp ứng $y(n)$ được tính thông qua biến đổi Z , $Y(z)$, của nó:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (5.3)$$

Với $H(z)$ hàm truyền đạt của hệ thống và $X(z)$ biến đổi z của tín hiệu vào.

Bây giờ, để nghiên cứu đặc trưng của hệ thống trong miền tần số, ta xét trường hợp kích thích là tín hiệu mũ phức, đó là:

$$x(n) = Ae^{j\omega n}; -\infty < n < \infty \quad (5.4)$$

Với A là biên độ và ω là tần số được giới hạn trong khoảng $[-\pi, \pi]$;

Thay phương trình (5.4) vào phương trình (5.1) ta được:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Ae^{j\omega(n-k)}]h(k) \quad (5.5a)$$

$$\text{Hay } y(n) = A[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k}] \cdot e^{j\omega n} \quad (5.5b)$$

a) Cách tính hàm đáp ứng tần số.

Ta thấy, thừa số trong dấu ngoặc của phương trình (5.5b) là một hàm của biến tần số ω .

Đây chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(k)$ của hệ thống. Ta đặt:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \quad (5.6)$$

Rõ ràng $H(\omega)$ tồn tại nếu hệ thống ổn định, nghĩa là:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

$H(\omega)$ cũng chính là hàm truyền đạt $H(z)$ khi z được lấy trên vòng tròn đơn vị.

$H(\omega)$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống LTI.

Phương trình (5.5) được viết lại:

$$y(n) = A H(\omega) e^{j\omega n} \quad (5.7)$$

Ta thấy, đáp ứng với tín hiệu vào là hàm mũ phức cũng là một hàm mũ phức có cùng tần số với tín hiệu vào nhưng có biên độ và pha thay đổi (do nhân với $H(\omega)$).

b) Hàm riêng (eigenfunction) và trị riêng (eigenvalue) của hệ thống.

Xét một tín hiệu vào $x(n)$ sao cho đáp ứng $y(n)$ thỏa điều kiện:

$$y(n) = \beta x(n) \quad (5.8)$$

Với β là một hằng số đối với biến n .

Khi đó $x(n)$ được gọi là hàm riêng của hệ thống và thừa số β được gọi là trị riêng của hệ thống.

Từ phương trình (5.7) ta thấy tín hiệu hàm mũ phức $x(n)$: $Ae^{j\omega n}$ (n chính là hàm riêng của hệ thống LTI và $H(\omega)$ được xác định ở tần số của tín hiệu vào chính là trị riêng tương ứng).

Ví dụ 5.1: Hãy xác định tín hiệu ra của hệ thống có đáp ứng xung là:

$$h(n) = (1/2)^n u(n)$$

với tín hiệu vào là một dãy hàm mũ phức: $x(n) = A \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n}$; $-\infty < n < \infty$

Giải:

Đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Tại tần số: $\omega = \frac{\pi}{2}$, ta có: $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot e^{-j26.6^\circ}$

Tín hiệu ra là:

$$y(n) = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26.6^\circ} \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = A \frac{\sqrt{2}}{5} e^{j\left(\frac{\pi}{2}n - 26.6^\circ\right)}; -\infty < n < \infty$$

Ta thấy $y(n)$ có cùng tần số với $x(n)$ có biên độ thay đổi bởi tần số $\frac{\sqrt{2}}{5}$ và pha dịch là -26.6° .

c) Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

Nói chung, $H(\omega)$ là một hàm có giá trị phức của biến tần số. Vì vậy nó có thể biểu diễn dưới dạng cực:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (5.9)$$

Trong đó $|H(\omega)|$ là biên độ và pha, $\theta = \angle H(\omega)$ là sự dịch pha được truyền vào tín hiệu vào ở tần số ω .

Để làm nổi các múi bên (sidelobes) hay các gợn sóng (ripples) trên đặc tuyến biên độ, người ta dùng giai logarit hay decibel (dB) cho trục biên độ, còn trục tần số vẫn theo giai số tuyến tính. Biên độ được định nghĩa như sau:

$$|H(\omega)| \text{ dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| \quad (5.10)$$

Nhận xét:

- (1) $H(\omega)$ là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π . Đây là một tính chất quan trọng của $H(\omega)$. Thấy vậy, từ định nghĩa (5.6) với một số nguyên m bất kỳ ta có:

$$H(\omega + 2\pi m) = H(\omega) \quad (5.11)$$

- (2) Từ công thức biến đổi Fourier ngược ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (5.12)$$

- (3) Vì $H(\omega)$ là biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc $h(n)$ nên nó thỏa mãn các tính chất của biến đổi Fourier đã trình bày trong chương 4.
- (4) Vì $H(\omega)$ là biến đổi Z của $h(n)$ với z trên vòng tròn đơn vị nên các phương trình của $H(z)$ cũng có thể áp dụng cho $H(\omega)$, nếu miền hội tụ của $H(z)$ chứa vòng tròn đơn vị (hệ thống ổn định) và thay $z = e^{j\omega}$.

Ví dụ 5.2:

Hãy xác định biên độ và pha của $H(\omega)$ cho một hệ thống trung bình di động ba điểm được biểu diễn bởi quan hệ vào ra như sau:

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

Và vẽ đồ thị của 2 hàm này với $0 \leq \omega \leq \pi$.

Giải:

Đáp ứng xung của hệ thống là:

$$h(n) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Đáp ứng tần số (sử dụng tính chất dịch trong miền thời gian)

$$H(\omega) = \frac{1}{3} (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3} (1 + 2\cos\omega)$$

Kết quả:

$$\text{Biên độ: } |H(\omega)| = \frac{1}{3} |1 + 2\cos\omega|$$

$$\text{Pha: } \theta(\omega) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3} \\ \pi & : \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

Hình 5.1 vẽ giản đồ biên độ và pha của $H(\omega)$, ta thấy $|H(\omega)|$ đối xứng chẵn và $\theta(\omega)$ đối xứng lẻ. Rõ ràng, từ đặc tuyến đáp ứng tần số $H(\omega)$ ta thấy hệ thống trung bình ba điểm này là một mạch lọc làm trơn (smooth) tín hiệu vào, điều này cũng có thể hiện trong quan hệ vào ra. Nói chung các hệ thống trung bình di động là các mạch lọc làm trơn.

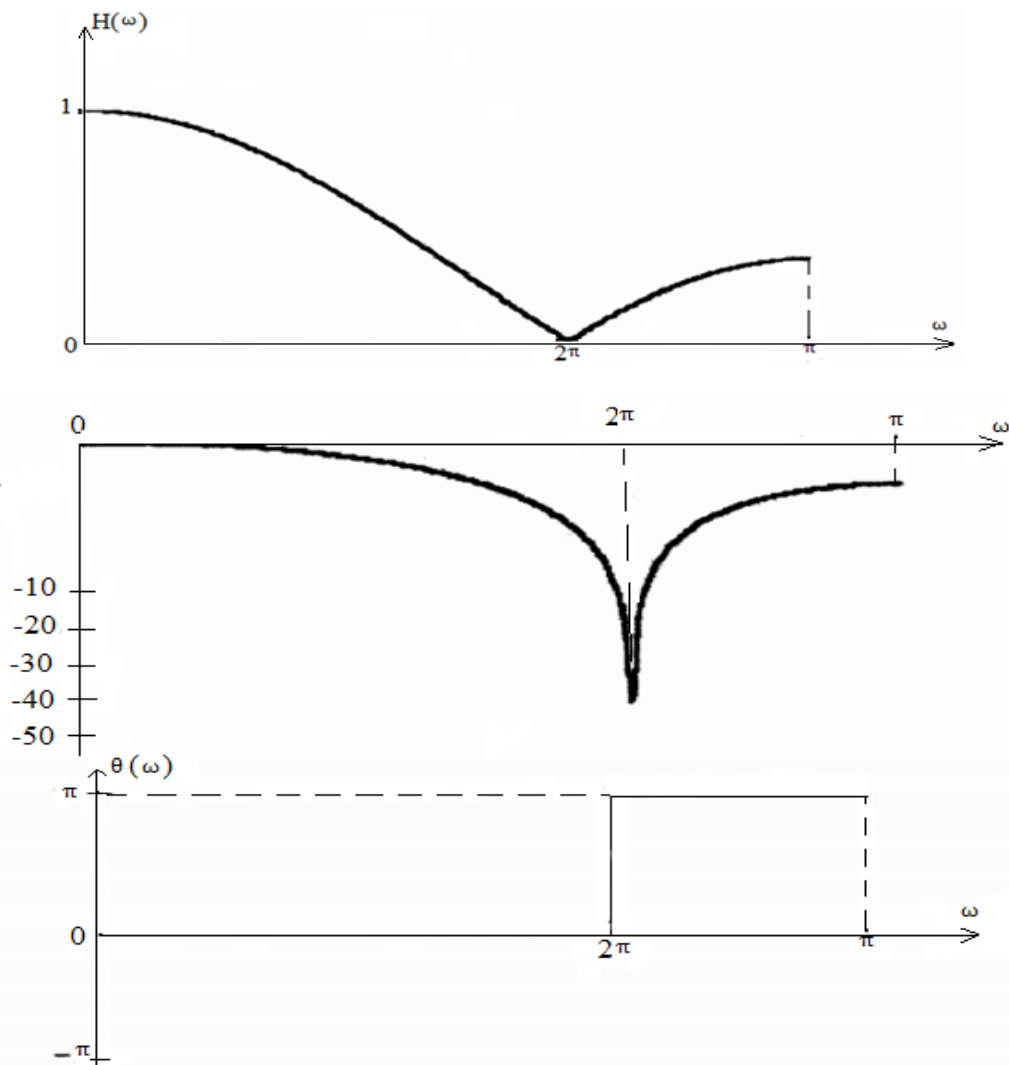
Bây giờ ta xét đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu vào có dạng sin. Vì tín hiệu dạng sin là tổng hay hiệu của các hàm mũ phức. Vì vậy đáp ứng của hệ thống LTI đối với tín hiệu vào hình sin có dạng giống như đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là hàm mũ phức.

Thấy vậy, nếu tín hiệu vào là: $x_1(n) = Ae^{j\omega n}$

Tín hiệu ra là: $y_1(n) = A |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega n}$

Nếu tín hiệu vào là: $x_2(n) = Ae^{-j\omega n}$

Tín hiệu ra là: $y_2(n) = A |H(-\omega)| e^{j\theta(-\omega)} e^{-j\omega n} = A |H(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} e^{-j\omega n}$



Hình 5.1: Đáp ứng biên độ và pha của hệ thống trung bình di động.

Trong biểu thức của $y_2(n)$, ta đã dùng tính chất đối xứng

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \text{ và } \theta(\omega) = -\theta(-\omega).$$

Áp dụng tính chất tuyến tính

$$x(n) = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] = A \cos \omega n$$

Nếu tín hiệu vào là:

Thì đáp ứng của hệ thống là:

$$y(n) = \frac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)] = A |H(\omega)| \cos[\omega n + \theta(\omega)] \quad (5.13)$$

Nếu tín hiệu vào là: $x(n) = \frac{1}{2j}[x_1(n) - x_2(n)] = A \sin \omega n$

Đáp ứng của hệ thống là:

$$y(n) = \frac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)] = A |H(\omega)| \sin[\omega n + \theta(\omega)] \quad (5.14)$$

Nhận xét:

- Từ các kết quả trên ta thấy đối với hệ thống LTI, tín hiệu vào là tín hiệu sin thì tín hiệu ra cũng là tín hiệu sin có cùng tần số, chỉ thay biên độ và pha.

- Đáp ứng tần số $H(\omega)$, tương đương với nó là đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$ và đáp ứng pha $\theta(\omega)$, đặc trưng một cách đầy đủ cho tác dụng của hệ thống với tín hiệu vào hình sin có tần số bất kỳ.

Ví dụ 5.3:

Hãy xác định đáp ứng của hệ thống trong ví dụ 5.1 với tín hiệu vào là:

$$x(n) = 10 - 5 \sin \frac{\pi}{2} n + 20 \cos \pi n; \quad -\infty < n < \infty$$

Giải:

Đáp ứng tần số của hệ thống đã được cho trong phương trình

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Số hạng đầu tiên của tín hiệu vào là một tín hiệu hằng, có tần số $\omega = 0$, ở tần số này:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Số hạng thứ hai trong $x(n)$ có tần số $\frac{\pi}{2}$, $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-j26.6^\circ}$

Vậy đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(n)$ là:

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\pi}{2} n - 26.6^\circ\right) + \frac{40}{3} \cos \pi n; \quad -\infty < n < \infty$$

Ví dụ 5.4:

Một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình sai phân như sau:

$$y(n) = ay(n-1) + b_x(n), 0 < a < 1$$

(a) Xác định biên độ và pha của đáp ứng tần số của hệ thống.

(b) Chọn tham số b sao cho giá trị cực đại của $|H(\omega)|$ là đơn vị, vẽ đồ thị $|H(\omega)|$ và

$\angle H(\omega)$ với $a = 0,9$.

(c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là:

$$x(n) = 5 + 12\sin\frac{\pi}{2}n - 20\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Giải:

Đáp ứng xung của hệ thống là: $h(n) = ba^n u(n)$

Vì $|a| < 1$ nên $H(\omega)$ tồn tại:

$$\text{Đáp ứng tần số: } H(\omega) = \frac{b}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\text{Vì } 1 - ae^{-j\omega} = (1 - a\cos\omega) + j.a.\sin\omega$$

$$\text{Suy ra: } |1 - ae^{-j\omega}| = \sqrt{(1 - a\cos\omega)^2 + (a\sin\omega)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

$$\text{Và } \angle(1 - ae^{-j\omega}) = \tan^{-1} \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

$$\text{Do đó: } |H(\omega)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}} \text{ và } \angle |H(\omega)| = \theta(\omega) = \angle b - \tan^{-1} \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

(b) Vì tham số a là dương, mẫu số của $|H(\omega)|$ cực tiểu khi $\omega = 0$. Vậy $|H(\omega)|$ sẽ cực đại tại $\omega = 0$. Ở tần số này ta có:

$$|H(0)| = \frac{|b|}{1 - a} = 1$$

Điều này hàm ý rằng $b = \pm(1 - a)$

$$|H(\omega)| = \frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

Ta chọn $b = 1 - a$, kết quả là:

$$\theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha được vẽ trong hình 5.2. Ta thấy, đây là hệ thống làm suy giảm tín hiệu ở tần số cao.

(c) Tín hiệu vào gồm các thành phần tần số $0, \frac{\pi}{2}$ và π

$$\text{Cho } \omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |H\left(\frac{\pi}{2}\right)| = \frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2}} = 0.074$$

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\tan^{-1}a = -42^\circ$$

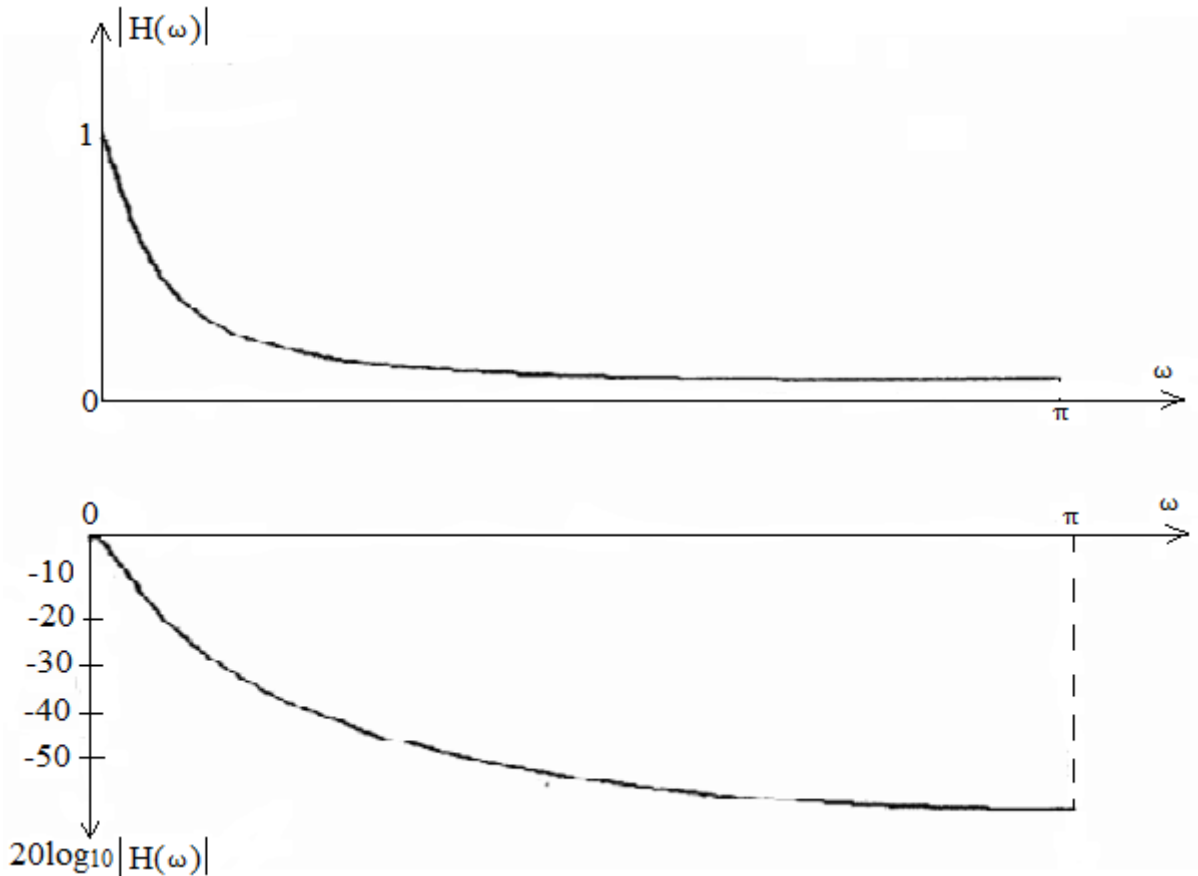
$$\text{Cho } \omega = \pi \Rightarrow |H\left(\frac{\pi}{2}\right)| = \frac{1 - a}{1 + a} = 0.053$$

$$\theta(\pi) = 0$$

Tín hiệu ra của hệ thống là:

$$y(n) = 5 |H(0)| + 12 |H\left(\frac{\pi}{2}\right)| \sin\left[\frac{\pi}{2}n + \theta\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - 20 |H(\pi)| \cos\left[\pi n + \frac{\pi}{4} + \theta(\pi)\right]$$

$$y(n) = 5 + 0.888 \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 42^\circ\right) - 1.06 \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad \text{với } -\infty < n < \infty$$



Hình 5.2: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống trong ví dụ 5.4 với $a=0.9$

Trường hợp tổng quát:

Tín hiệu vào là một tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu sin có dạng như sau:

$$x(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cos(\omega_i n + \phi_i) \quad ; \quad -\infty < n < \infty$$

Trong đó: A_i và ϕ_i là các biên độ và pha của thành phần hình sin có tần số ω_i .

Đáp ứng của hệ thống là:

$$y(n) = \sum_{i=1}^L A_i |H(\omega_i)| \cos(\omega_i n + \phi_i + \theta(\omega_i)) \quad (5.15)$$

Rõ ràng, tùy thuộc vào đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống, các tín hiệu hình sin có tần số khác nhau sẽ bị tác động một cách khác nhau bởi hệ thống. Ví dụ: Một số thành phần tần số hình sin có thể bị nén hoàn toàn, nếu $H(\omega) = 0$ ở các thành phần tần số này. Các thành phần tần số khác có thể thu được ở ngõ ra mà không bị làm suy giảm

(hay có thể được khuếch đại) bởi hệ thống. Về mặt tác dụng, ta có thể coi hệ thống LTI như một mạch lọc đối với các thành phần hình sin có tần số khác nhau thống LTI để thu được đáp ứng tần số $H(\omega)$ mong muốn.

5.1.2 Đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập với tín hiệu hình sin.

Trong các phần trước, ta đã xác định đáp ứng của một hệ thống LTI với tín hiệu vào là tín hiệu hàm mũ phức hoặc tín hiệu sin mà nó đã được đưa vào hệ thống ở thời điểm rất lâu trước đó ($n = -\infty$). Ta thường gọi các tín hiệu này là các tín hiệu hàm mũ hay sin thường xuyên (eternal). Trong trường hợp này, đáp ứng mà chúng ta khảo sát ở ngõ ra của hệ thống là đáp ứng xác lập. Không có đáp ứng quá độ trong trường hợp này.

Ngược lại, nếu tín hiệu sin hay hàm mũ phức được cung cấp ở một thời điểm xác định nào đó, gọi là thời điểm $n = 0$, đáp ứng của hệ thống bao gồm 2 thành phần, đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập.

Để chỉ rõ các đáp ứng này, ta xét một hệ thống được mô tả bởi một phương trình sai phân bậc nhất (như là một ví dụ):

$$y(n) = a y(n-1) + x(n), a \text{ là một hằng số.} \quad (5.16)$$

Tín hiệu vào được cung cấp ở thời điểm $n = 0$. Ta sẽ dùng thủ tục đệ qui để xác định đáp ứng $y(n)$ và thu được:

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k); n \geq 0 \quad (5.17)$$

Với $y(-1)$ là điều kiện đầu.

Bây giờ, ta giả sử tín hiệu vào là hàm mũ phức:

$$x(n) = A e^{j\omega n}; n \geq 0 \quad (5.20)$$

Thay vào phương trình (5.19) ta được:

$$\begin{aligned} y(n) &= a^{n+1}y(-1) + A \sum_{k=0}^n a^k e^{j\omega n(n-k)} = a^{n+1}y(-1) + A \left[\sum_{k=0}^n (a e^{-j\omega})^k \right] \cdot e^{j\omega n} \\ &= a^{n+1}y(-1) + A \frac{1 - a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}; n \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) - \frac{A a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n} + \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}; n \geq 0 \quad (5.18)$$

Ta cũng đã biết rằng, hệ thống ổn định nếu $|a| < 1$. Trong trường hợp này, hai số hạng có chứa a^{n+1} sẽ giảm về 0 khi $n \rightarrow \infty$

Kết quả ta tách ra được đáp ứng xác lập (kí hiệu y_{xl})

$$y_{xl}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}$$

$$y_{xl}(n) = A H(\omega) e^{j\omega n} \quad (5.19)$$

Các số hạng còn lại trong phương trình (5.21) là đáp ứng quá độ của hệ thống, đó là:

$$y_{qd}(n) = a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}}{1 - ae^{-j\omega}} e^{j\omega n}; n \geq 0 \quad (5.20)$$

Ta thấy $y_{qd} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$

Số hạng đầu tiên trong đáp ứng quá độ (5.23) là đáp ứng tín hiệu vào bằng không (zero- input response) của hệ thống, số hạng thứ hai là đáp ứng quá độ được sinh ra bởi tín hiệu vào hàm mũ.

5.1.3 Đáp ứng xác lập với tín hiệu vào tuần hoàn.

Giả sử tín hiệu vào là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ bản là N và hệ thống LTI có tính ổn định. Vì tín hiệu tồn tại với thời gian $-\infty < n < \infty$. Đáp ứng tổng của hệ thống ở một thời điểm n bất kỳ bằng với đáp ứng xác lập.

Để xác định đáp ứng $y(n)$ của hệ thống ta sử dụng chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn, đó là:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}; k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.21)$$

Ta xét tín hiệu vào có dạng hàm mũ phức:

$$x_k(n) = X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{Thì } y_k(n) = X(k) H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}; k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.22)$$

$$\text{Ở đây: } H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi \frac{k}{N}}; k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Áp dụng tính chất tuyến tính của hệ thống LTI, ta thu được đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu tuần hoàn $x(n)$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}; -\infty < n < \infty \quad (5.23)$$

Kết quả này hàm ý rằng đáp ứng của hệ thống với tín hiệu tuần hoàn $x(n)$ cũng tuần hoàn với cùng chu kỳ N . Các hệ số chuỗi Fourier của $y(n)$ là:

$$Y(k) = X(k) H\left(\frac{2\pi}{N}k\right); k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.24)$$

Ta thấy, hệ thống LTI có thể làm thay đổi dạng sóng của tín hiệu vào tuần hoàn thông qua việc thay đổi thang biên độ và sự dịch pha của các thành phần tần số trong chuỗi Fourier nhưng không ảnh hưởng đến chu kỳ (hay tần số) của tín hiệu vào.

5.2 Hệ thống LTI và mạch lọc số.

5.2.1 Lọc chọn tần lý tưởng.

Trong nhiều ứng dụng thực tế, ta phải giải quyết bài toán tách các tín hiệu mà phổ

của

chúng không có sự chồng lấp với yêu cầu là tín hiệu mong muốn không bị méo dạng

bởi tác động của các mạch lọc được dùng. Bài toán này thường nảy sinh trong truyền tin, nơi mà nhiều tín hiệu được ghép kênh theo cách chia tần và được truyền trên một kênh chung (chẳng hạn như cáp đồng trục cáp quang, hay kênh truyền vệ tinh) ở đầu cuối thu nhận của hệ thống truyền tin, tín hiệu phải được tách ra bởi các mạch lọc chọn tần và được truyền đi đến đích cuối cùng của chúng. Mạch lọc chọn tần phải được thiết kế sao cho sự méo dạng không đáng kể khi tín hiệu đi qua nó.

Xét tín hiệu $x(n)$ có băng tần là $\omega_1 < \omega < \omega_2$ nghĩa là: $X(\omega) = 0$ khi $\omega \geq \omega_2$ và $\omega \leq \omega_1$

Giả sử tín hiệu đi qua mạch lọc có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & ; \quad n \text{ khác} \end{cases} \quad (5.25)$$

Ở đây C và k là các hằng số dương.

Tín hiệu ra của mạch lọc có phổ là:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = CX(\omega)e^{-j\omega k}; \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (5.26)$$

Áp dụng tính chất dịch chuyển trong miền thời gian của biến đổi Fourier như sau:

$$x(n - k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega k}$$

$$y(n) = Cx(n - k) \quad (5.27)$$

Kết quả, tín hiệu ra của mạch lọc đơn giản là một bản sao của tín hiệu vào được dịch k mẫu và thay đổi thang biên độ bởi thừa số C . Một phép trễ thuần túy không làm méo tín hiệu. Vì vậy mạch lọc được đặt trưng bởi hàm truyền (5.28) được gọi là mạch lọc lý tưởng. Phổ biên độ là một hằng, đó là:

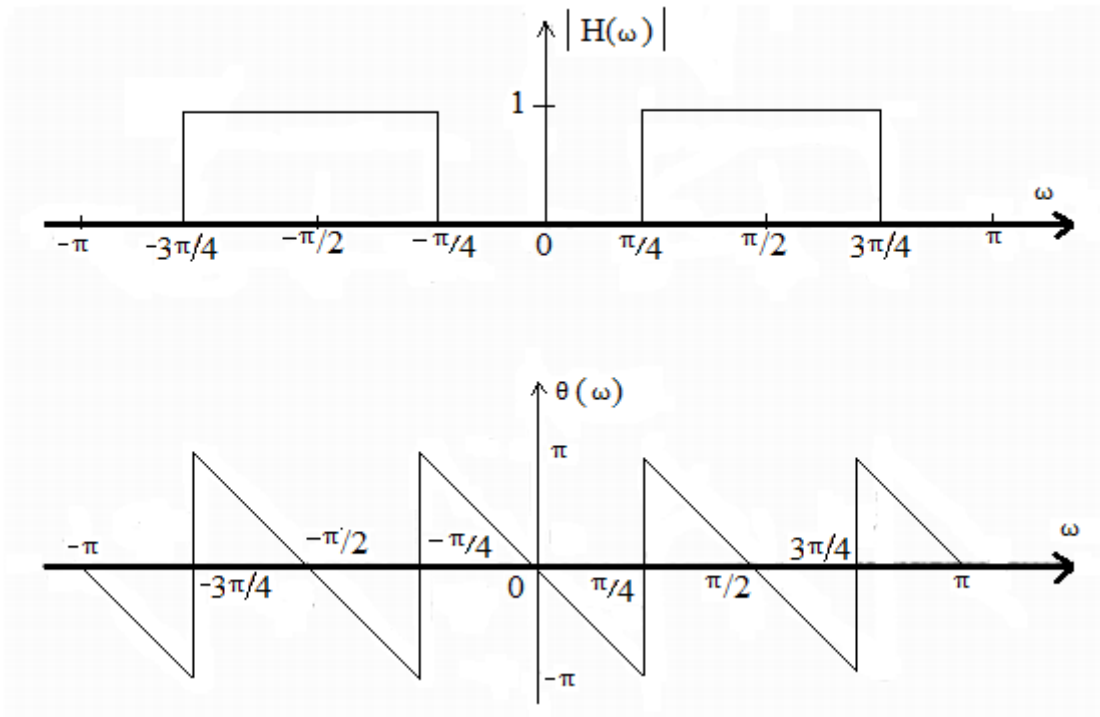
$$|H(\omega)| = C; \quad \omega_1 < \omega < \omega_2$$

Và phổ pha là một hàm tuyến tính của tần số:

$$\theta(\omega) = -\omega k$$

Đặc tuyến của đáp ứng tần số được minh họa trong hình 5.3

Với $C=1$, $k=4$, $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ và $\omega_2 = \frac{3\pi}{4}$



Hình 5.3: Đặc tuyến biên độ và pha của mạch lọc dải thông lý tưởng.

Một cách tổng quát mọi sự sai lệch của đặc tuyến (của đáp ứng) tần số của một mạch lọc tuyến tính so với đặc tuyến tần số lý tưởng là sự méo dạng. Nếu một mạch lọc có đặc tuyến của đáp ứng biên độ biến đổi theo tần số trong băng tần mong muốn của tín hiệu thì mạch lọc tạo ra một sự méo dạng biên độ. Nếu đặc tuyến pha không tuyến tính trong băng tần mong muốn thì tín hiệu bị một sự méo pha vì sự lệch pha theo tần số đồng nghĩa với sự trễ, nên độ trễ của tín hiệu được định nghĩa như là một hàm của tần số đó là:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (5.28)$$

Ta thấy rằng, một mạch lọc pha tuyến tính có độ trễ là một hằng số, độc lập với tần số.

Như vậy, một mạch lọc mà nó gây ra một sự méo pha thì có độ trễ biến thiên theo tần số. Ta nói mạch lọc đã đưa vào một sự méo trễ (delay distortion). Vì vậy, sự méo trễ là đồng nghĩa với sự méo pha.

Giống như trong mạch tương tự, mạch lọc cũng được phân loại theo đặc tuyến của đáp ứng tần số, ta có các loại mạch lọc như sau:

- Lọc thông thấp lý tưởng, có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & ; \text{ngược lại} \end{cases} \quad (5.29)$$

Ở đây ω_c được gọi là tần số cắt.

- Lọc thông cao lý tưởng, có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & ; \text{ngược lại} \end{cases} \quad (5.30)$$

- Lọc thông dải lý tưởng, có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & ; \text{ngược lại} \end{cases} \quad (5.31)$$

- Lọc triệt dải lý tưởng, có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega k} & ; |\omega| \leq \omega_1 \text{ và } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & ; \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \end{cases} \quad (5.32)$$

5.2.2 Tính không khả thi của bộ lọc lý tưởng.

Trong thực tế, ta có thể thực hiện một bộ lọc lý tưởng hay không? Để trả lời câu hỏi này, ta hãy khảo sát đáp ứng xung hữu hạn của một bộ lọc thông thấp lý tưởng có đáp ứng tần số là:

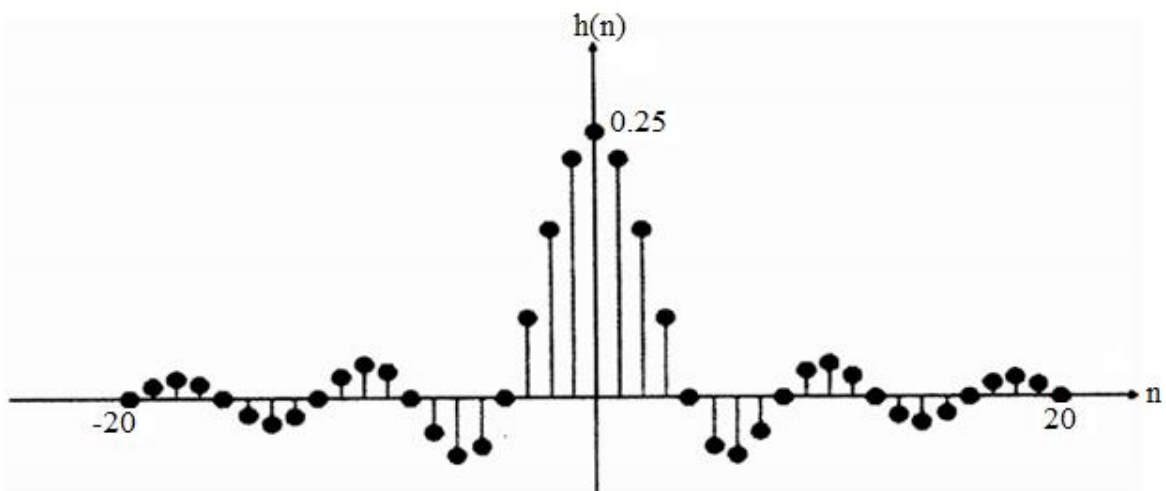
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & ; \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (5.33)$$

Đáp ứng xung của bộ lọc này là:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & ; n = 0 \\ \frac{\omega_c \sin \omega_c n}{\pi \omega_c n} & ; n \neq 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Đồ thị của $h(n)$ với $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ được vẽ trong hình 5.4

Rõ ràng bộ lọc thông thấp lý tưởng là không nhân quả. Hơn nữa $h(n)$ có chiều dài vô hạn và không khả tổng tuyệt đối. Vì vậy, nó không thể thực hiện được trong thực tế. Chúng ta cũng quan sát thấy rằng, độ rộng của múi chính (main lobe) của $h(n)$ là tỉ lệ nghịch với băng tần ω_c của bộ lọc. Khi băng tần của bộ lọc tăng, đáp ứng xung trở nên hẹp hơn. Khi $\omega_c = \pi$ bộ lọc trở thành bộ lọc thông tất (All-pass) và đáp ứng xung trở thành xung đơn vị.



Hình 5.4: Đáp ứng xung của một bộ lọc thông thấp lý tưởng.

Nếu đáp ứng xung bị trễ n_0 mẫu, bộ lọc thông thấp lý tưởng là bộ lọc pha tuyến tính, đó là:

$$h(n - n_0) \leftrightarrow H(\omega)e^{-j\omega n_0}$$

Ta có thể chọn một độ trễ n_0 khá lớn (một cách tùy ý) để cho có thể coi như $h(n)=0$ với $n < n_0$. Tuy nhiên, hệ thống thu được sẽ không có đáp ứng tần số lý tưởng nữa. Kết luận trên cũng đúng cho tất cả các bộ lọc lý tưởng khác. Tóm lại, tất cả các bộ lọc lý tưởng đều không thể thực hiện về mặt vật lý.

5.2.3 Mạch lọc thực tế.

Mặc dù bộ lọc lý tưởng là điều chúng ta mong muốn, nhưng trong ứng dụng thực tế, không nhất thiết phải có sự chính xác tuyệt đối như vậy. Ta có thể thực hiện các bộ lọc nhân quả có đáp ứng tần số xấp xỉ với mạch lọc lý tưởng mà ta mong muốn. Đặc biệt, không nhất thiết phải có biên độ $|H(\omega)|$ là hằng trên toàn bộ dải thông của bộ lọc. Một lượng gợn sóng nhỏ trong dải thông (hình 5.5) thường có thể chấp nhận được. Tương tự, không cần thiết $|H(\omega)|$ phải bằng 0 trong dải chặn (stopband), một giá trị nhỏ hay một lượng gợn sóng nhỏ cũng có thể chấp nhận.

Biên độ $|H(\omega)|$ cũng không thể giảm đột ngột từ 1 xuống 0 ở tần số cắt. Như vậy phải có một dải tần quá độ giữa dải thông và dải chặn, ta gọi là dải quá độ hay vùng chuyển tiếp của bộ lọc (hình 5.5).

Từ đặc tuyến của đáp ứng biên độ của một bộ lọc thực tế hình (5.5) ta định nghĩa các thông số sau:

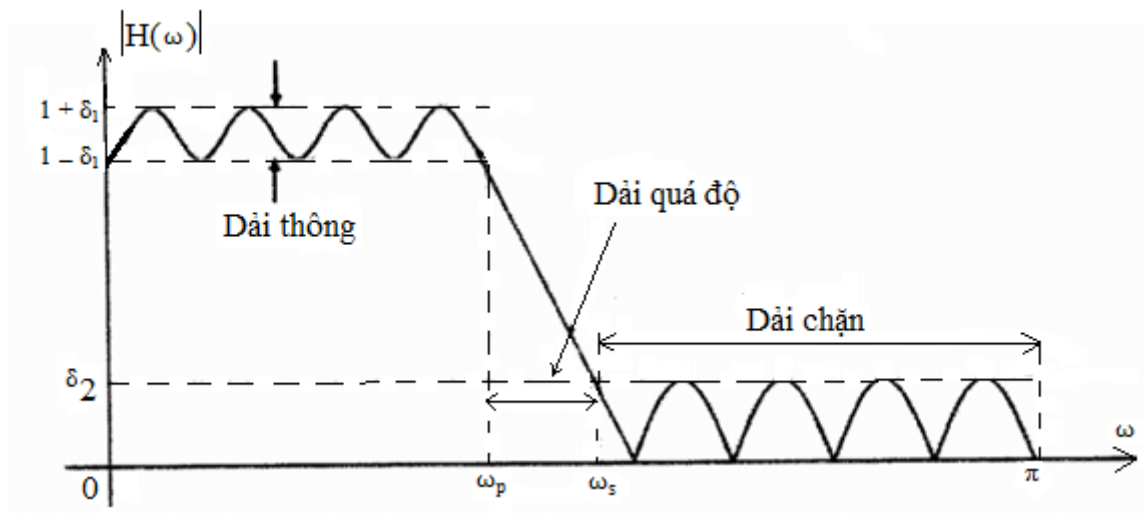
ω_1 : Biên độ của gợn sóng dải thông gọi tắt là gợn sóng dải thông (passband ripple)

ω_2 : Biên độ của gợn sóng dải chặn gọi tắt là gợn sóng dải chặn (stopband ripple)

ω_p : Tần số cạnh dải thông.

ω_s : Tần số cạnh dải chặn.

$\omega_s - \omega_p$: Độ rộng của dải quá độ.



Hình 5.5: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc thực tế.

Băng tần của một mạch lọc chính là độ rộng của dải thông. Trong mạch lọc thông thấp này, ta thấy biên độ $|H(\omega)|$ dao động trong khoảng $1 \pm \delta_1$

Trong các bài toán thiết kế mạch lọc, ta cần xác định các chi tiết kỹ thuật sau:

- (1) Gợn sóng dải thông cực đại có thể chấp nhận.
- (2) Gợn sóng dải chặn cực đại có thể chấp nhận.
- (3) Tần số cạnh của dải thông.
- (4) Tần số cạnh của dải chặn.

Nhắc lại rằng, một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$y(n) = - \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5.35)$$

Có thể là một hệ thống nhân quả và có thể thực hiện trong thực tế. Đáp ứng tần số của nó là:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (5.36)$$

Từ các chỉ tiêu được nêu ở trên, ta chọn các hệ số $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ để có một mạch lọc với đáp ứng tần số $H(\omega)$ tương ứng.

Mức độ xấp xỉ của $H(\omega)$ với các chỉ tiết kỹ thuật trên tùy thuộc vào các tiêu chuẩn chọn lựa các hệ số $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ cũng như M và N .

5.3 Thiết kế hệ thống số bằng cách đặt các cực và zero trên mặt phẳng phức Z .

Đây là phương pháp thiết kế lọc số đơn giản và có thể áp dụng cho nhiều loại bộ lọc FIR cũng như IIR. Tuy nhiên, để có một đáp ứng tần số theo ý muốn, trong một số trường hợp, ta cần phải thêm vào các cực hoặc zero theo thủ tục thử và sai.

Như chúng ta biết, vị trí của các cực và zeros trên mặt phẳng phức mô tả duy nhất hàm truyền đạt $H(z)$, khi hệ thống có tính ổn định và nhân quả. Vì vậy nó cũng qui định đặc tính số của hệ thống.

Phương pháp thiết kế mạch lọc số bằng cách đặt các cực và zeros trên mặt phẳng phức dựa trên nguyên lý cơ bản là: đặt các cực tại các điểm gần vòng tròn đơn vị và ở các vị trí tương ứng với các tần số trong dải thông, đặt các zeros ở các điểm tương ứng với các tần số trong dải triệt. Hơn nữa, cần phải tuân theo các ràng buộc như sau:

1. Tất cả các cực phải được đặt trong vòng tròn đơn vị để cho bộ lọc ổn định. Tuy nhiên, các zeros có thể đặt ở vị trí bất kỳ trong mặt phẳng z .
2. Tất cả các cực và các zeros phức phải xuất hiện với các cặp liên hợp phức để các hệ số của bộ lọc có giá trị thực.

Với một tập cực - zeros đã cho, hàm truyền đạt $H(z)$ của lọc có biểu thức:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = G \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (5.37)$$

Ở đây G là hằng số độ lợi (gain constant) nó được chọn để chuẩn hóa đáp ứng tần số. Ở một tần số xác định nào đó, ký hiệu là ω_0 , G được chọn sao cho:

$$|H(\omega_0)| = 1$$

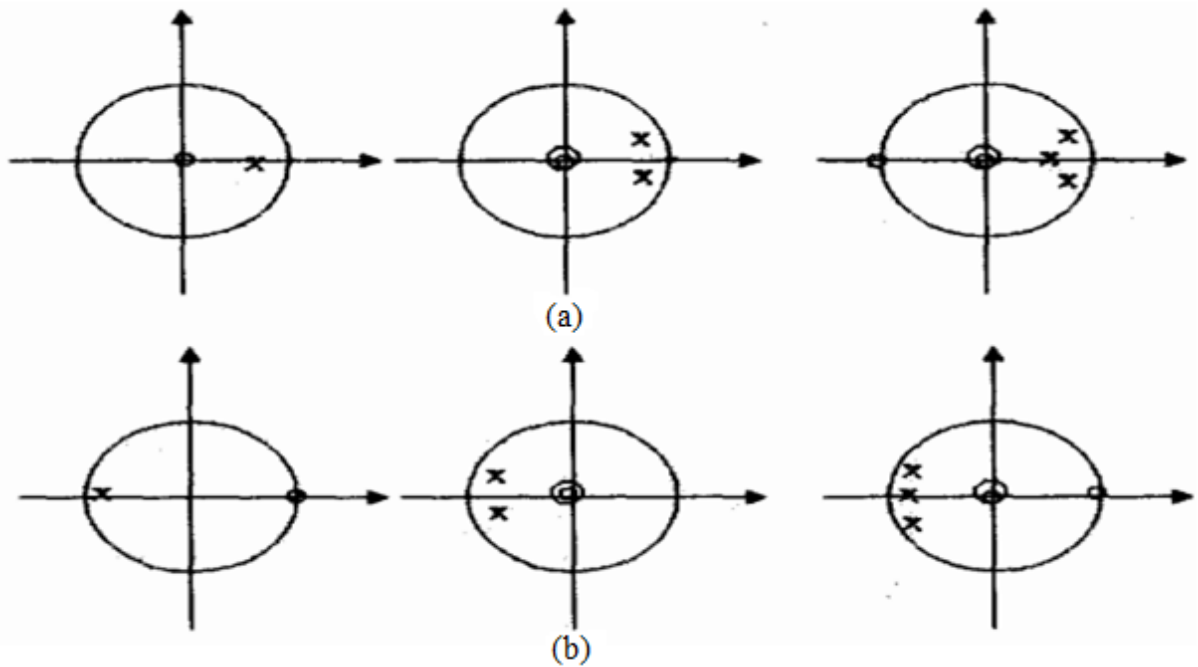
Với ω_0 là tần số trong dải thông của bộ lọc. Thông thường N (bậc của bộ lọc) được chọn bằng hoặc lớn hơn M để cho bộ lọc có số cực không tầm thường (nontrivial) bằng hoặc nhiều hơn zeros.

Phương pháp này được dùng để thiết kế một số bộ lọc đơn giản nhưng quan trọng như: lọc thông thấp, thông cao, thông dải, dải chặn, lọc răng lược, bộ cộng hưởng số, bộ dao động số,.... Thủ tục thiết kế cũng thuận tiện khi thực hiện trên máy tính.

5.3.1 Lọc thông thấp, thông cao và thông dải.

a) Lọc thông thấp và thông cao.

Với lọc thông thấp, khi thiết kế các cực phải được đặt ở các điểm gần vòng tròn đơn vị trong vùng tần số thấp (gần $\omega=0$) và các zeros phải được đặt gần hay trên vòng tròn đơn vị tương ứng với các điểm tần số cao (gần $\omega=\pi$), ngược lại cho lọc thông cao. Hình 5.6 minh họa cho việc đặt các cực và zeros của ba bộ lọc thông thấp và ba bộ lọc thông cao.



Hình 5.6: Đồ thị cực zeros cho các bộ lọc

(a) Lọc thông thấp; (b) Lọc thông cao

Đáp ứng biên độ và pha cho bộ lọc đơn cực có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = \frac{1 - a}{1 - az^{-1}} \quad (5.38)$$

Được vẽ trong hình 5.6 với $a = 0,9$. Độ lợi G được chọn là $1 - a$, để cho lọc có độ lợi bằng 1 ở tần số $\omega = 0$ và độ lợi ở tần số cao tương đối nhỏ.

Thêm vào một zeros ở $z = -1$ sẽ làm đáp ứng suy giảm nhiều hơn ở tần số cao khi đó lọc có hàm truyền đạt là:

$$H_2(z) = \frac{1 - a}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (5.39)$$

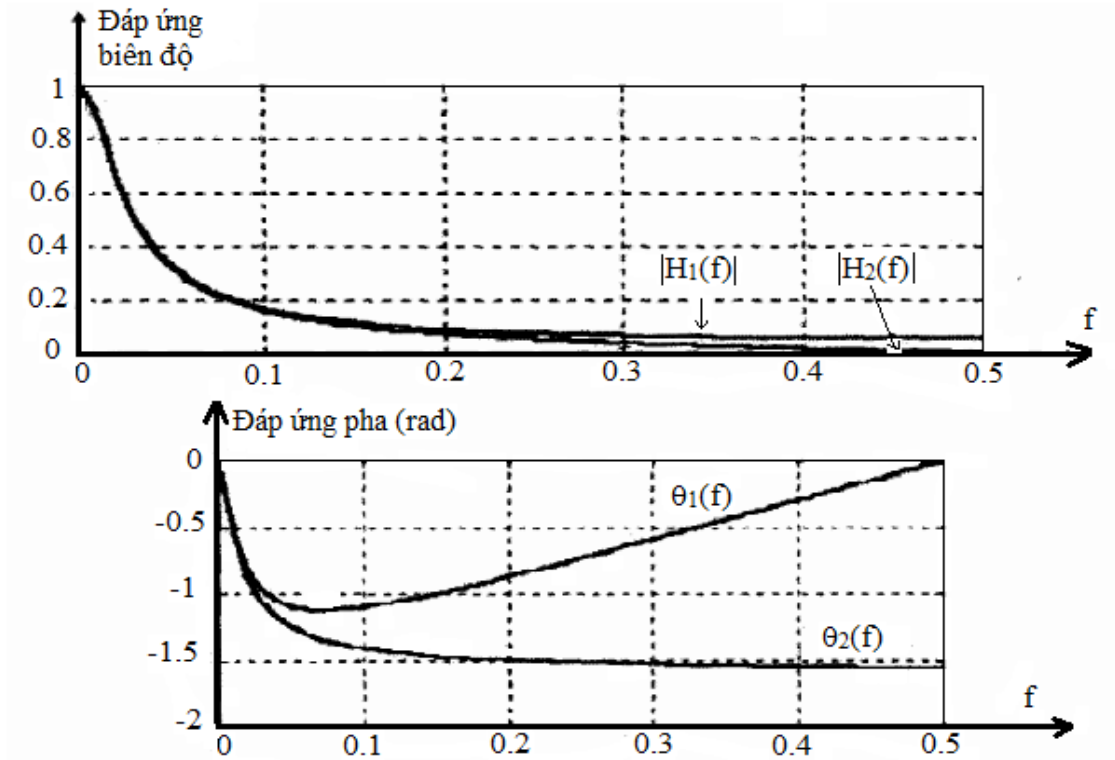
Đặc tuyến của đáp ứng tần số của hai bộ lọc $H_1(z)$ và $H_2(z)$ cùng được vẽ trên hình

5.6 Ta thấy, biên độ của $H_2(z)$ giảm về 0 khi $\omega = \pi$.

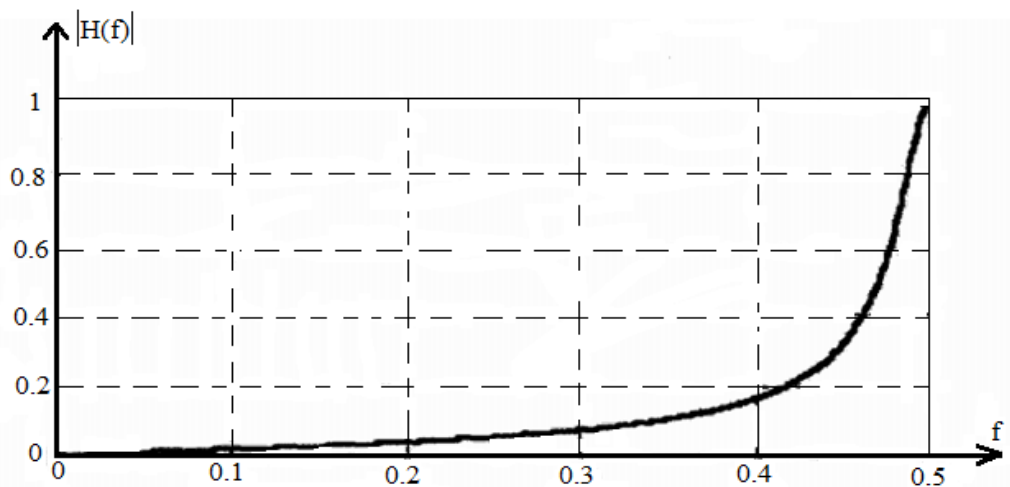
Tương tự, ta thu được các bộ lọc thông cao đơn giản bằng cách lấy đối xứng các điểm cực - zero của mạch lọc thông thấp qua trục ảo của mặt phẳng z . Ta thu được hàm truyền đạt:

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (5.40)$$

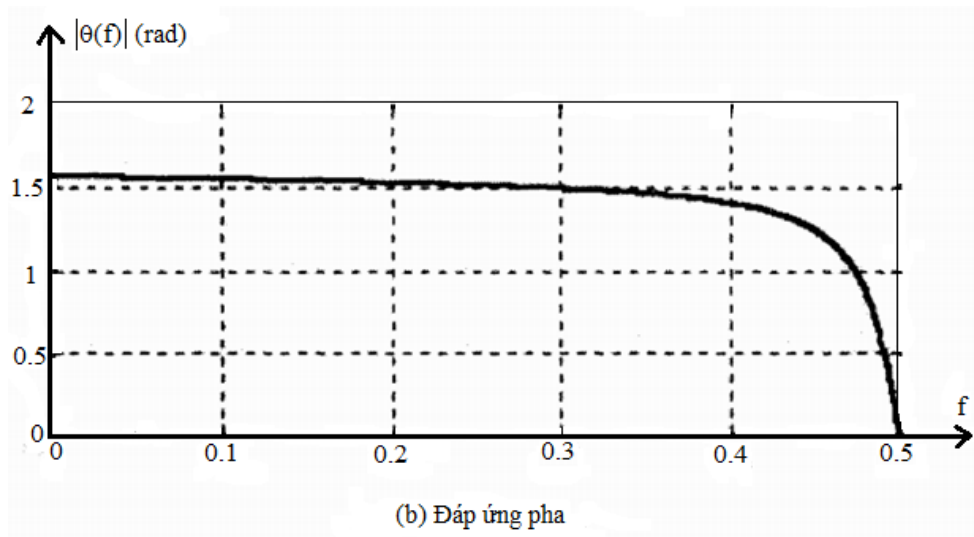
Đặc tuyến của đáp ứng tần số của mạch lọc thông cao được vẽ trong hình 5.7 với $a=0,9$.



Hình 5.6: Đáp ứng biên độ, đáp ứng pha của bộ lọc 1 cực $H_1(z) = \frac{1-0.9}{1-0.9z^{-1}}$ của bộ lọc 1 cực - 1 zero $H_2(z) = \frac{1-0.9}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$



(a) Đáp ứng biên độ



Hình 5.7: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của bộ lọc thông cao có hàm truyền đạt

$$H = \left[\frac{1-0.9}{2} \right] \left[\frac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}} \right]$$

Ví dụ 5.5:

Một bộ lọc thông thấp hai cực có hàm truyền đạt là: $H(z) = \frac{G}{(1-pz^{-1})^2}$ Hãy xác định giá trị của G và P sao cho đáp ứng tần số $H(\omega)$ thỏa điều kiện:

$$H(0) = 1 \text{ và } \left| H\left(\frac{\pi}{4}\right) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Giải:

Tại $\omega = 0$ ta có: $H(0) = \frac{G}{(1+p)^2} = 1 \Rightarrow G = (1+p)^2$

Tại $\omega = \frac{\pi}{4}$ ta có:

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{(1-p)^2}{(1-pe^{-j\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{(1-p)^2}{(1-p\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + jp\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{jp}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &\Rightarrow \frac{(1-p)^4}{\left(1 - \frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2}} = \frac{1}{2} \text{ hay } 2(1-p)^4 = 1 + p^2 - \sqrt{2}p \end{aligned}$$

Giải phương trình trên ta được: $P=0,23$.

Kết quả $H(0) = \frac{0.458}{(1-0.23z^{-1})^2}$

b) Lọc thông dải.

Các nguyên tắc tương tự có thể được áp dụng để thiết kế mạch lọc thông dải. Một cách cơ bản, lọc thông dải chứa một hay nhiều cặp cực phức gần vòng tròn đơn vị, trong lân cận của băng tần mà nó hình thành dải thông của bộ lọc.

Ví dụ 5.6: Hãy thiết kế mạch lọc thông dải hai cực có tâm của băng tần ở $\omega = \frac{\pi}{2}$ đáp ứng tần số $H(\omega) = 0$ khi $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ và đáp ứng biên độ của nó là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tại $\omega = \frac{4\pi}{9}$.

Giải:

Rõ ràng bộ lọc phải có hai cực tại: $p_1 = re^{j\frac{\pi}{2}}$ và $p_2 = re^{-j\frac{\pi}{2}}$ và zero tại $z=1$ và $z=-1$. Vậy hàm truyền đạt của nó là:

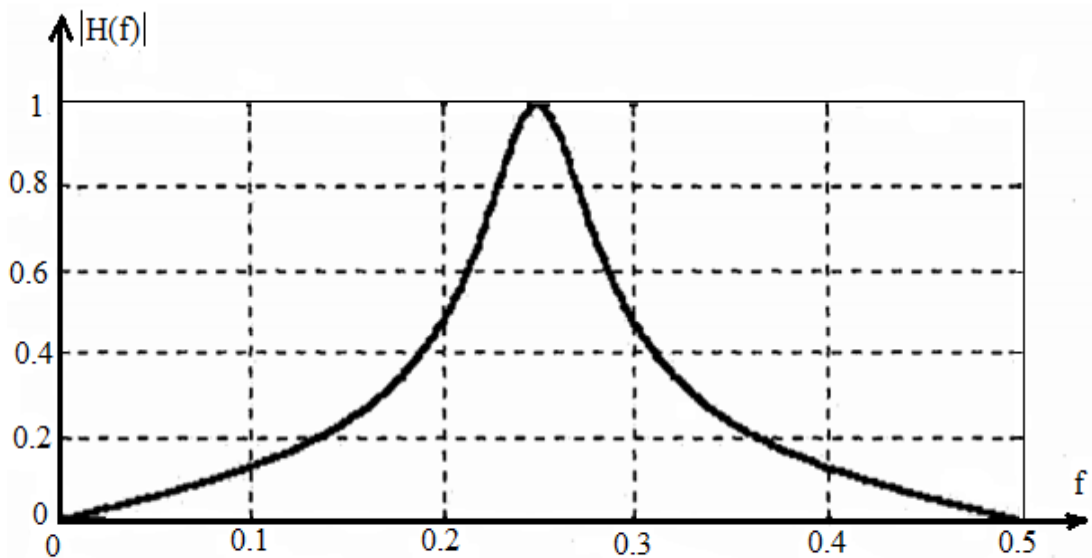
$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G \frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

Hệ số khuếch đại G được xác định bằng cách tính $H(\omega)$ của bộ lọc ở tần số $\omega = \frac{\pi}{2}$. Ta có:

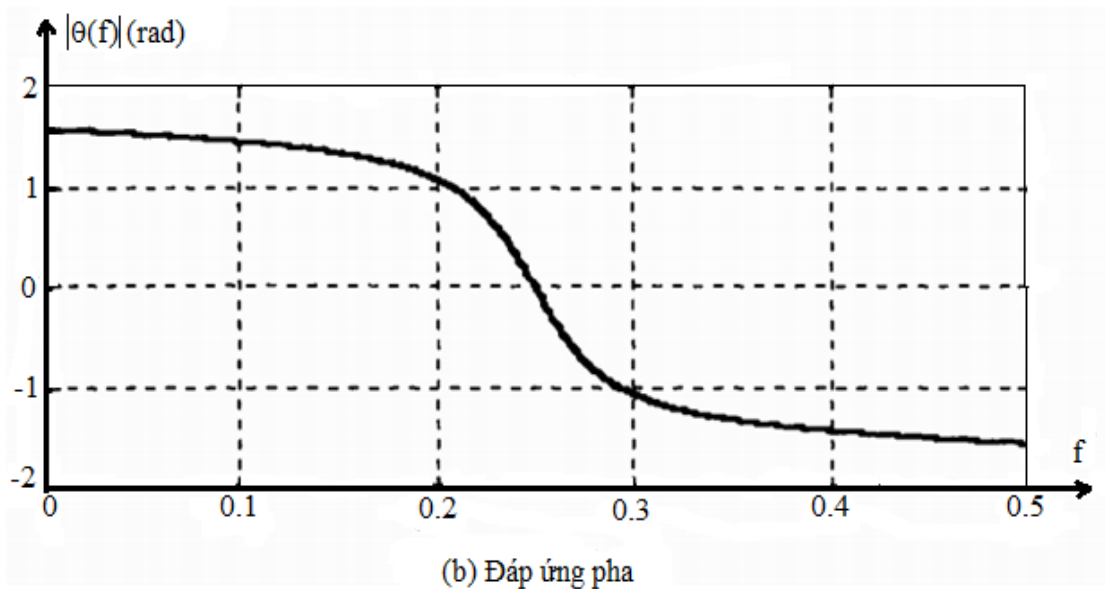
$$\left| H\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{1+r^4+2r^2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hay } 1,94(1-r^2)^2 = 1 - 1,88r^2 + r^4$$

$$\text{Giải phương trình ta được } r^2 = 0,7. \text{ Vậy } H(z) = 0,15 \frac{1-z^{-2}}{1+0,7z^{-2}}$$



(a) Đáp ứng biên độ



Hình 5.8: Đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của bộ lọc thông dải có hàm truyền đặt là

$$H(z) = 0,15 \left[\frac{1-z^{-2}}{1+0,7z} \right]$$

zero lên đáp ứng tần số của hệ thống. Rõ ràng, đây chưa phải là phương pháp tốt cho việc thiết kế mạch lọc số, để có một đặc tuyến của đáp ứng tần số như ý muốn. Các phương pháp thiết kế tốt hơn, được ứng dụng trong thực tế sẽ được trình bày trong phần sau.

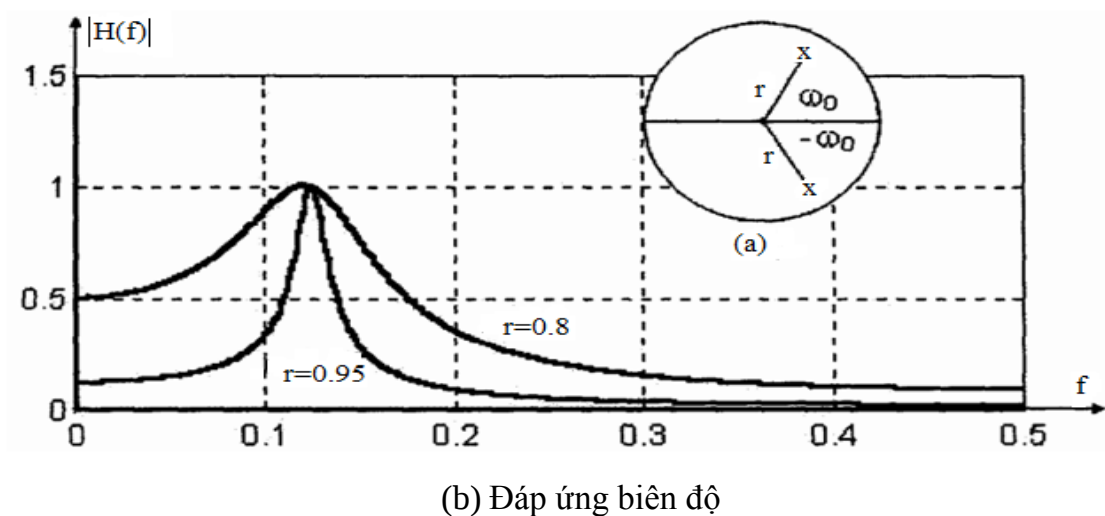
5.3.2 Bộ cộng hưởng số (digital resonator)

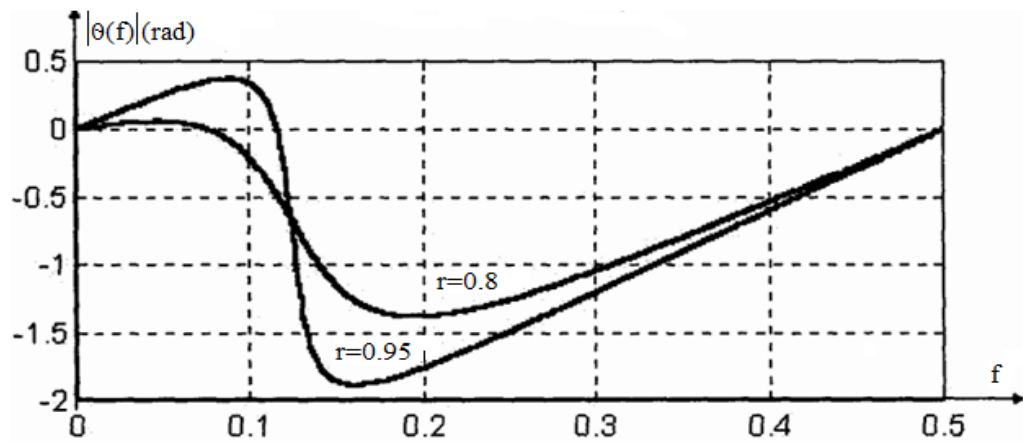
Một bộ cộng hưởng số là một bộ lọc thông dải có hai cực đặc biệt, đó là cặp cực phức được đặt ở gần vòng tròn đơn vị. Ta thấy, đáp ứng biên độ lớn nhất ở tần số tương ứng

của cực và đây là tần số cộng hưởng của mạch lọc.

Để thiết kế một bộ cộng hưởng số với đỉnh cộng hưởng ở tại hay gần tần số $\omega = \omega_0$ ta chọn cặp cực phức như sau:

$$P_1 = re^{j\omega} \text{ và } P_2 = re^{-j\omega} \text{ với } 0 < r < 1 \quad (5.44)$$





(c) Đáp ứng pha

Hình 5.9: (a) Đồ thị cực zeros. (b) Đáp ứng biên độ. (c) Đáp ứng pha của 2 bộ cộng hưởng: 1 bộ có $r=0.8$, bộ còn lại có $r=0.95$.

Ngoài ra, ta có thể chọn thêm các zero. Mặc dù có nhiều khả năng chọn lựa khác nhau, nhưng có hai trường hợp thường được chọn. Một là thêm vào một zero tại gốc tọa độ. Hai là chọn một zero ở $z = 1$ và một zero ở $z = -1$. Sự chọn lựa này có thể khử hoàn toàn đáp ứng của bộ lọc tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Cho một hệ thống LTI có đáp ứng xung là $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

a- Hãy xác định biên độ và đáp ứng xung $|H(\omega)|$ và đáp ứng pha $\angle H(\omega)$

b- Hãy xác định và vẽ phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu vào và tín hiệu ra lần lượt cho các tín hiệu sau đây:

$$x(n) = \cos \frac{3\pi n}{8}, -\infty < n < \infty$$

$$x(n) = \{\dots, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, \dots\}$$



5.2. Hãy xác định và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của các hệ thống sau đây:

a) $y(n] = \frac{1}{2}[x(n) + x(n - 1)]$

b) $y(n] = \frac{1}{2}[x(n) - x(n - 1)]$

c) $y(n] = \frac{1}{2}[x(n) + x(n - 2)]$

d) $y(n] = \frac{1}{2}[x(n) - x(n - 2)]$

e) $y(n] = \frac{1}{3}[x(n) + x(n - 1) + x(n - 2)]$

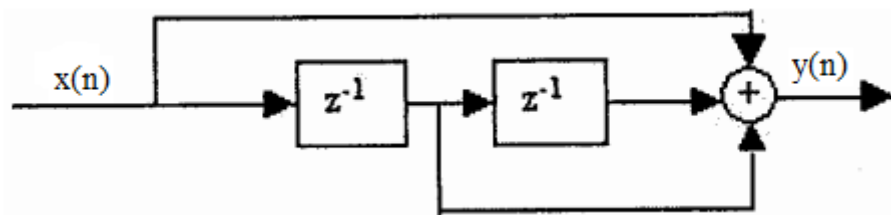
f) $y(n] = [2x(n - 1) - x(n - 2)]$

g) $y(n] = \frac{1}{8}[x(n) + 3x(n - 1) + 3x(n - 2) + x(n - 3)]$

h) $y(n] = x(n - 4)$

i) $y(n] = x(n + 4)$

5.3. Xét một bộ lọc số có sơ đồ khối như hình 5.10



a) Hãy xác định quan hệ vào ra và đáp ứng xung $h(n)$.

b) Hãy xác định và vẽ phổ biên độ, phổ pha của bộ lọc và tìm dải tần hoàn toàn bị chặn bởi bộ lọc.

c) Khi $\omega_0 = \pi/2$, xác định tín hiệu ra tương ứng với tín hiệu vào là:

$$x(n] = 3 \cos \left(\frac{\pi}{3}n + 30^\circ \right), \quad -\infty < n < \infty$$

5.4. Xét bộ lọc FIR: $y(n] = [x(n) - x(n - 4)]$

a) Tính và vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

b) Tính đáp ứng của bộ lọc với tín hiệu vào là:

$$x(n) = \cos \frac{\pi}{2} n + \cos \frac{\pi}{4} n, -\infty < n < \infty$$

c) Giải thích kết quả ở câu b bằng kết quả ở câu a.

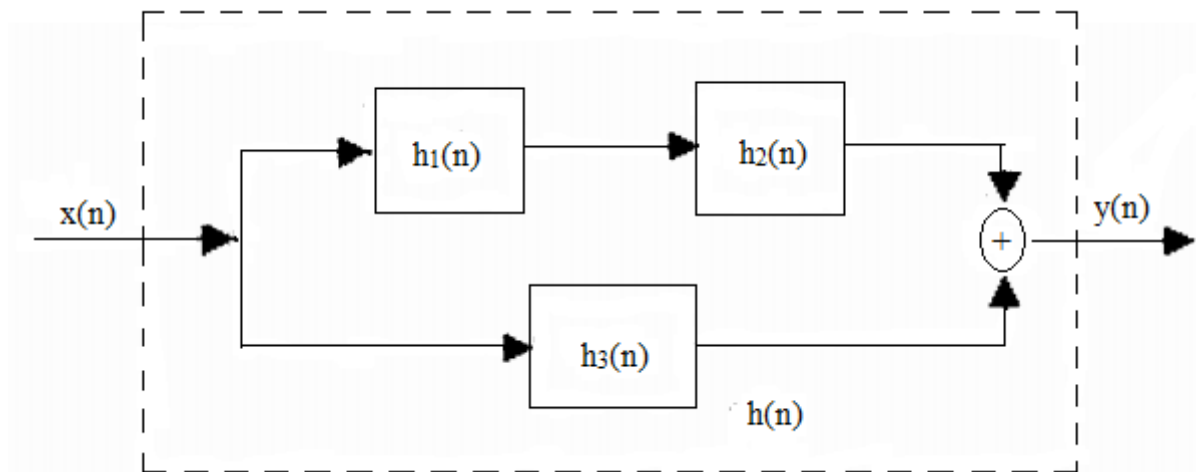
5.5. Hãy xác định đáp ứng xác lập của hệ thống có quan hệ vào ra như sau:

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(n-2)]$$

với tín hiệu vào là:

$$x(n) = 5 + 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} n + 60^\circ \right) + 4 \sin(\pi n + 45^\circ), -\infty < n < \infty$$

5.6. Cho các hệ thống con có đáp ứng xung $h_1(n)$, $h_2(n)$ và $h_3(n)$ được liên kết như hình vẽ:



Cho biết:

$$h_1(n) = \{0, 1, -2, 1, 0\};$$

$$h_2(n) = u(n) - u(n-6);$$

$$h_3(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-7)$$

- Tìm hệ thống $H(z)$ của hệ thống tương đương.
- Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tương đương.
- Xác định đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống tương đương.
- Tìm đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là:

$$x(n) = 3 - 2e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

5.7. Một hệ thống số có hàm truyền đạt là:

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-2}}$$

- Xác định đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.
- Tính đáp ứng của hệ thống với kích thích là:

$$x(n) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} n\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) - \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Nhận xét và giải thích. Chức năng của hệ thống này là gì?

CHƯƠNG 6: THIẾT KẾ BỘ LỌC FIR

6.1 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ.

6.1.1 Nguyên tắc.

Từ đáp ứng tần số mong muốn $H_d(\omega)$ với các chỉ tiêu tương ứng, ta lấy biến đổi Fourier ngược để có đáp ứng xung $h_d(\omega)$:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad -\infty < n < \infty \quad (6.1)$$

Nói chung, $h_d(n)$ thu được sẽ có chiều dài vô hạn $h(n)$ và không nhân quả, ta không thể thực hiện được trong thực tế. Vì vậy, hệ thống phải được sửa lại thành nhân quả và buộc $h(n)$ phải $h(n)$ chế chiều dài của $h_d(n)$. Phương pháp đơn giản là cắt bỏ $h_d(n)$ từ giá trị $n = M-1$ và thu được bộ lọc FIR có chiều dài M . Sự "cắt ngọn" này tương đương với phép nhân $h(n)$ với một hàm cửa sổ (window). Hàm cửa sổ này được định nghĩa như sau:

$$w(n) = \begin{cases} \neq 0, & n = 0, 1, 2 \dots M-1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \quad (6.2)$$

Như vậy, đáp ứng xung của bộ lọc FIR trở thành: $h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$ (6.3)

Gọi $W(\omega)$ là biến đổi Fourier của cửa sổ $w(n)$, từ tính chất nhân của biến đổi Fourier, ta thu được đáp ứng tần số của bộ lọc như sau:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(\omega - v) dv \quad (6.4)$$

6.1.2 Các bước chính của phương pháp cửa sổ.

- Chọn 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số: $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$.
- Xác định đáp ứng xung của mạch lọc lý tưởng.
- Chọn loại cửa sổ.
- Nhân với cửa sổ để có đáp ứng xung của mạch lọc: $h_d(n) = h(n) \cdot w(n)$.
- Thử lại trong miền tần số: $H_d(\omega) = H(\omega) * W(\omega)$.
- Nếu không thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật, ta tăng M và trở lại bước 2.

6.1.3 Cửa sổ chữ nhật.

Định nghĩa: Cửa sổ chữ nhật có chiều dài M được định nghĩa trong miền thời gian như sau:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \dots M-1 \\ 0, & n \neq, \end{cases} \quad (6.5)$$

Trường hợp M lẻ, $w(n)$ có dạng đối xứng với tâm đối xứng là $n: \frac{M-1}{2}$.

Biến đổi Fourier của cửa sổ chữ nhật là:

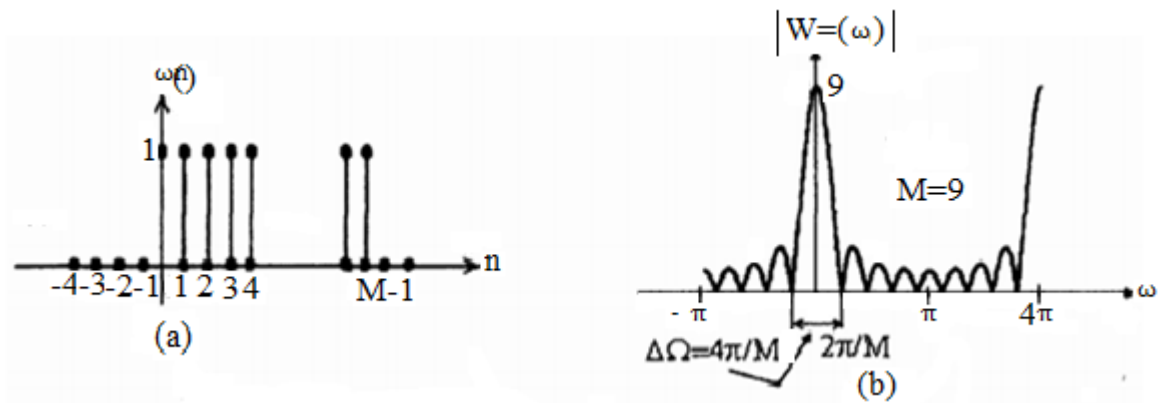
$$\begin{aligned}
 W(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j\omega n} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega n M}}{1 - e^{-j\omega n}} \\
 &= e^{-j\omega(M-1)/2} \frac{\sin(\frac{\omega M}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Cửa sổ này có đáp ứng biên độ là:

$$|W(\omega)| = \frac{|\sin(\frac{\omega M}{2})|}{|\sin(\frac{\omega}{2})|}, \quad -\pi < \omega < \pi \tag{6.7}$$

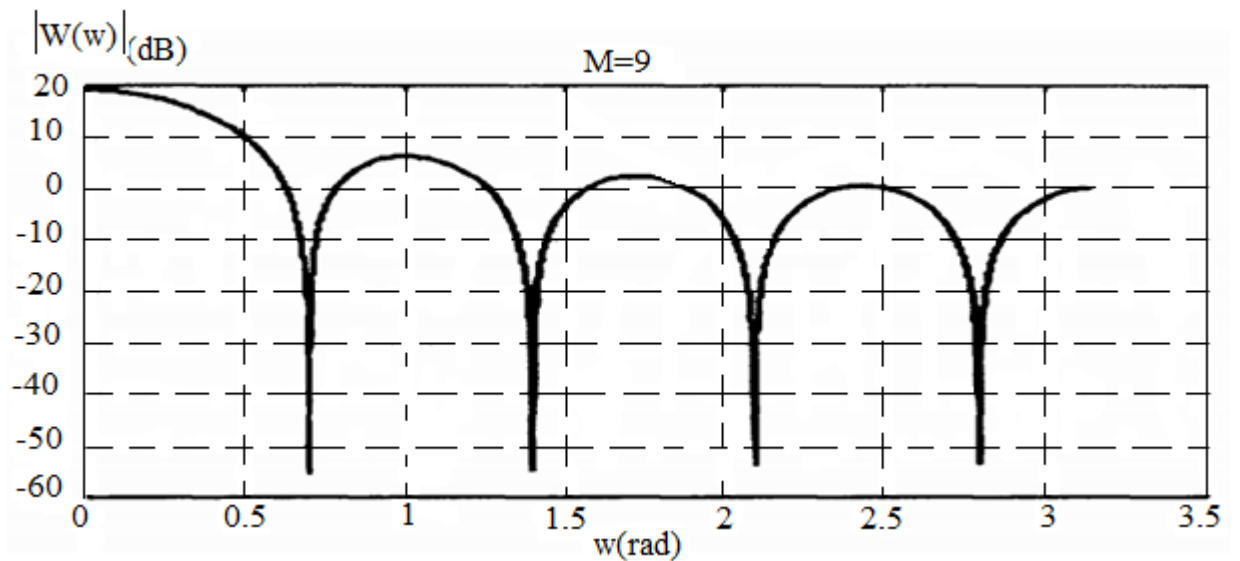
và có đáp ứng pha tuyến tính từng đoạn:

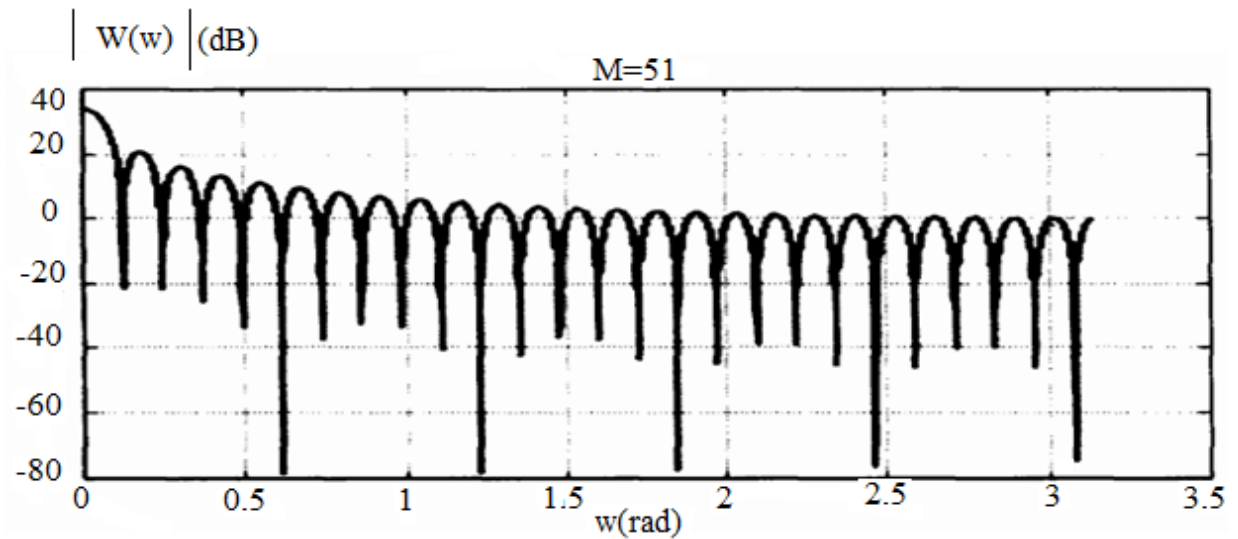
$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \left(\frac{M-1}{2} \right), & \text{khi } \sin \frac{\omega M}{2} \geq 0 \\ -\omega \left(\frac{M-1}{2} \right), & \text{khi } \sin \frac{\omega M}{2} < 0 \end{cases}$$



Hình 6.1 (a) Cửa sổ chữ nhật có chiều dài $M = 9$

(b) Đáp ứng biên độ cửa sổ chữ nhật





Hình 6.2 Các đáp ứng biên độ (db) của cửa sổ chữ nhật với $M = 9$, $M = 51$

Các tham số (các tham số này cũng được định nghĩa chung cho các loại cửa sổ khác):

Độ rộng của múi chính DW (được tính bằng 2 lần dải tần số từ $\omega = 0$ đến ω_p , tần số ω_p tương ứng với giá trị zero của múi chính), đối với cửa sổ chữ nhật:

$$DW = 4p/M \quad (6.6)$$

Tỉ số giữa đỉnh của múi bên đầu tiên và đỉnh của múi chính, ký hiệu ta có:

$$\lambda = \frac{|W(\omega_1)|}{|W(0)|} \quad (6.7)$$

với ω_1 là tần số tương ứng với đỉnh của múi bên đầu tiên, với cửa sổ chữ nhật $\omega_1 = 3p/M$. Tham số này thường được tính theo dự như sau:

$$\lambda(\text{dB}) = 20 \log_{10} \lambda = 20 \log_{10} \frac{|W(\omega_1)|}{|W(0)|} \quad (6.8)$$

Người ta cũng thường xét đến một đại lượng ngược lại, đó là tỉ số của đỉnh múi chính và đỉnh múi bên đầu tiên, ký hiệu h , ta có:

$$\eta = \frac{1}{\lambda} = \frac{|W(0)|}{|W(\omega_1)|} \quad (6.9)$$

Sau đây là giá trị của h tương ứng với các độ dài M khác nhau:

$M = 6 \text{ @ } h = 4,2426$; $M = 9 \text{ @ } h = 4,1000$; $M = 10 \text{ @ } h = 4,7014$; $M = 100 \text{ @ } h = 4,7106$;...và $M \text{ @ } h \sim$ thì $h \gg 4,712$. Ta thấy, khi $M > 10$ tham số gần như không đổi.

Hình 6.1.a trình bày cửa sổ chữ nhật trong miền thời gian, hình 6.1.b là đáp ứng biên độ của cửa sổ chữ nhật với $M = 9$. Các tham số tương ứng như sau: $DW = 4p/M = 1,3963 \text{ rad}$; $1 = -13,0643\text{dB}$; $h = 4,1000$

* Hiện tượng Gibbs 1

Để giới hạn chiều dài đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc lý tưởng, ta đã nhân với hàm cửa sổ $w(n)$. Đáp ứng tần số của bộ lọc thực tế có được từ tích chập. Đối với bộ lọc lý tưởng, đáp ứng biên độ chuyển đột ngột từ 1 xuống 0 (hoặc ngược lại) ở tần số cắt. Nhưng đối với bộ lọc thực tế, do tích chập trong miền tần số sẽ gây dao động ở dải

thông và dải chặn xung quanh tần số cắt ω_c . Sự phát sinh các dao động này được gọi là hiện tượng Gibbs.

Ví dụ 6.1:

Hãy thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây: $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.01$, $\omega_p = \pi/4 - \pi/10 = 0,7226$, $\omega_s = \pi/4 + \pi/10 = 0,8482$ và $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2 = \pi/4$.

Giải:

- Chọn cửa sổ chữ nhật $W(n)$ nhân quả và có tâm đối xứng tại $(M-1)/2$.
- Để minh họa hiện tượng Gibbs, ta chọn đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp lý tưởng, ta có:

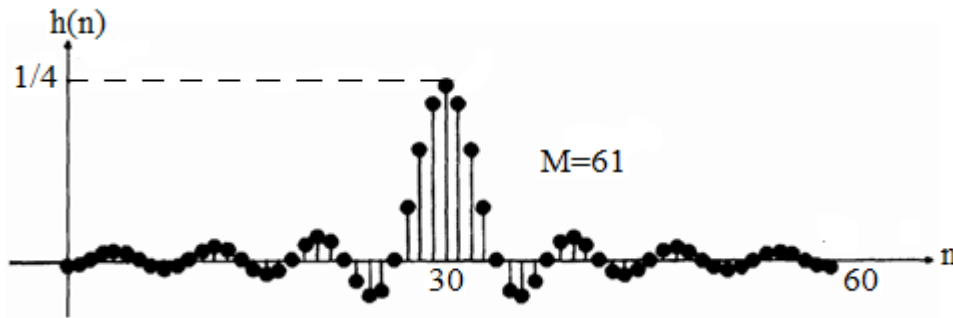
$$H_d(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega k}, & |\omega_c| \leq \pi/4 \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \quad (6.10)$$

Lấy biến đổi Fourier ngược, theo pt $Y(n) = -a_1 y(n-1) - y(n-2) + b_0 d(n)$, ta được đáp ứng xung $h(n)$:

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = \frac{M-1}{2} \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n-k)}{\omega_c(n-k)}, & n \neq \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (6.11)$$

Ta thấy $h_d(n)$ có chiều dài vô hạn $h(n)$, không nhân quả và có tâm đối xứng là k trong miền thời gian. Nếu ta chọn $k = (M-1)/2$ thì $h(n)$ có tâm đối xứng tại $(M-1)/2$.

Nhân $h(n)$ với cửa sổ chữ nhật $w(n)$, đáp ứng xung của bộ lọc trở nên nhân quả và có chiều dài hữu hạn $h(n)$: $h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$



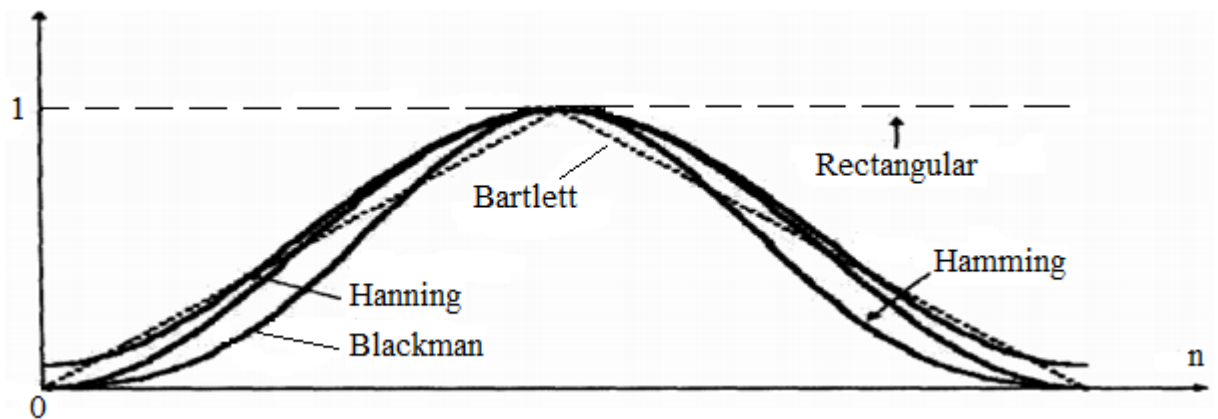
Hình 6.3 Đáp ứng xung $h(n)$ được cắt từ $h_d(n)$ và cửa sổ chữ nhật $M = 61$.

Đáp ứng tần số của hệ thống được thiết kế là:

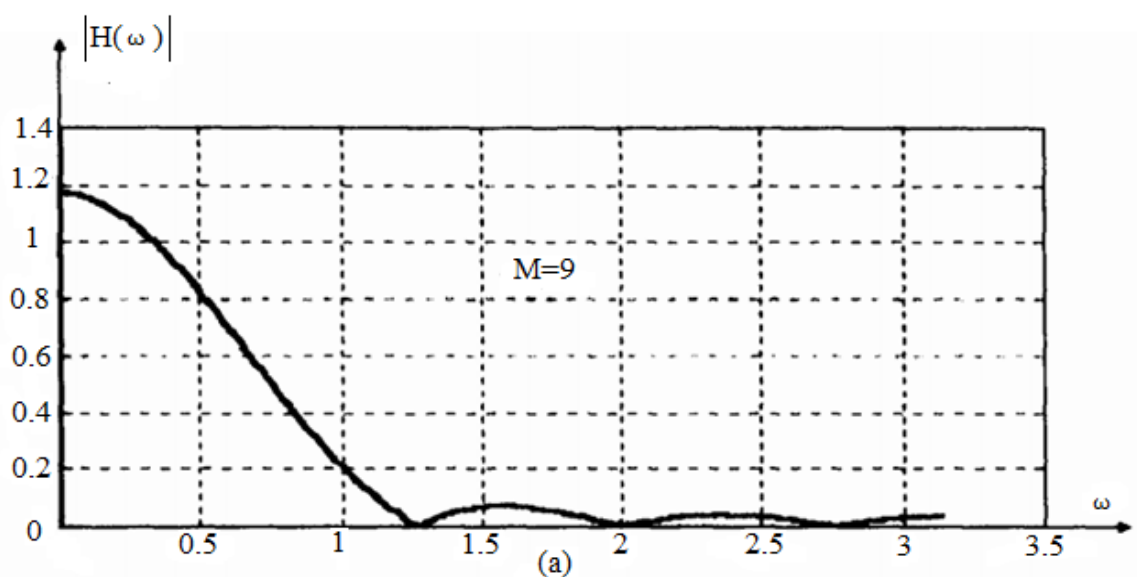
$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_d(\omega) * W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(\omega - v) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-jv \frac{M-1}{2}} e^{-j(\omega-v) \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(\omega - v) \frac{M}{2}}{\sin \frac{(\omega - v)}{2}} dv \end{aligned}$$

$$= e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\sin(\omega - v) \frac{M}{2}}{\sin \frac{(\omega - v)}{2}} dv \quad (6.12)$$

Ta thấy, khi tăng M độ gọn sóng dải thông và dải chặn có biên độ không giảm và trong cả ba trường hợp, chỉ tiêu về độ gọn đã đề ra chưa được thỏa mãn. Tuy nhiên, độ rộng dải quá độ được cải thiện (thu hẹp lại) khi M tăng. Để làm giảm những gợn sóng lớn trong cả dải thông và dải chặn, chúng ta có thể sử dụng các hàm cửa sổ mà nó chứa đựng một đỉnh nhọn và suy giảm dần về zero thay vì đột ngột như hàm cửa sổ hình chữ nhật. Một số hàm cửa sổ tiêu biểu thường được dùng trong thiết kế mạch lọc FIR được trình bày trong bảng 1.1 và dạng của một số cửa sổ được trình bày trong hình 6.4. Những hàm cửa sổ này có các múi bên (sidelobe) thấp hơn so với cửa sổ hình chữ nhật. Tuy nhiên, với cùng giá trị M chiều rộng của múi chính của các hàm cửa sổ này cũng rộng hơn so với cửa sổ hình chữ nhật. Do đó, các hàm cửa sổ này có tác dụng làm trơn (smoothing) đáp ứng tần số thông qua tích chập trong miền tần số, và kết quả là dải quá độ của lọc FIR rộng hơn. Để giảm độ rộng của dải quá độ, chúng ta tăng chiều dài cửa sổ, kết quả là mạch lọc lớn hơn.

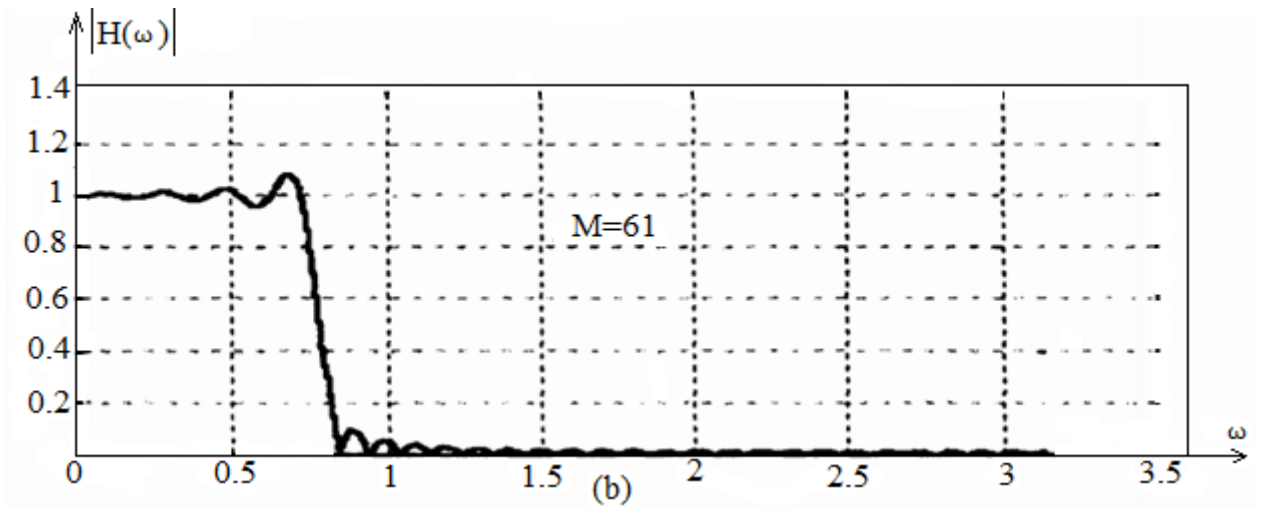


Hình 64. Dạng (bao hình) của m



số hàm cửa sổ trong miền thời gian

ột



Hình 6.5: Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp được thiết kế với cửa sổ chữ nhật.
(a) $M = 9$, (b) $M = 61$

Bảng 6.1. Các hàm cửa sổ

Bartlett (triangular)	$\frac{2n}{M-1}, \text{ Với } 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2}$ $2 - \frac{2n}{M-1}, \text{ Với } \frac{M-1}{2} < n \leq M-1$
Blackman	$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$

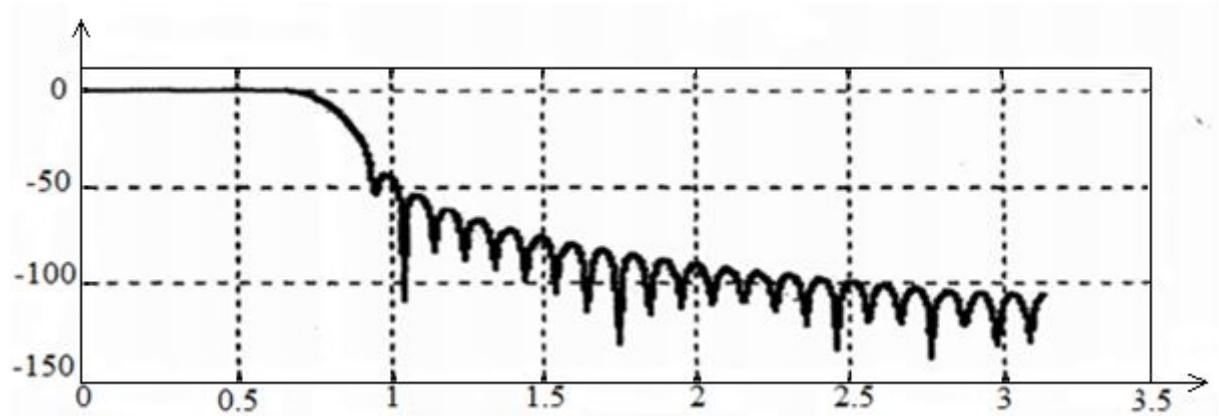
Kaiser	$\frac{I\left[\beta \frac{M-1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{M-1} - 1\right)}\right]}{I\left[\beta \left(\frac{M-1}{2}\right)\right]}$
Lanczos	$w(n) = \left\{ \begin{array}{l} \sin\left[\frac{2\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{M-1}\right] \\ \hline 2\pi\left(\frac{n - \frac{M-1}{2}}{M-1}\right) \end{array} \right\}$

Tukey	$1, \text{ với } \left n - \frac{M-1}{2}\right \leq \alpha \frac{M-1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1$ $\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{n - (1+\alpha)\left(\frac{M-1}{2}\right)}{(1+\alpha)\left(\frac{M-1}{2}\right)}\right) \right],$ $\text{Với } \alpha \frac{M-1}{2} \leq \left n - \frac{M-1}{2}\right \leq \frac{M-1}{2}$
-------	---

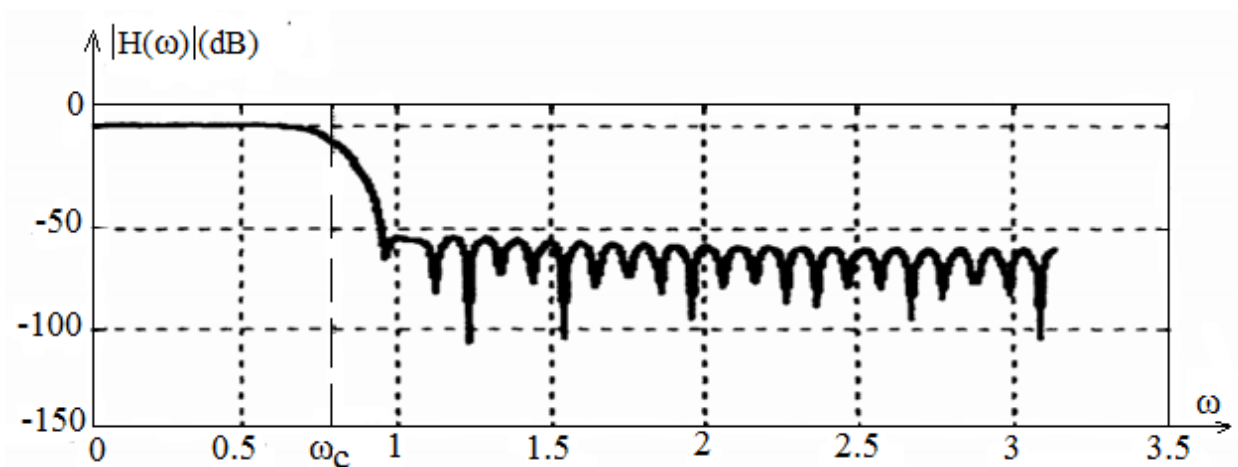
Ghi chú: Cửa sổ Kaiser là một cửa sổ gần tối ưu, nó được thành lập từ hàm Bessel biến dạng loại một bậc không $I_0(x)$. Trong công thức định nghĩa cửa sổ Kaiser (Bảng 6.1), tham số (có tác dụng sửa dạng cửa sổ). Với một chiều dài M xác định, độ rộng của múi chính DW trong đáp ứng biên độ của cửa sổ sẽ gia tăng theo β . Vì vậy, với cửa sổ Kaiser, ta có thể điều chỉnh DW và hệ số λ bằng cách thay đổi tham số. (Tuy nhiên, vì biểu thức đại số của cửa sổ này khá phức tạp, không thân thiện với người dùng, nên việc sử dụng nó cũng có $h(n)$ chế.

Bảng 6.2 Trình bày các đặc tính quan trọng của một số hàm cửa sổ trong miền tần số:

Loại cửa sổ	Độ rộng xấp xỉ của vùng quá độ	Đỉnh múi trên (dB)
Retangula	4p/M	- 12
Bartlett	8p/M	- 27
H(n)ning	8p/M	- 32
Hamming	8p/M	- 43
Blackman	12p/M	- 18



(a) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ Hanning ($M = 61$)



(b) Bộ lọc thông thấp FIR được thiết kế với cửa sổ Hamming ($M = 61$)

Hình 6.6 Đáp ứng biên độ (dB) của bộ lọc thông thấp có tần số cắt là $\omega_c = \pi/4 = 0.7854$ rad/sample được thiết kế bằng các loại cửa sổ khác nhau có cùng chiều dài $M=61$.

6.2 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính dùng phương pháp lấy mẫu trong miền tần số.

6.2.1 Điều kiện đối xứng $h(n)=h(M-1-n)$.

a) Trường hợp M lẻ: Giả sử chọn $M=1$, điều kiện đối xứng là: $h(0) = h(4)$; $h(1) = h(3)$; $h(2)$ là tâm đối xứng (không có mẫu tương ứng). Đáp ứng tần số $H(\omega)$ là:

$$H(w) = h(0) + h(1)e^{-jw} + h(2)e^{-j2w} + h(3)e^{-j3w} + h(4)e^{-j4w}$$

$$= e^{-j2w}[h(2) + h(0)e^{j2w} + h(4)e^{-j2w} + h(1)e^{jw} + h(3)e^{-jw}]$$

Vì $h(0) = h(4)$ và $h(1) = h(3)$ nên $H(\omega)$ có thể viết lại là:

$$H(w) = e^{-j2w}[h(2) + 2h(0)\cos 2w + 2h(1)\cos w] \quad (6.13)$$

Trong phương trình (6.13) thừa số trong dấu ngoặc có giá trị thực. Ta ký hiệu là:

$$H_r(w) = h(2) + 2h(0)\cos 2w + 2h(1)\cos w \quad (6.14)$$

Biên độ của đáp ứng tần số là:

$$|H(w)| = |H_r(w)| \quad (6.15)$$

Đặc tính pha của mạch lọc là

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases} \quad (6.16)$$

Ta thấy, đặc tính pha $q(w)$ là một hàm tuyến tính của ω trong cả hai trường hợp $H_r(\omega)$ dương hoặc âm. Khi $H_r(\omega)$ đổi dấu từ dương sang âm (hay ngược lại), $q(w)$ thay đổi đột ngột một lượng là π radians. Nếu sự thay đổi pha này xuất hiện ở bên ngoài dải thông (trên dải chặn) ta sẽ không cần quan tâm, vì tín hiệu mong muốn đi qua bộ lọc không có nội dung tần số ở trong dải chặn.

b) Trường hợp M chẵn.

Giả sử chọn $M = 4$, điều kiện đối xứng là: $h(0) = h(3)$; $h(1) = h(2)$. Trong trường hợp này, mỗi mẫu của $h(n)$ đều có mẫu đối xứng. Tương tự như trên ta tìm được đáp ứng của bộ lọc là:

$$H(\omega) = e^{-j3\omega/2} \left[2h(0) \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2h(1) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \quad (6.17)$$

$$\text{Đặt:} \quad H_r(\omega) = 2h(0)\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2h(1)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.18)$$

Biên độ của đáp ứng tần số là: $|H(\omega)| = |H_r(\omega)|$ và pha là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{3\omega}{2} & \text{nếu } H_r(\omega) > 0 \\ -\frac{3\omega}{2} + \pi & \text{nếu } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Một lần nữa, pha của bộ lọc là tuyến tính và nhảy một lượng là π ở những tần số mà $H_r(\pi)$ đổi dấu. Từ hai ví dụ trên, ta có thể ngoại suy cho trường hợp tổng quát với chiều dài M bất kỳ. Tổng quát, đáp ứng tần số của một bộ lọc FIR có đáp ứng xung $h(n)$ thỏa điều kiện đối xứng $h(n) = h(M-1-n)$ là:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{-j\frac{\omega(M-1)}{2}} \quad (6.20)$$

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \text{ nếu } M \text{ lẻ} \quad (6.21)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(\frac{M}{2})-1} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \quad \text{nếu } M \text{ chẵn} \quad (6.22)$$

Đặc tính pha của bộ lọc cho cả hai trường hợp M chẵn và M lẻ là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\omega \frac{(M-1)}{2} & \text{nếu } M \text{ chẵn} \\ -\omega \frac{(M-1)}{2} + \pi & \text{nếu } M \text{ lẻ} \end{cases} \quad (6.23)$$

6.2.2 Điều kiện đối xứng

$$h(n) = -h(M-1-n). \quad (6.24)$$

Trong trường hợp này ta gọi đáp ứng xung là phản đối xứng (antisymmetric). Khi M lẻ, điểm trung tâm của $h(n)$ phản đối xứng là $n = \frac{M-1}{2}$. Ví dụ, Nếu $M = 1$, ta có $h(0) = -h(4)$; $h(1) = h(3)$ và $h(2) = 0$. Khi M chẵn, mỗi mẫu của $h(n)$ có một mẫu tương ứng ngược dấu. Tương tự như trường hợp đối xứng thứ nhất, ta có thể chứng minh rằng, đáp ứng tần số của bộ lọc FIR với đáp ứng xung phản đối xứng có biểu thức là:

$$H(\omega) = H_r(\omega) e^{j(-\frac{\omega(M-1)}{2} + \pi/2)} \quad (6.25)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \quad \text{nếu } M \text{ lẻ} \quad (6.26)$$

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(\frac{M}{2})-1} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \quad \text{nếu } M \text{ chẵn} \quad (6.27)$$

Đặc tính pha của bộ lọc cho cả hai trường hợp M lẻ và M chẵn là:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \omega \frac{(M-1)}{2} & \text{nếu } H_r(\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \omega \frac{(M-1)}{2} & \text{nếu } H_r(\omega) < 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

Các công thức đáp ứng tần số tổng quát này được dùng để thiết kế các bộ lọc FIR pha tuyến tính với đáp ứng xung đối xứng hoặc phản đối xứng.

6.2.3 Xác định chọn đáp ứng xung.

a) Trường hợp chọn đáp ứng xung đối xứng.

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}; \quad M \text{ lẻ} \quad (6.29)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1; \quad M \text{ chẵn}$$

Ta định nghĩa:
$$\begin{cases} a_{kn} = 2\cos\omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \\ \text{Và nếu } M \text{ lẻ thì } a_{kn} = 1 \text{ khi } n = \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad \text{với tất cả } k \quad (6.30)$$

Khi đó, các phương trình tuyến tính $H(\omega) = \frac{e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sin\omega(\frac{M+1}{2})}{(M+1) \sin\frac{\omega}{2}}$ và

$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}}$ cho bộ lọc FIR đối xứng trở thành:

$$\sum_{n=0}^{(M-1)/2} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, M \text{ lẻ} \quad (6.31)$$

$$\sum_{n=0}^{(\frac{M}{2})-1} a_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1, M \text{ chẵn} \quad (6.32)$$

b) Trường hợp chọn đáp ứng xung phản đối xứng.

Trường hợp này, ta cần xác định các hệ số tương ứng với $\frac{M+1}{2}$ điểm khi M lẻ và điểm khi M chẵn trên trục ω . Vì các phương trình (6.23) và phương trình (6.24) hàm ý rằng $H_r(0) = 0$, độc lập với sự lựa chọn các hệ số $\{h(n)\}$. Vì vậy tần số $\omega = 0$ không thể được dùng để xác định các thông số của đáp ứng tần số. Khi M lẻ ta có thể xác định $H_r(\omega)$ ở điểm cách đều nhau trên trục tần số. Các điểm này có thể được chọn như sau:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \quad (6.33)$$

Khi M chẵn, ta cần G điểm tần số, vì ta không thể sử dụng $\omega = 0$, ta có thể sử dụng $\omega = \pi$.

$$a_{10}h(0) + a_{11}h(1) = H_r(0)$$

Trong đó: $a_{00} = 2$; $a_{01} = 2$; $a_{10} = -\sqrt{2}$; $a_{11} = \sqrt{2}$. Các phương trình này được viết dưới dạng ma trận:

$$[A] [h] = [H_r] \quad (6.34)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \end{bmatrix}; \quad H_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

trong đó:

Giải phương trình ma trận trên ta được:

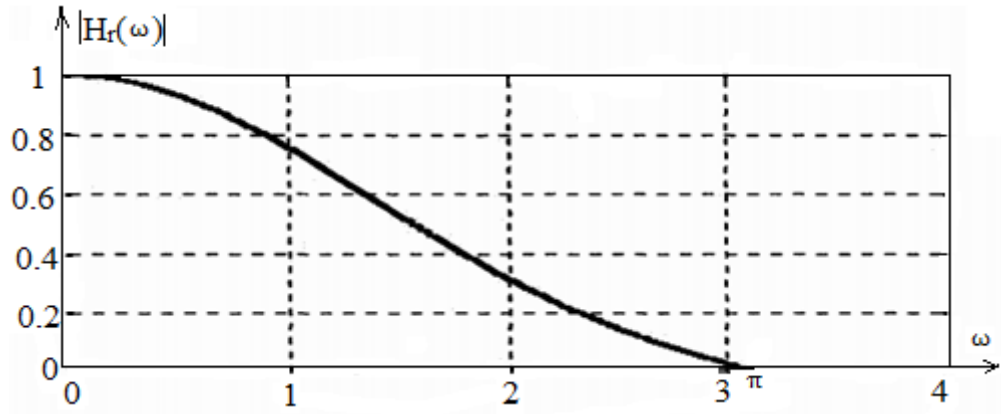
$$h(0) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) = 0.0732232 = h(3)$$

$$h(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1) = 0.426776 = h(2)$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc là: $H(\omega) = H_r(\omega) e^{\frac{3\omega}{2}}$

với $H_r(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4} [(\sqrt{2} - 1)\cos\frac{3\omega}{2} + (\sqrt{2} + 1)\cos\frac{\omega}{2}]$

Đặc tuyến đáp ứng biên độ $|h_f(\omega)|$ và $20\log|H_f(\omega)|$ được vẽ trong hình 6.7. Ta thấy đây là lọc thông thấp.



Tóm lại, tập các điểm tần số được chọn như sau:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{M}; \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}; \quad M \text{ lẻ}$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}; \quad M \text{ chẵn} \quad (6.35)$$

Một sự chọn lựa khác hoàn toàn có thể tránh trường hợp $H(\omega) = 0$ ở $\omega = 0$ (và $\omega = \pi$) đó là:

$$\omega_k = \frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{M}; \quad \text{với} \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}; & M \text{ lẻ} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1; & M \text{ chẵn} \end{cases} \quad (6.36)$$

Với bất kỳ sự chọn lựa nào trong các trường hợp trên, ta định nghĩa:

$$b_{kn} = 2\sin\omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (6.37)$$

Thì các phương trình tuyến tính (6.32) và (6.39) cho bộ lọc FIR phản đối xứng trở thành:

$$\sum_{n=0}^{(M-3)/2} b_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ lẻ} \quad (6.38)$$

$$\sum_{n=0}^{(\frac{M}{2})-1} b_{kn} h(n) = H_r(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad M \text{ chẵn} \quad (6.39)$$

Tập tần số cho bởi phương trình (6.31) cũng có thể được dùng trong phương trình (6.36) và phương trình (6.37) thay vì dùng tập tần số cho bởi phương trình $h(n) = -h(M-1-n)$.

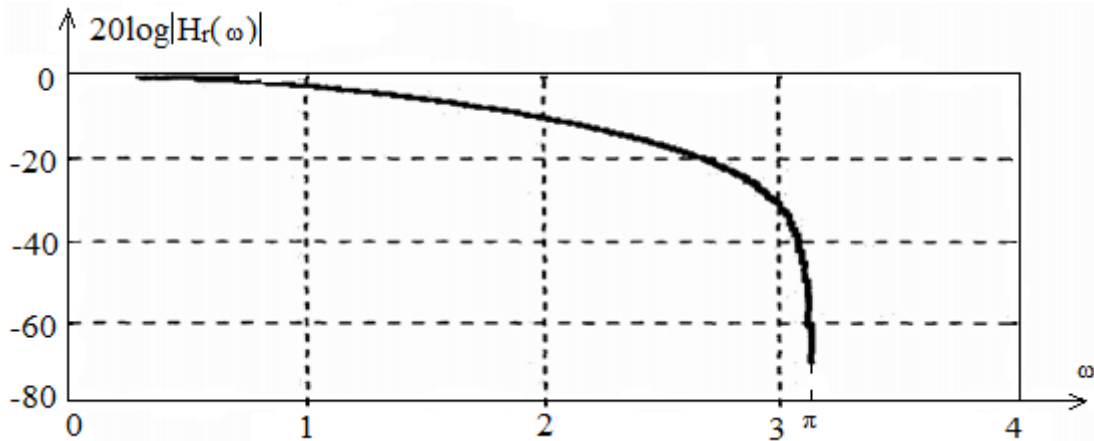
Ví dụ 6.2:

Hãy xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR pha tuyến tính, có chiều dài $M = 4$. Đáp ứng tần số $H(\omega)$ tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi/2$ được xác định như sau: $H_r(0) = 1$; $H_r(\frac{\pi}{2}) = 0.5$

Giải:

Đây là bài toán thiết kế mạch lọc khá đơn giản, các thông số chưa biết là $h(0)$ và $h(1)$. Tập các phương trình tuyến tính là:

$$a_0 h(0) + a_1 h(1) = H_f(0) = 1$$



Hình 6.8. Đặc tuyến biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính.

Ví dụ 6.3:

Hãy xác định các hệ số của bộ lọc FIR tuyến tính pha có chiều dài $M = 11$, đáp ứng xung đối xứng và đáp ứng tần số thỏa mãn điều kiện:

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1; & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & k = 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

Giải:

Đây là một mạch lọc khá dài, hơn không thể tìm được nếu không có sự hỗ trợ của máy vi tính trong việc giải hệ phương trình tuyến tính. Lập trình trên máy tính để giải hệ phương trình này, ta có thể thu được các nghiệm như sau:

$$h(0) = h(14) = 0.04981188$$

$$h(1) = h(13) = 0.0412024$$

$$h(2) = h(12) = 0.06666674$$

$$h(3) = h(11) = -0.03648787$$

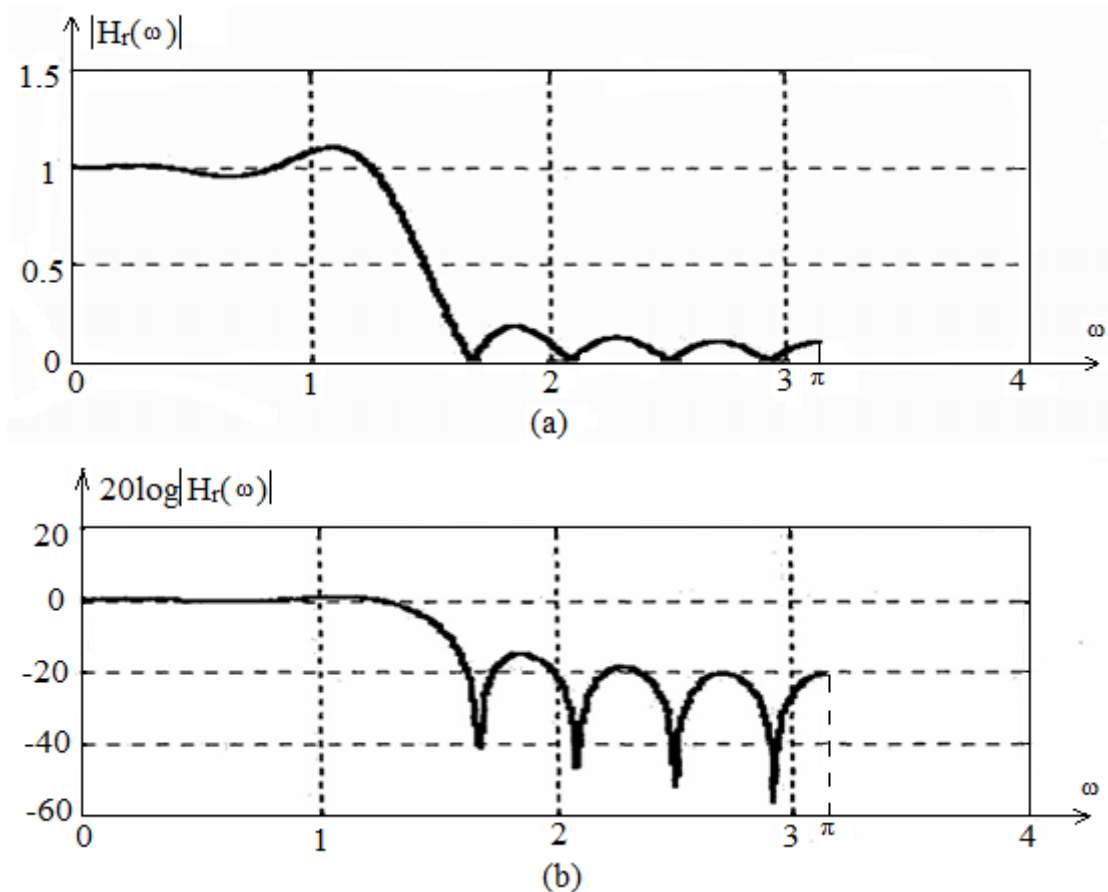
$$h(4) = h(10) = -0.1078689$$

$$h(1) = h(9) = 0.03407801$$

$$h(6) = h(8) = 0.3188924$$

$$h(7) = 0.4666666$$

Đáp ứng tần số của mạch lọc thu được trong hình 6.9. Ta thấy, bộ lọc này có một vọt lố (overshoot) ở cạnh dải thông ở phía trước dải quá độ. Nó cũng có các múi bên (sidelobe) khá lớn trong dải chặn, múi bên lớn nhất là -11 dB.



Hình 6.9: Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 15$.

Nhận xét:

Trong ví dụ trên, ta đã minh họa bài toán thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính với đáp ứng tần số thay đổi đột ngột từ dải thông ($H_f(\omega_r) = 1$) sang dải chặn, trong dải chặn $H_f(\omega)$ được xác định bằng 0 ở các tần số rời rạc. Ta thấy bộ lọc có các múi bên khá lớn, đây là điều không mong muốn.

Trong ví dụ sau đây, thay cho sự thay đổi đột ngột, ta xác định một giá trị trung gian của $H_f(\omega)$ trong dải quá độ. Đáp ứng tần số sẽ có các múi bên nhỏ hơn nhiều trong dải chặn.

Ví dụ 6.4:

Hãy xác định các hệ số của mạch lọc FIR pha tuyến tính $M = 16$ mà đáp ứng xung của nó đối xứng và đáp ứng tần số thỏa mãn điều kiện;

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 0 & ; k = 0,1,7 \\ 0,4,5,6 & ; k = 2,6 \\ 1 & ; k = 3,4,5 \end{cases}$$

Giải:

Giải hệ thống các phương trình tuyến tính, ta thu được đáp ứng xung $h(n)$:

$$h(0) = h(11) = 0,01011716$$

$$h(1) = h(14) = 0,02774791$$

$$h(2) = h(13) = 0,04067173$$

$$h(3) = h(12) = -0,02017317$$

$$h(4) = h(11) = 0,04840164$$

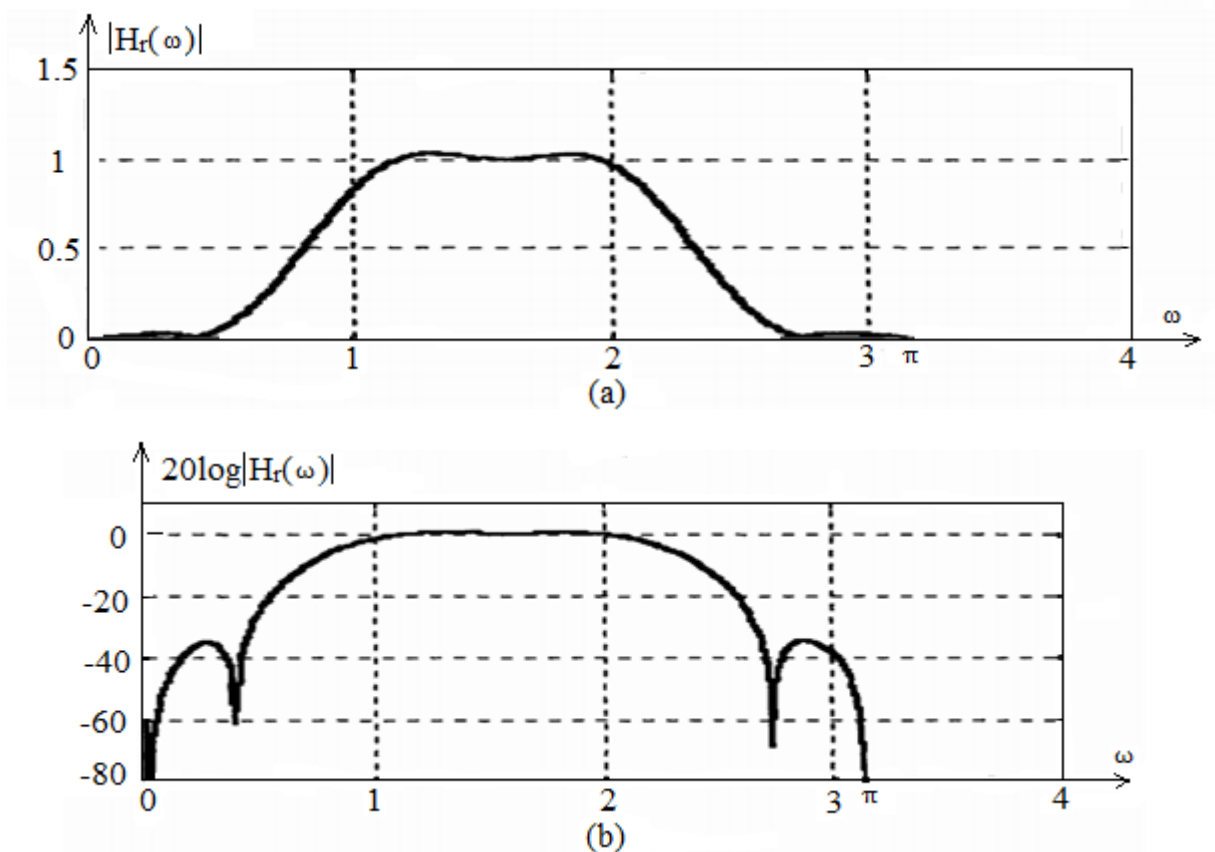
$$h(1) = h(10) = -0,111712$$

$$h(6) = h(9) = -0,266221$$

$$h(7) = h(8) = 0,3362424$$

Đây là mạch lọc thông dải, có đáp ứng tần số được vẽ trong hình 6.10 mức bên lớn nhất trong dải chặn giảm xuống còn -34dB. Cuối cùng, việc chọn các tần số ω_k để xác định các chỉ tiêu của đáp ứng xung của bộ lọc cần dựa trên tần số cắt hay tần số cạnh dải thông ω_p và cạnh dải chặn ω_s . Ta có thể chọn chiều dài M của bộ lọc sao cho trong các tần số $\{\omega_r\}$ có tần số trùng hoặc gần trùng với ω_p, ω_s .

Người thiết kế cũng có thể chọn 1 tập tần số $\{\omega_r\}$ tùy ý không cần phải cách đều, sao cho nó phù hợp nhất với các chỉ tiêu của đáp ứng cho trước.



Hình 6.10 Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M = 16$

6.2.4 Công thức tính $h(n)$.

Trước tiên, ta xác định đáp ứng tần số mong muốn ở một tập tần số rời rạc cách đều nhau $\{\omega_k\}$:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha) \text{ với } \alpha = 0 \text{ hoặc } \alpha = -\frac{1}{2} \quad (6.40)$$

Và $k=0,1,2, \dots, \frac{M-1}{2}$ khi M lẻ, $k=0,1,2, \dots, \frac{M}{2}$ khi M chẵn.

Sau đó tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR từ các mẫu trong miền tần số đã chọn.

Theo định nghĩa, đáp ứng tần số của bộ lọc FIR có chiều dài M là:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (6.41)$$

Giá trị của đáp ứng tần số tại các tần số $\{\omega_r\}$ là:

$$H(k + \alpha) = H \left[\frac{2\pi}{M}(k + \alpha) \right] \\ = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} \quad \text{với } k = 0, 1, 2 \dots M-1 \quad (6.42)$$

Do $H(k + \alpha)$ có tính đối xứng, nên các tần số chỉ định có thể giảm xuống còn $\frac{M-1}{2}$ nếu M lẻ, $\frac{M}{2}$ nếu chẵn. Tuy nhiên, ở đây ta muốn khảo sát đặc tính tần số ở M điểm như đã chỉ định ở phương trình (6.42).

Để xác định được $h(n)$ từ $H(k + \alpha)$, ta nhân 2 vế của phương trình (6.42) với $e^{\frac{j2\pi 2m}{M}}$ trong đó $m=0, 1, 2, \dots, M-1$, rồi lấy tổng trên $k=0, 1, 2, \dots, M-1$. Vế phải của phương trình $h(n)=h(M-1-n)$ sẽ rút gọn về $M.h(n) e^{\frac{j2\pi 2m}{M}}$ và ta thu được:

$$Mh(n)e^{-\frac{j2\pi \alpha n}{M}} = \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{\frac{j2\pi kn}{M}} \\ h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (6.43)$$

Ta thấy trong trường hợp $\alpha = 0$ thì $H(k)=DFT[h(n)]$ và $h(n)=IDFT[H(k)]$.

Để tìm công thức tính $h(n)$, ta sẽ dựa vào tính chất đối xứng của $h(n)$ và giá trị của α . Ta chia thành các trường hợp như sau:

$\alpha = 0$, $h(n)$ đối xứng.

$\alpha = \frac{1}{2}$, $h(n)$ đối xứng.

$\alpha = 0$, $h(n)$ phản đối xứng.

$\alpha = 1/2$, $h(n)$ phản đối xứng.

Xét trường hợp $\alpha = 0$, $h(n)$ đối xứng: $h(n)=h(M-1-n)$

Vì $h(n)$ thực, nên từ phương trình (6.34) ta dễ dàng suy ra được $H(k)=H^*(M-k)$, và vì $h(n)$ đối xứng nên từ phương trình (6.34) ta thu được:

$$H(k) = \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right\} e^{-j\pi k \frac{M-1}{M}}, M \text{ lẻ} \\ H(k) = \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right\} e^{-j\pi k \frac{M-1}{M}}, M \text{ chẵn} \quad (6.44)$$

Ta thấy các số hạng trong dấu $\{ \}$ chính là các mẫu của $H_r(\omega)$ tại các tần số $\omega_k = 2\pi k/M$. Vì vậy biểu thức có dạng:

$$H_k = H_r \left(\frac{2\pi k}{M} \right) e^{-j2\pi k \frac{M-1}{2M}} \quad (6.45)$$

Để thuận tiện, ta viết lại:

$$H_k = H_r \left(\frac{2\pi k}{M} \right) e^{-j\pi k} e^{-j\pi k/M} = G(k) t' \quad (6.46)$$

Trong đó:

$$G(k) = H_r \left(\frac{2\pi k}{M} \right) e^{-j\pi k} = (-1)^k H_r \left(\frac{2\pi k}{M} \right) \quad (6.47)$$

Vì $H_r(\frac{2\pi k}{M})$ có giá trị thực, nên $G(k)$ cũng là dãy thực. Hơn nữa, từ điều kiện

$H_k = H_r^*(M - k)$ dẫn đến kết quả là:

$$G(k) = -G(M - k) \quad (6.48)$$

Khi M chẵn, thì phương trình (6.45) đòi hỏi rằng: $G(M/2)=0$, mặt khác mẫu của đáp ứng tần số tại $\omega = \pi$ phải là 0.

Từ tính chất đối xứng của các mẫu tần số có giá trị thực $G(k)$ trong phương trình (6.45), ta có thể thành lập công thức tính đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc FIR.

Ta bắt đầu từ phương trình (6.43) với $\alpha = 0$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k) e^{j2\pi kn/M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} G(k) e^{j2\pi k(n+\frac{1}{2})/M} \quad (6.49)$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, \quad M \text{ lẻ} \quad (6.50)$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, \quad M \text{ chẵn} \quad (6.51)$$

Từ phương trình (6.50) và (6.51) ta có thể tính trực tiếp $h(n)$ từ $G(k)$ (hay $H_r(\frac{2\pi k}{M})$). Trong cách tính này, để xác định $h(n)$ ta không cần phải tính ma trận nghịch đảo như đã làm trong các ví dụ 6.2, 6.3, 6.4 (giải phương trình ma trận (6.34))

+ Xét trường hợp $\alpha = \frac{1}{2}$

Vì $h(n)$ là dãy thực, nên từ phương trình (6.42) ta suy ra được $H(k+\frac{1}{2})=H^*(M-1-k-\frac{1}{2})$, hay $H(k+1/2)=H(M-k-1/2)$.

Bằng cách liên kết tính chất này với điều kiện đối xứng $h(n)=h(M-1-n)$, ta thu được:

$$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = H_r(\omega_k) e^{-j\pi(k+\alpha)\frac{M-1}{M}} \quad (6.52)$$

Trong đó: $\omega_k = \frac{2\pi(2+k)}{M}$; $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$,

$H_r(\omega_k)$ cho bởi phương trình

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sin\omega(\frac{M+1}{2})}{M+1(\sin\frac{\omega}{2})} \quad \text{cho trường hợp } M \text{ lẻ} \quad (6.53)$$

và phương trình

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1 - z^{-L(M+1)}}{1 - z^{-L}} \quad \text{cho trường hợp } M \text{ chẵn} \quad (6.54)$$

Ta thấy, phương trình (6.49) có dạng của phương trình (6.43) với k được thay thế bằng $(k + \alpha)$.

Để đơn giản ta diễn tả $H(k + \alpha)$ dưới dạng:

$$H(k + \alpha) = G(k + \alpha) e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{\frac{j\pi(k+\frac{1}{2})}{M}} \quad (6.55)$$

Trong đó:

$$G(k + \alpha) = (-1)^k H_r(\omega_k), \quad \omega_k = \frac{2\pi(k + \alpha)}{M}, \quad (6.56)$$

với $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

Từ phương trình (6.55) ta suy ra được $H(k+1/2) = h^*(M-k-1/2)$, tính chất này hàm ý rằng:

$$G(k+1/2) = G(M-k-1/2) \quad (6.57)$$

Dựa vào tính chất đối xứng (6.57) và từ phương trình (6.43) ta có:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{j2\pi\alpha(k+\frac{1}{2})}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} -jG\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j2\pi(k+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})/M}$$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad M \text{ lẻ} \quad (6.58)$$

$$\text{và } h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{\left(\frac{M}{2}\right)-1} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad M \text{ chẵn} \quad (6.59)$$

Tương tự cho trường hợp đáp ứng xung phân đối xứng, ta thiết lập được biểu thức tính $h(n)$ tương ứng với $\alpha = 0$ và $\alpha = \frac{1}{2}$. Cuối cùng công thức tính đáp ứng xung $h(n)$ cho 4 trường hợp được tổng kết trong bảng 6.3.

* Các bước thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp lấy mẫu tần số:

Từ các phân tích vừa rồi, ta sẽ tổng kết thành các bước thiết kế bộ lọc FIR bằng cách lấy mẫu đáp ứng tần số.

+ Bước 1: Chọn loại bộ lọc, chiều dài M của bộ lọc, tính chất đối xứng của $h(n)$, tập tần số ω và chỉ định các mẫu của đáp ứng tần số tương ứng với tập tần số $\{\omega_k\}$.

+ Bước 2: Tính các mẫu $G(k)$ theo công thức tương ứng trong bảng 6.3.

+ Bước 3: Tính đáp ứng xung $h(n)$ theo công thức tương ứng trong bảng 6.3.

+ Bước 4: Tính đáp ứng tần số $H(0)$ theo các phương trình (6.53), (6.54) hoặc phương trình (6.26), (6.27), (6.28), kiểm tra lại trong miền tần số bằng cách vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha. Nếu chưa thỏa các chỉ tiêu kỹ thuật, thì chọn lại M hay tập tần số $\{\omega_k\}$ hay các mẫu $H_r(\omega_k)$ và trở lại từ bước 2.

Bảng 6.3: Công thức tính đáp ứng xung $h(n)$

Đối xứng: $h(n) = h(M-1-n)$	
$a = 0$	$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M}; k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right); G(k) = -G(M-k)$ $h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}$
	$U = \frac{M-1}{2} \text{ khi } M \text{ lẻ và } \frac{M}{2} - 1 \text{ khi } M \text{ chẵn}$
$a = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(M - k - \frac{1}{2}\right)$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^U G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$
Phản đối xứng: $h(n) = -h(M-1-n)$	
$a = 0$	$H(k) = G(k)e^{-j\pi/2} e^{j\pi(2k+1)/2M}, k = 0, 1, \dots, M-1$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right); G(k) = -G(M-k)$ $\frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, M \text{ lẻ}$ $\frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G(k) \cos \frac{\pi k}{M} (2n+1) \right\}, M \text{ chẵn}$

$a = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+2)/2M}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r \left[\frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]$ $\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right), G(M/2) = 0 \text{ với } M \text{ lẻ}$ $h(n) = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^V G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$ $V = \frac{M-3}{2} \text{ khi } M \text{ lẻ và } V = \frac{M}{2} - 1 \text{ khi } M \text{ chẵn}$
-------------------	--

Cuối cùng là khâu xây dựng cấu trúc và thi công bộ lọc.

Ghi chú:

Việc chọn tập tần số $\{\omega_k\}$ và các mẫu $H_r(\omega_k)$ tương ứng được dựa trên đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng. Tuy nhiên, việc chọn $H_r(\omega_k)$ thay đổi đột ngột ở tần số cắt sẽ làm phát sinh các gợn sóng trong dải thông và dải chặn không thể chấp nhận được. Để làm giảm biên độ các gợn sóng, ta phải mở rộng dải quá độ bằng cách thêm vào một số mẫu $H_r(\omega_k)$ có giá trị trung gian trong dải quá độ (gọi là các tham số quá độ). Ta thấy để thực hiện tốt công việc này còn phụ thuộc vào kinh nghiệm của người thiết kế. Các tham số quá độ tối ưu đã được tổng kết bởi Rabiner (1970).

Do tính đối xứng, thay vì phải xác định M mẫu của $H_r(\omega_k)$ ta chỉ cần xác định $(M+1)/2$ mẫu khi M lẻ tương ứng với $k=0,1,2,\dots,\frac{M-1}{2}$ và $M/2$ mẫu khi M chẵn tương ứng với $k=0,1,2,\dots,\frac{M}{2}-1$.

Ví dụ 6.5:

Hãy tính các hệ số của một bộ lọc FIR pha tuyến tính chiều dài $M=32$, có đáp ứng xung thỏa điều kiện đối xứng $h(n)=h(M-1-n)$ và đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$\frac{H_r(2\pi k + \alpha)}{32} = \begin{cases} 1 & ; k = 0,1,2, \dots, 5 \\ T_1 & ; k = 6 \\ 0 & ; k = 7,8, \dots, 15 \end{cases}$$

Trong đó hệ số quá độ là: $T_1=0.3789791$ với $\alpha = 0$ và $T_1=0.3170496$ với $\alpha = \frac{1}{2}$ theo (Rabiner – 1970).

Giải:

Ta thấy đây là bộ lọc thông thấp và bước 1 đã hàm chứa trong các điều kiện của đề bài. Ta thấy, chỉ cần chọn $\frac{M+1}{2} = 16$ mẫu của $H_r(\omega_k)$.

Áp dụng công thức tính $G(k)$ và sau đó là công thức tính hơn trong bảng 6.3, tương ứng với trường hợp $h(n)$ đối xứng và $M=32$ lần lượt cho 2 trường hợp $\alpha = 0$ và $\alpha = \frac{1}{2}$. Kết quả được trình bày sau đây:

$$M=32, \alpha = 0, T_1=0.3789791$$

$$h(0)=h(31)= -0.0071$$

$$h(8)=h(23)= 0.0254$$

$$h(1)=h(30)= -0.0031$$

$$h(9)=h(22)= 0.0399$$

$$h(2)=h(29)= 0.0059$$

$$h(10)=h(21)= 0.0028$$

$$h(3)=h(28)= 0.0135$$

$$h(11)=h(20)= -0.0591$$

$$h(4)=h(27)= 0.0081$$

$$h(12)=h(19)= -0.0684$$

$$h(5)=h(26)= -0.0111$$

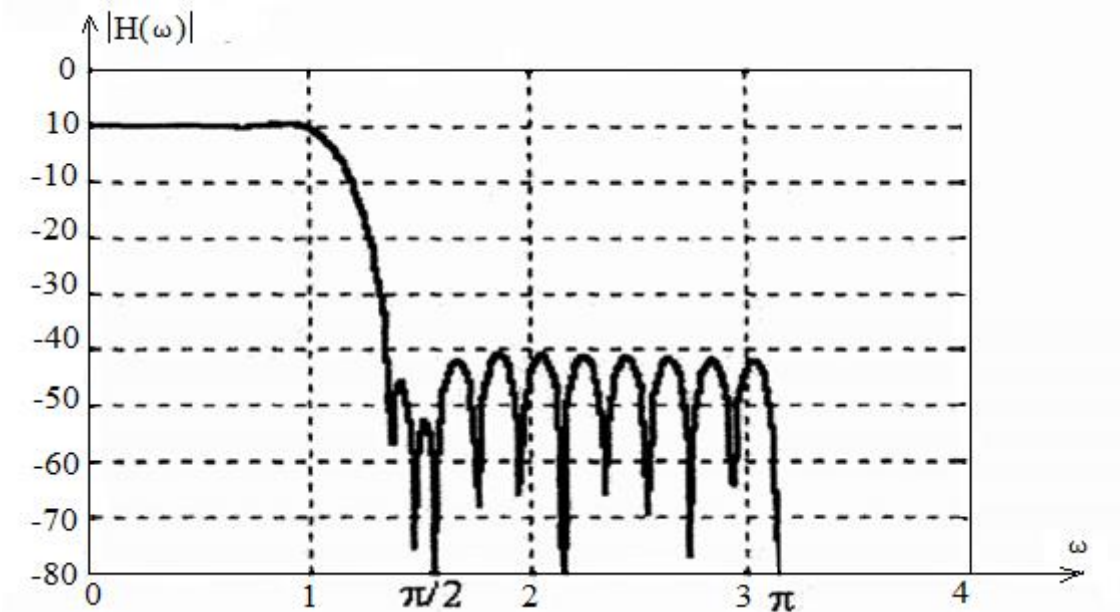
$$h(13)=h(18)= 0.0318$$

$$h(6)=h(25)= -0.0242$$

$$h(14)=h(17)= 0.2081$$

$$h(7)=h(24)= -0.0094$$

$$h(15)=h(16)= 0.3471$$



Hình 6.11 Đặc tuyến đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR có đáp ứng xung đối xứng với $M=32, \alpha = 0, T_1=0.3789791$

Các kết quả trong ví dụ 6.5 thu được từ chương trình firsampled viết bằng ngôn ngữ Matlab.

6.3 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính có độ gợn không đổi bằng phương pháp lặp.

Phương pháp cửa sổ và phương pháp lấy mẫu tần số là kỹ thuật đơn giản cho việc thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính. Tuy nhiên, hai phương pháp này cũng có vài bất lợi nhỏ. Đó là thiếu sự điều khiển chính xác các tần số giới hạn như: tần số cạnh dải thông ω_p và cạnh dải chặn ω_s . Việc thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính có độ gợn không đổi được xem như bài toán gần đúng Chebyshev. Kết quả sẽ là tối ưu, nhưng chúng ta phải trả giá là việc tính toán sẽ khá phức tạp và phải có sự trợ giúp của máy tính. Theo đó, những sai lệch giữa đáp ứng tần số mong muốn với đáp ứng tần số thực được trải đều trên cả dải thông và dải chặn, và sai lệch cực đại sẽ được cực tiểu hóa. Kết quả là xuất hiện những gợn sóng có biên độ bằng nhau trong cả dải thông và dải chặn.

Như ta đã trình bày trong mục 6.2, với một bộ lọc FIR pha tuyến tính có chiều dài M , $H_r(\omega_k)$ được xác định từ $h(n)$ với 4 trường hợp được tổng kết lại như sau:

+ Trường hợp 1: Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng, $h(n) = h(M-1-n)$, và M lẻ

$$H_r(\omega) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (6.60)$$

Nếu ta đặt $k = \left[\frac{M-1}{2-n}\right]$ và định nghĩa một tập tham số mới $\{a(k)\}$ như sau:

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right); & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right); & k = 1, 2, \dots, (M-1)/2 \end{cases}$$

Ta có:
$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos \omega k \quad (6.61)$$

+ Trường hợp 2: Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng, $h(n) = h(M-1-n)$, và M chẵn

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (6.62)$$

Đổi chỉ số từ n thành $k = \frac{M}{2-n}$ và định nghĩa một bộ thông số mới $\{b(k)\}$ như sau:

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2-k}\right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (6.63)$$

Ta có:

$$H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{M/2} b(k) \cos \omega \left(k - \frac{1}{2}\right) \quad (6.64)$$

Để thực hiện việc tối ưu hóa, ta viết lại phương trình (6.61) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \cos \frac{\omega}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} b'(k) \cos \omega k \quad (6.65)$$

Với các hệ số $\{b'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $\{b(k)\}$ như sau:

$$\begin{aligned} b'(0) &= \frac{1}{2} b(1) \\ b'(k) &= 2b(k) - b'(k-1); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 2 \\ b'\left(\frac{M}{2} - 1\right) &= 2b\left(\frac{M}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.66)$$

+ Trường hợp 3: Đáp ứng xung $h(n)$ phản đối xứng, $h(n) = -h(M-1-n)$, và M lẻ

Trong trường hợp này $H_r(\omega_k)$ có biểu thức là:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (6.67)$$

Ta cũng thay đổi chỉ số n của tổng bằng $k = \left[\frac{M-1}{2} - n \right]$ và định nghĩa tập thông số mới:

$$c(k) = 2h \left(\frac{M-1}{2} - k \right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \quad (6.68)$$

Phương trình (6.64) trở thành:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \sin \omega k \quad (6.69)$$

Như trên, để thuận tiện ta sắp xếp phương trình (6.69) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \sin \omega \sum_{k=0}^{(M-3)/2} c'(k) \cos \omega k \quad (6.70)$$

Với các hệ số $\{c'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $\{c(k)\}$ như sau:

$$\begin{aligned} c' \left(\frac{M-3}{2} \right) &= c \left(\frac{M-1}{2} \right) \\ c' \left(\frac{M-5}{2} \right) &= 2c \left(\frac{M-3}{2} \right) \\ c'(k-1) - c'(k+1) &= 2c(k); \quad 2 \leq k \leq \frac{M-5}{2} \\ c'(0) &= \frac{1}{2} c'(2) = c(1) \end{aligned} \quad (6.71)$$

+ Trường hợp 4: Đáp ứng xung $h(n)$ phản đối xứng, $h(n) = -h(M-1-n)$, và M chẵn

Trong trường hợp này $H_r(\omega_k)$ có biểu thức là:

$$H_r(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\left(\frac{M}{2}\right)-1} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (6.72)$$

Ta cũng thay đổi chỉ số n của tổng bằng $k = \left[\frac{M}{2} - n \right]$ và định nghĩa tập thông số.

$$d(k) = 2h \left(\frac{M}{2} - k \right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (6.73)$$

Phương trình (6.69) trở thành:

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k) \sin \omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad (6.74)$$

Như trên, ta sắp xếp phương trình (6.71) dưới dạng:

$$H_r(\omega) = \sin \frac{\omega}{2} \sum_{k=0}^{\left(\frac{M}{2}\right)-1} d'(k) \cos \omega k \quad (6.75)$$

Với các hệ số $\{d'(k)\}$ quan hệ tuyến tính với các hệ số $\{d(k)\}$ như sau:

$$\begin{aligned} d' \left(\frac{M}{2} - 1 \right) &= 2d \left(\frac{M}{2} \right) \\ d'(k-1) - d'(k) &= 2d(k); \quad 2 \leq k \leq \frac{M}{2} - 1 \\ d'(0) - \frac{1}{2}d'(1) &= d(1) \end{aligned} \quad (6.76)$$

Biểu thức $H_r(\omega k)$ trong bốn trường hợp có thể được biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau:

$$H_r(w) = Q(w)p(w) \quad (6.77)$$

Với $Q(\omega)$ và $P(\omega)$ được định nghĩa trong bảng 6.4.

Bảng 6.4

Trường hợp	Loại mạch lọc	$Q(w)$	$P(w)$
1	$h(n) = h(M-1-n)$, M lẻ	1	$\sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} a(k) \cos \omega k$
2	$h(n) = h(M-1-n)$, M chẵn	$\cos \frac{\omega}{2}$	$\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b'(k) \cos \omega k$
3	$h(n) = -h(M-1-n)$, M lẻ	$\sin w$	$\sum_{k=0}^{\frac{M-3}{2}} c'(k) \cos \omega k$
4	$h(n) = -h(M-1-n)$, M chẵn	$\sin$	$\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} d'(k) \cos \omega k$

Tổng quát, $Q(\omega)$ và $P(\omega)$ có thể được diễn tả như sau:

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1 & ; \quad (\text{Trường hợp 1}) \\ \cos \frac{\omega}{2} & ; \quad (\text{Trường hợp 2}) \\ \sin \omega & ; \quad (\text{Trường hợp 3}) \\ \sin \frac{\omega}{2} & ; \quad (\text{Trường hợp 4}) \end{cases} \quad (6.78)$$

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos \omega k \quad (6.79)$$

Với $\{a(k)\}$ là các tham số đặc trưng cho bộ lọc mà nó có quan hệ tuyến tính với đáp ứng xung $h(n)$ và:

$$L = \begin{cases} \frac{M-1}{2}; & (\text{Trường hợp 1}) \\ \frac{M-3}{2}; & (\text{Trường hợp 3}) \\ \frac{M}{2} - 1; & (\text{Trường hợp 2,4}) \end{cases}$$

Hàm sai số có trọng số $E(\omega)$

Ta thấy $Q(\omega)$, $P(\omega)$ là các hàm có giá trị thực, trong đó, $Q(\omega)$ là một hàm cố định đã biết và $P(\omega)$ là một hàm cần phải tìm. Gọi $H_{dr}(\omega)$ là đáp ứng tần số mong muốn có giá trị thực, $H_{dr}(\omega)$ được chọn một cách đơn giản là bằng 1 trong dải thông, bằng zêro trong dải chặn (Xem đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng chương 4). Vấn đề của chúng ta là phải tìm các hệ số $\alpha(k)$ của $P(\omega)$ giữa đáp ứng tần số $H_r(\omega)$ của bộ lọc thực tế và đáp ứng tần số $H_{dr}(\omega)$ của bộ lọc lý tưởng là nhỏ nhất. Để thực hiện điều này, ta định nghĩa một hàm trọng số trên sai số gần đúng (the weighting function on the approximation error) $W(\omega)$. Từ việc chỉ định $H_{dr}(\omega)$ và $W(\omega)$, sai số giữa bộ lọc số thực tế và bộ lọc số lý tưởng được đánh giá hàm sai số có trọng số $E(\omega)$ như sau:

$$E(\omega) = W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)] = W(\omega)[H_{dr}(\omega) - Q(\omega)P(\omega)]$$

$$E(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \left[\frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \quad (6.80)$$

Về mặt quy ước toán học, ta có thể định nghĩa một hàm trọng số biến dạng:

$$\widehat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \quad (6.81)$$

Và đáp ứng tần số biến dạng:

$$\widehat{H}_{dr}(\omega) = \frac{H_{dr}(\omega)}{Q(\omega)} \quad (6.82)$$

$$\text{Vậy:} \quad E(\omega) = \widehat{W}(\omega)[\widehat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \quad (6.83)$$

Phương trình (6.83) được sử dụng cho tất cả 4 loại bộ lọc FIR pha tuyến tính đã trình bày ở trên.

Bài toán gần đúng ở đây là xác định tập hệ số sao cho nó cực tiểu hóa được giá trị tuyệt đối của sai số $E(\omega)$ trong các dải tần mà ta thực hiện phép tính gần đúng. Ta giải quyết vấn đề này bằng công thức toán học sau:

$$\min_{\forall \alpha(k)} \left[\max_{\omega \in S} |E(\omega)| \right] = \min_{\forall \alpha(k)} \left[\max_{\omega \in S} \left| \widehat{W}(\omega) \left[\widehat{H}_{dr}(\omega) - \sum_{k=0}^M \alpha(k) \cos \omega k \right] \right| \right]$$

Trong đó: S bao gồm dải thông và dải chặn của mạch lọc mong muốn.

Xác định hàm trọng số $W(\omega)$:

Hàm trọng số $W(\omega)$ có thể được xác định bằng cách so sánh đáp ứng biên độ của bộ lọc thực tế với đáp ứng biên độ của bộ lọc lý tưởng.

Trong dải thông, đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$1 - d_1 \leq H_r(\omega) \leq 1 + d_1; \quad \omega_r \quad \text{hay} \quad \left| |H_{dr}(\omega)| - |H_r(\omega)| \right| = d_1 \quad (6.84)$$

Trong dải chặn, đáp ứng tần số thỏa điều kiện:

$$-d_2 \leq H_r(\omega) \leq d_2 \quad ; \quad \omega_s \quad \text{hay} \quad | | H_{dr}(\omega) | - | H_r(\omega) | | = d_2 \quad (6.85)$$

Ở đây: δ_1 là gợn sóng dải thông, δ_2 là gợn sóng dải chặn.

$(\delta_s - \delta_p)$ là độ rộng dải quá độ.

Nói chung, $d_1 d_2$ nên hàm trọng số có thể được chọn khác nhau trong dải thông và dải chặn và việc chọn $W(\omega)$ phụ thuộc vào giá trị của d_1 và d_2 .

Ta đặt:

$$\delta = \max |E(\omega)| \quad (6.86)$$

thì:

$$d = \max[d_1, d_2] \quad (6.87)$$

Giả sử $d_1 > d_2$ thì ta có: $d_1 = d_2$, khi đó hàm trọng số sẽ được chuẩn hóa bằng 1 ở dải chặn và bằng d_1/d_2 ở dải thông, tức là:

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & \text{ở dải thông} \\ 1 & \text{ở dải chặn} \end{cases} \quad (6.88)$$

Parks và McClellan (1972) đã vận dụng phép xấp xỉ Chebyshev, cụ thể là định lý xoay chiều (Alternation theorem) để giải bài toán này.

* Định lý xoay chiều: Gọi S là một tập hợp con trong khoảng tần số $[0, \pi)$, điều kiện cần và miền đủ để cho $P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(K) \cos \omega k$ xấp xỉ với $H_{dr}(\omega)$ một cách tốt nhất và duy nhất theo nghĩa Chebyshev trong S là hàm sai số $E(\omega)$ tồn tại ít nhất $L+2$ thành phần tần số cực trị trong S . Nghĩa là phải tồn tại ít nhất $L+2$ tần số ω_i trong S sao cho:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots \quad | \omega_{L+2}, E(\omega_i) | = -E(\omega_{i+1})$$

Và

$$| E(\omega_i) | = \text{Max} | E(\omega) | \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots, L+2 \dots$$

Ta thấy rằng, hàm sai số đổi dấu giữa hai tần số cực trị kế nhau nên định lý này được gọi là định lý xoay chiều.

Để làm rõ định lý xoay chiều. Ta xét trường hợp thiết kế một bộ lọc thông thấp với dải thông là $0 \leq \omega \leq \omega_p$ và dải chặn là $\omega_s \leq \omega \leq \omega_p$.

$$\text{Ta có: } E(\omega) = W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]$$

Vì $W(\omega)$ và $H_{dr}(\omega)$ có giá trị hằng (trên từng đoạn) nên:

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \{W(\omega)[H_{dr}(\omega) - H_r(\omega)]\} = -W(\omega) \frac{dH_r(\omega)}{d\omega}$$

Ta cho đạo hàm bằng 0 để tìm cực trị:

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH_r(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (6.89)$$

Từ phương trình (1.85) ta thấy rằng các tần số ω_i tương ứng với các đỉnh của $E(\omega)$ cũng tương ứng với các đỉnh của $H_r(\omega)$ với độ sai lệch cho phép. Vì $H_r(\omega)$ là một đa thức lượng giác bậc L , giả sử thiết kế bộ lọc ứng với trường hợp 1, ta có:

$$\begin{aligned} H_r(\omega) &= \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos \omega k \\ &= \sum_{k=0}^L \alpha'(k) \left[\sum_{n=0}^k \beta_{nk} (\cos \omega)^n \right] = \sum_{k=0}^L \alpha'(k) (\cos \omega)^k \end{aligned} \quad (6.90)$$

Ta nhận thấy $H_r(\omega)$ có thể có 1 cực trị trong khoảng mở $0 < \omega < \pi$, thêm vào đó $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ thường là điểm cực trị của $H_r(\omega)$ và cũng là của $E(\omega)$. Ngoài ra, $\omega = \omega_p$ và $\omega = \omega_s$ cũng là điểm cực trị của $H_r(\omega)$. Vậy có nhiều nhất là $L+3$ tần số cực trị trong hàm sai số $E(\omega)$ cho sự xấp xỉ duy nhất và tốt nhất với bộ lọc thông thấp lý tưởng. Mặt khác, định lý xoay chiều phát biểu rằng phải có ít nhất $L+2$ tần số cực trị trong $E(\omega)$. Vì vậy, $E(\omega)$ của bộ lọc có thể có $L+3$ hoặc $L+2$ cực trị.

Định lý xoay chiều bảo đảm một lời giải duy nhất cho việc xấp xỉ tối ưu Chebyshev. Từ các tần số cực trị mong muốn chúng ta có hệ thống phương trình:

$$\hat{W}(\omega_n) [\hat{H}_{dr}(\omega_n) - P(\omega_n)] = (-1^n) \delta \quad \text{với } n = 0, 1, \dots, L+1 \quad (6.91)$$

Của hàm sai số $E(\omega)$, nếu ta chọn $W(\omega)$ như trong phương trình (1.88) thì hệ phương trình (1.91) có thể viết lại:

$$P(\omega_n) + \frac{(-1^n) \delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n) \quad , n = 0, 1, 2, \dots, L+1 \quad (6.92)$$

$$\text{Hay} \quad \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(\omega_n k) + \frac{(-1^n) \delta}{\hat{W}(\omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\omega_n) \quad (6.93)$$

Nếu ta xem $\alpha(k)$ là các tham số đã được xác định, phương trình (1.93) có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos L\omega_0 & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \dots & \cos L\omega_1 & \frac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_{L+1} & \cos 2\omega_{L+1} & \dots & \cos L\omega_{L+1} & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dr}(\omega_0) \\ \hat{H}_{dr}(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_{dr}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

* Phương pháp lặp và thuật toán chuyển đổi Remez:

Khởi đầu, chúng ta không biết tập các tần số cực trị $|\omega_n|$ cũng không biết các tham số $|\alpha(k)|$ và δ . Để tìm các tham số này, chúng ta dùng thuật toán lặp, gọi là thuật toán chuyển đổi Remez. Nội dung của thuật toán này được tóm tắt như sau: trước tiên, chúng ta dự đoán một tập tần số cực trị $|\omega_n|$ sau đó lần lượt tính δ , $P(\omega)$ và hàm sai số $E(\omega)$. Từ hàm sai số $E(\omega)$ chúng ta xác định tập $(L+2)$ tần số cực trị mới và tiến trình

này được lặp lại cho đến khi đạt được tập tần số cực trị tối ưu.

Áp dụng thuật toán Remez vào phương pháp lặp để thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính theo các bước như sau:

+ Bước 1: Chọn loại bộ lọc lý tưởng và xác định đáp ứng biên độ $|H_{dr}(\omega)|$, sau đó chọn hàm trọng số $W(\omega)$ (dựa theo các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thực tế), chọn chiều dài của bộ lọc số M , suy ra L theo phương trình (6.79).

+ Bước 2: Chọn loại bộ lọc theo các trường hợp trong bảng 6.4 và xác định bài toán gần đúng $E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}(\omega) - P(\omega)]$

+ Bước 3: Sử dụng thuật toán Remez để giải bài toán gần đúng này. Cụ thể như sau:

- Chọn ra tập hợp $L+2$ điểm tần số rời rạc ban đầu, trong dải tần số $[0, \pi]$.

- Tính δ : Ta có thể tính δ bằng phương trình ma trận (6.94), tuy nhiên theo cách này ta phải tính ma trận nghịch đảo, việc tính ma trận nghịch đảo làm hao phí thời gian và không hiệu quả. Vì vậy, từ phương trình (6.94), Rabiner, McClellan,... và Parks (1971) đã đề ra công thức tính δ có hiệu quả hơn, như sau:

$$\delta = \frac{\gamma_0 \hat{H}_{dr}(\omega_0) + \gamma_1 \hat{H}_{dr}(\omega_1) + \dots + \gamma_{L+1} \hat{H}_{dr}(\omega_{L+1})}{\frac{\gamma_0}{\hat{W}(\omega_0)} - \frac{\gamma_1}{\hat{W}(\omega_1)} + \dots + \frac{(-1)^{L+1} \gamma_{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})}} \quad (6.95)$$

Trong đó:

$$\gamma_k = \prod_{n=0}^{L+1} \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_n} \quad (6.96)$$

Xác định $P(\omega)$ từ δ : Vì $P(\omega)$ là một đa thức lượng giác có dạng:

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) x^k \quad \text{với } x = \cos \omega$$

Ngoài ra, từ phương trình (1.90) ta có:

$$P(\omega_n) = \hat{H}_{dr}(\omega_n) - \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\omega_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, L+1 \quad (6.97)$$

Ta có thể dùng công thức nội suy Lagrange để tính $P(\omega)$, đó là:

$$P(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^L P(\omega_n) \left[\frac{\beta_n}{x - x_n} \right]}{\sum_{n=0}^L \left[\frac{\beta_n}{x - x_n} \right]} \quad (6.98)$$

Với $x = \cos \omega$, $x_k = \cos \omega_k$ và $\beta_k = \prod_{n=0, n \neq k}^L \frac{1}{x_k - x_n}$

Xác định được hàm lỗi $E(\omega)$ trên một tập dày đặc các điểm tần số được xác định bởi công thức sau:

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dr}(\omega) - P(\omega)] \quad (6.99)$$

Thông thường, số điểm tần số để tính $E(\omega)$ là $16M$, với M là chiều dài của bộ lọc: Nếu $|E(\omega)| > \delta$ ở một hay nhiều tần số trên hơn thì một tập $(L+2)$ tần số cực trị mới được chọn và tiến trình được lặp lại từ phương trình (6.95). Và tập tần số cực trị mới được chọn tương ứng với các đỉnh của hàm sai số $|E(\omega)|$, nên theo thuật toán này, giá trị của δ tăng lên sau mỗi lần lặp cho tới khi nó hội tụ đến một giới hạn trên, đạt được lời giải tối ưu cho bài toán xấp xỉ Chebyshev. Khi $|E(\omega)| \leq \delta$ với tất cả các tần số trong tập các điểm tần số thì lời giải tối ưu đã tìm được.

+ Bước 4: Xác định đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thực tế. Ta có thể thực hiện bằng 2 cách:

Từ $P(\omega)$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ lấy mẫu $P(\omega)$ theo M điểm sau đó xác định các hệ số và dùng IDFT để tính $h(n)$.

Từ $P(\omega)$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ tính trực tiếp $h(n)$ mà không cần qua bước trung gian là $\alpha(n)$, bởi vì ta đã có:

$H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$ tại các tần số $\omega = \frac{2\pi k}{M}$, $k = 0, 1, \dots, (M-1)/2$ cho M lẻ hay $k=0, 1, \dots, M/2$ cho M chẵn.

Sau đó $h(n)$ có thể được xác định bằng cách công thức trong bảng 6.3, tùy theo loại mạch lọc được thiết kế.

Ví dụ 6.6:

Một bộ lọc thông thấp có chiều dài $M = 61$ với tần số cạnh dải thông $f_p = 0.1$ và tần số cạnh dải chặn $f_s = 0.11$ và $\delta_1 = \delta_2 = 0.0011$.

Giải:

Bộ lọc thông thấp có 2 dải, gọi là bộ lọc 2 dải, gồm: dải thông có tần số f chuẩn hóa từ 0 đến 0.1 (tần số góc ω tương ứng từ 0 đến $2\pi/10$), dải chặn từ 0.11 đến 0.1 (tương ứng với ω từ $3\pi/10$ đến π). Các biên tần của dải thông là (0, 0.1) và các biên tần của dải chặn là (0.11, 1). Bộ lọc thông thấp có đáp ứng biên độ trong dải thông là 1 và trong dải chặn là 0. Hàm trọng số được chọn trong dải thông là 1 và trong dải chặn cũng là 1, vì $\delta_1 = \delta_2$ chiều dài của bộ lọc là 61.

Ta sử dụng hàm `remez` trong Signal Processing Toolbox của MATLAB. Hàm này có chức năng thiết kế bộ lọc FIR độ gọn bằng nhau dựa trên thuật toán chuyển đổi Remez. Nó có nhiều cú pháp với số đối số vào và ra khác nhau. Ở đây, ta sử dụng cú pháp sau đây để thiết kế bộ lọc FIR đáp ứng xung đối xứng:

$[hn, Err] = \text{remez}(N, F, A, W)$

Các đối số vào: $N = M - 1$, với M là chiều dài của bộ lọc.

F = Vector các biên tần được tính theo tần số chuẩn hóa, được xếp theo thứ tự tăng dần từ 0 đến 1, tương ứng với tần số Nyquist hay phân nửa tần số lấy mẫu. Vậy số phần tử của F là chẵn.

A = Vector giá trị đáp ứng biên độ tại các biên tần.

Vậy nó có cùng kích thước với F .

W = Vector các giá trị của hàm trọng số, ứng với mỗi dải tần có một giá trị trọng số. Vậy số phần tử của W bằng phân nửa số phần tử của F hoặc A .

Các đối số ra: h_n = Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng có chiều dài M .

Err = Giá trị cực đại của hàm sai số có trọng số.

Trong ví dụ này, các đối số vào là: $N = 60$, $F = [0.2.3 \ 1]$, $A = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$, $W = [1 \ 1]$

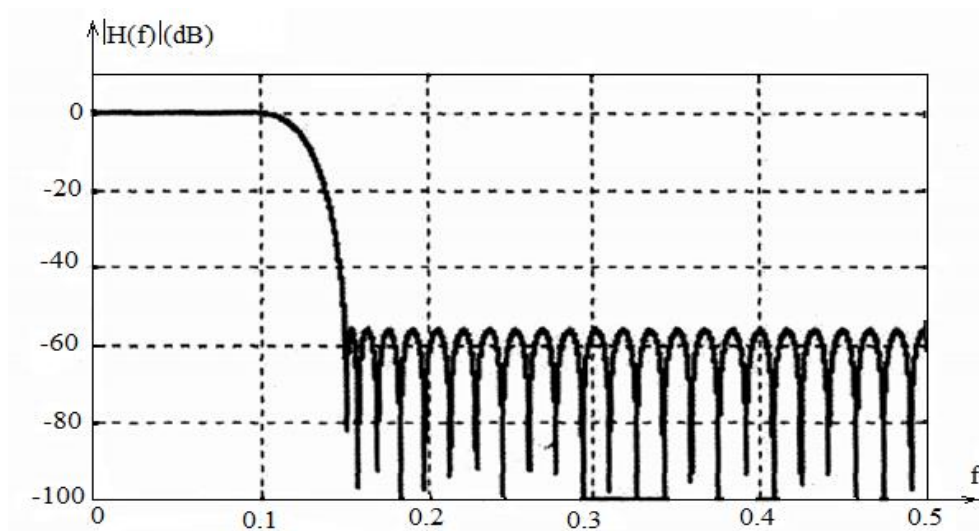
* Lưu ý: Như ta biết, tần số dao động cao nhất của tín hiệu rời rạc $f = 0.1$ (tương ứng với phân nửa tần số lấy mẫu). Tuy nhiên, chương trình remez trong MATLAB qui ước tần số dao động cao nhất là 1. Vì vậy dải tần phải được kéo dãn ra 2 lần, nghĩa là thay vì nhập vector $F = [0. \ 1. \ 11. \ 1]$ ta phải nhập $F = [0.2. \ 3.1]$.

Kết quả là: h_n = đáp ứng xung $h(n)$, được trình bày trong bảng 6.1.

$err = 0.0011 = -16.3919\text{dB}$

Đặc tuyến đáp ứng biên độ được vẽ trong hình 6.12. Ta thấy kết quả đã thỏa mãn một cách chính xác các chỉ tiêu đã đề ra. Ta thử tăng chiều dài của bộ lọc lên $M = 101$, khi đó sai số giảm xuống đến: $err = 0.00001 = -81.6402 \text{ dB}$ đặc tuyến đáp ứng biên độ ứng với $M = 101$.

$h(0)=h(60)=-0.0012$	$h(16)=h(44)=-0.0147$
$h(1)=h(59)=-0.0007$	$h(17)=h(43)=-0.0120$
$h(2)=h(58)=-0.0001$	$h(18)=h(42)=0.00003$
$h(3)=h(57)=0.0014$	$h(19)=h(41)=0.0157$
$h(4)=h(56)=0.0023$	$h(20)=h(40)=0.0257$
$h(5)=h(55)=0.0020$	$h(21)=h(39)=0.0211$
$h(6)=h(54)=0.0001$	$h(22)=h(38)=0.0001$
$h(7)=h(53)=-0.0026$	$h(23)=h(37)=-0.0289$
$h(8)=h(52)=-0.0045$	$h(24)=h(36)=-0.0491$
$h(9)=h(51)=-0.0038$	$h(25)=h(35)=-0.0227$
$h(10)=h(50)=0.0001$	$h(26)=h(34)=-0.0001$
$h(11)=h(49)=0.0052$	$h(27)=h(33)=-0.0001$
$h(12)=h(48)=0.0085$	$h(28)=h(32)=0.1578$
$h(13)=h(47)=0.0070$	$h(29)=h(31)=0.2247$
$h(14)=h(46)=0.0001$	$h(30)=h(30)=0.2501$
$h(15)=h(45)=-0.0090$	



Hình 6.12 Đáp ứng biên độ của bộ lọc FIR có độ gợn bằng nhau với chiều dài $M=61$.

6.4 So sánh các phương pháp thiết kế bộ lọc FIR.

Về mặt lịch sử, phương pháp thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính sử dụng cửa sổ là phương pháp được đề xuất đầu tiên. Phương pháp lấy mẫu trong miền tần số và phương pháp xấp xỉ Chebyshev được phát triển vào những năm 1970 và trở nên rất phổ biến trong thực tế.

Điểm bất lợi chính của phương pháp cửa sổ là thiếu sự ấn định chính xác các tần số giới hạn, chuẩn $h(n)$ như ω_p và ω_s . Nói chung, giá trị của ω_p và ω_s phụ thuộc vào loại cửa sổ và chiều dài của bộ lọc M .

Phương pháp lấy mẫu tần số cung cấp một sự cải tiến trên phương pháp cửa sổ khi $H_r(\omega)$ được xác định ở các tần số $\omega_k = 2\pi k/M$ và dải quá độ là bội số của $2\pi/M$. Phương pháp này đặc biệt tiện lợi khi bộ lọc FIR được thực hiện trong miền tần số bởi biến đổi Fourier rời rạc (DFT). Một đặc điểm quan trọng là $H_r(\omega)_k$ có giá trị 1 hoặc 0 ở các dải tần, ngoại trừ dải quá độ.

Phương pháp xấp xỉ Chebyshev cung cấp sự điều khiển toàn bộ những chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số. Vì vậy phương pháp này thường được ưa chuộng hơn hai phương pháp trên. Chuẩn $h(n)$ như với một bộ lọc thông thấp, các tham số được cho là ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 , chúng ta có thể xác định các tham số M , δ và tối ưu hoá các bộ lọc tương ứng với δ_2 , với việc trải đều sai số trên dải thông và dải chặn của bộ lọc, kết quả là ta thu được một bộ lọc tối ưu, đó là mức cực đại của méo bên được cực tiểu hoá. Phương pháp thiết kế

Chebyshev trên cơ sở thuật toán chuyển đổi Remez, yêu cầu chúng ta xác định các tần số

δ_p , δ_s và tỉ số δ_1/δ_2 . Nhưng thuận lợi hơn nếu chúng ta xác định được ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 . Và chiều dài M của bộ lọc. Mặc dù không có công thức chính xác để tính chiều dài của bộ lọc, nhưng ta có thể xác định M một cách gần đúng từ ω_p , ω_s , δ_1 , δ_2 theo công thức khá đơn giản của Rabiner (1971):

$$M \approx \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2} - 13)}{14.6 \Delta f} + 1 \quad (6.100)$$

Trong đó: Δf là độ rộng của dải quá độ được định nghĩa như sau:

$$\Delta f = \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}$$

Một công thức chính xác hơn được đề xuất bởi Herrman (1973) là:

$$M \approx \frac{D_v(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f^2)}{\Delta f} + 1 \quad (6.101)$$

Trong đó:

$$D_v(\delta_1, \delta_2) = [0.005309(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.07114(\log_{10}\delta_1) - 0.4761](\log_{10}\delta_2) - [0.00266(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.5941\log_{10}\delta_1 + 0.42781] \quad (6.102)$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.51244(\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2) \quad (6.103)$$

Các công thức này thật sự hữu dụng để đạt được một sự ước lượng tốt chiều dài M của bộ lọc để thu được các tham số Δf , δ_1 , δ_2 mà ta mong muốn.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 6.1

Hãy xác định biểu thức của cửa sổ Hanning và Hamming với $N = 5$, sau đó vẽ đồ thị của cửa sổ trong miền n

Bài 6.2

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp FIR pha tuyến tính, với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ bằng phương pháp cửa sổ chữ nhật. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc

Bài 6.3

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao FIR pha tuyến tính, với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ tam giác. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc

Bài 6.4

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông dải FIR pha tuyến tính, với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ hanning. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc

Bài 6.5

Hãy tổng hợp bộ lọc số chắn dải FIR pha tuyến tính, với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ hamming. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc

Bài 6.6

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao FIR pha tuyến tính, với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ bằng phương pháp lấy mẫu tần số

Bài 6.7

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông dải FIR pha tuyến tính, với $N = 10$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$, $\omega_{c2} = \frac{3\pi}{4}$ bằng phương pháp lấy mẫu tần số

Bài 6.8

Hãy tổng hợp bộ lọc số chắn dải FIR pha tuyến tính, với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp lấy mẫu tần số

CHƯƠNG 7: THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ IIR

7.1 Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự.

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp chuyển đổi hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự $H_a(s)$ sang hàm truyền đạt của hệ thống số $H(z)$. Như vậy, trước đó chúng ta đã thiết kế được bộ lọc tương tự, như đã nói ở trên việc làm này đã được phát triển từ lâu và đã đạt được các kết quả tốt, chúng ta sẽ tổng kết sơ lược trong phần sau.

7.1.1 Nguyên tắc

Hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự (trong miền biến phức s) có dạng:

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^M \alpha_k s^k} \quad (7.1)$$

trong đó $\{\alpha_k\}$ $\{\beta_k\}$ là các hệ số của bộ lọc.

Hàm truyền đạt cũng có thể được biểu diễn dưới dạng biến đổi Laplace của đáp ứng xung:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (7.2)$$

Một bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt được mô tả như (7.2) cũng có thể được biểu diễn bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (7.3)$$

với $x(t)$, $y(t)$ lần lượt là tín hiệu vào và tín hiệu ra của bộ lọc.

Mỗi cách biểu hiện trong ba cách biểu diễn tương đương của bộ lọc tương tự như trên sẽ đưa đến một phương pháp chuyển đổi sang miền số.

Ta nhớ lại rằng một hệ thống tương tự tuyến tính bất biến theo thời gian với hàm truyền đạt $H(s)$ gọi là ổn định nếu tất cả các cực của $H(s)$ đều nằm ở nửa trái của mặt phẳng s . Vì vậy, một phương pháp chuyển đổi từ miền tương tự sang miền số phải thỏa các nguyên tắc sau:

Trục ảo $j\omega$ trong mặt phẳng s sẽ ánh xạ thành vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z . Nguyên tắc này bảo đảm có mối liên hệ trực tiếp giữa hai biến tần số trong hai miền.

Phần nửa trái của mặt phẳng s sẽ ánh xạ thành phần ở phía bên trong vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z . Nguyên tắc này bảo đảm một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được chuyển thành một bộ lọc số ổn định.

7.1.2 Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp tương đương vi phân

Một trong những phương pháp đơn giản nhất để chuyển đổi một bộ lọc tương tự sang bộ lọc số là xấp xỉ phương trình vi phân bằng một phương trình sai phân. Phương

pháp này giống như cách giải phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng bằng phương pháp số trên máy tính.

Đạo hàm $dy(t)/dt$ tại $t = nT_s$, với T_s là chu kỳ lấy mẫu, được thay bằng sai phân lùi $[y(nT_s) - y(nT_s - T_s)]/T_s$. Tức là:

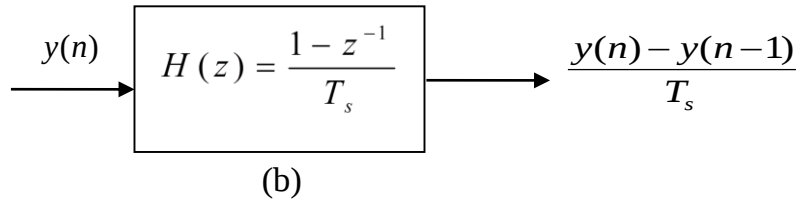
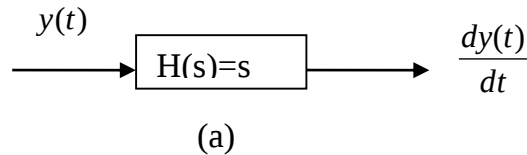
$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT_s} = \frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T_s} \quad (7.4)$$

Với $y(n) \equiv y(nT_s)$

Hệ thống vi phân tương tự với đáp ứng $dy(t)/dt$ có hàm truyền đạt là $H(s)=s$, tương đương trong miền số là một hệ thống số với đáp ứng $[y(n) - y(n-1)]/T_s$ sẽ có hàm truyền đạt là: $H(z) = (1 - z^{-1})/T_s$. Kết quả, ta thu được sự tương đương trong miền tần số của quan hệ (7.4) là:

$$S = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad (7.5)$$

Đạo hàm bậc hai $d^2y(t)/dt^2$ được thay bằng sai phân bậc hai:



$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = \frac{[y(nT_s) - y(nT_s - T_s)]/T_s - [y(nT_s - T_s) - y(nT_s - 2T_s)]/T_s}{T_s} \\ &= \frac{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)}{T_s^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Trong miền tần số, phương trình (7.3) tương đương với:

$$s^2 = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T_s^2} = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s} \right)^2 \quad (7.7)$$

Từ đây có thể rút ra mối quan hệ tương trong miền tần số khi thay thế đạo hàm bậc k bằng sai phân bậc k như sau:

$$s^k = \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_s} \right)^k \quad (7.8)$$

Kết quả là hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR có được từ phép xấp xỉ đạo hàm bằng sai phân, đó là:

$$H_{(z)} = H_a(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T_s} \quad (7.9)$$

trong đó $H_a(s)$ là hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự được đặc trưng bởi phương trình vi phân (7.3). Ta hãy xem ý nghĩa của phép ánh xạ từ mặt phẳng s sang mặt phẳng z theo phương trình (7.5), ta viết lại:

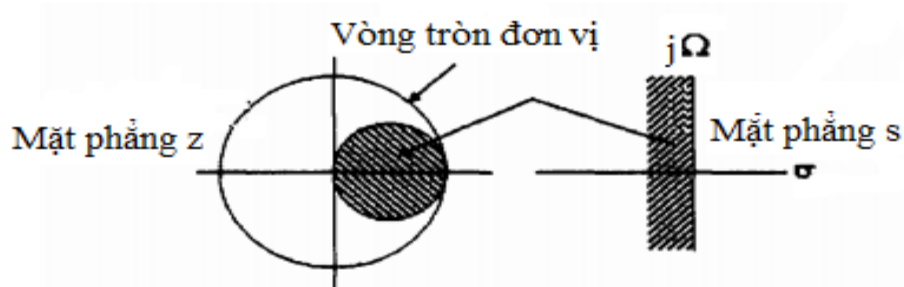
$$s = \frac{1-z^{-1}}{T_z} \quad \text{hay} \quad z = \frac{1}{1-sT_s} \quad (7.10)$$

Nếu thay $s = j\Omega$ vào phương trình (7.8) ta có:

$$z = \frac{1}{1-j\Omega T_s} = \frac{1}{1+\Omega^2 T_s^2} + j \frac{\Omega T_s}{1+\Omega^2 T_s^2} \quad (7.11)$$

Khi thay đổi từ $-\infty \rightarrow +\infty$ thì quỹ tích tương ứng của các điểm trong mặt phẳng z là một vòng tròn có bán kính $\frac{1}{2}$ và tâm đặt tại điểm $z = \frac{1}{2}$.

Dễ dàng chứng tỏ rằng phép ánh xạ G biến các điểm trong nửa trái trên mặt phẳng s thành các điểm tương ứng bên trong vòng tròn có bán kính $\frac{1}{2}$ và tâm $(1/2, 0)$ trong mặt phẳng z và các điểm ở nửa phải của mặt phẳng s sẽ chuyển thành các điểm tương ứng ở bên ngoài vòng tròn này, trong mặt phẳng z .



Hình 7.1 Phép ánh xạ $s = (1-z^{-1})/T_s$ biến nửa trái của mặt phẳng s thành miền trong bán kính $\frac{1}{2}$, tâm $z = \frac{1}{2}$ trên mặt phẳng z .

Điều này có nghĩa là một bộ lọc tương tự ổn định sẽ được chuyển đổi thành một bộ lọc số ổn định. Tuy nhiên, vị trí có thể có của các cực của bộ lọc số bị giới hạn trong các dải tần số khá nhỏ. Vì vậy, phép ánh xạ cũng bị giới hạn trong phạm vi thiết kế các bộ lọc hạ thông và các bộ lọc dải thông có tần số cộng hưởng tương đối nhỏ. Vì vậy, phép ánh xạ này chỉ có thể dùng để thiết kế các bộ lọc thông thấp và thông dải có tần số cộng hưởng khá nhỏ. Nó không có khả năng chuyển đổi từ bộ lọc thông cao tương tự thành bộ lọc thông cao số.

Ví dụ 7.1:

Thay thế đạo hàm bằng sai phân ngược để chuyển đổi một bộ lọc thông thấp tương tự có hàm truyền đạt thành $H_a(s) = 1/(s+1)$ bộ lọc số.

Giải:

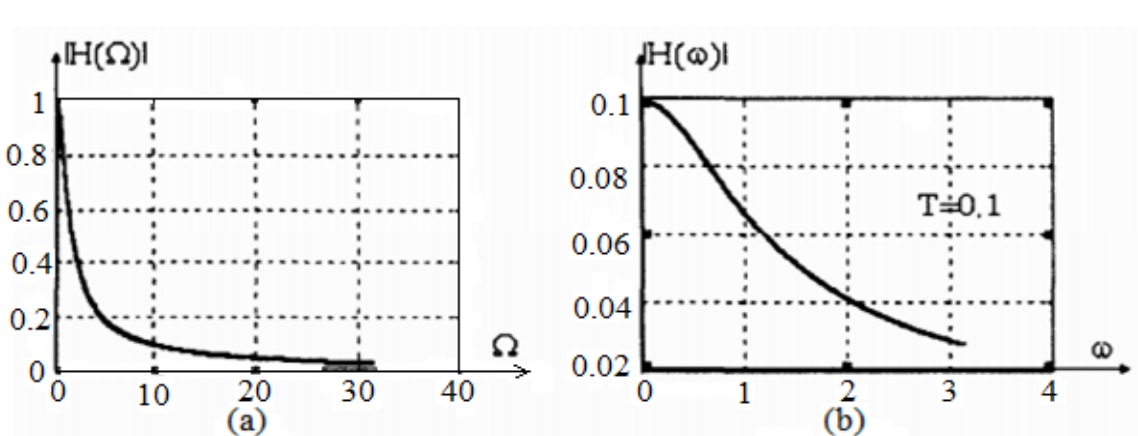
Áp dụng biểu thức ánh xạ từ miền s sang miền z :
$$s = \frac{1-z^{-1}}{T_s}$$

Ta có:
$$H_{(z)} = \frac{1}{\left[(1-z^{-1}/T_s)\right]+1} = \frac{zT_s/(1+T_s)}{z - [1/(1+T_s)]}$$

Bộ lọc số có một cực tại $z = 1/(1+T_s)$. Để đạt được tần số cộng hưởng thấp, ta phải chọn T_s đủ nhỏ để cho vị trí của cực nằm gần vòng tròn đơn vị. Chẳng hạn, ta có thể chọn $T_s = 0.1$, ta được:

$$H(z) = \frac{0.09z}{z - 0.909} = \frac{0.09}{1 - 0.909z^{-1}}$$

Do cực của $H(z)$ nằm ở tại điểm $z = 0.909$ nên đáp ứng tần số có một đỉnh tại (Hình 7.2).



Hình 7.2. Các đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự (a) và bộ lọc số (b) trong ví dụ 7.1

Ví dụ 7.2:

Chuyển bộ lọc thông dải tương tự có hàm truyền đạt là:

$$H_a(s) = 1/[(s+0.1)^2 + 9]$$

thành bộ lọc số IIR bằng cách thay thế đạo hàm bằng sai phân ngược.

Giải:

Thay $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ vào $H_a(s)$ ta được:

$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{(1-z^{-1})}{T_s} + 0.1\right)^2 + 9} = \frac{T_s^2/(1+0.2T+9.01T^2)}{1 - \frac{2(1+0.1T_s)}{1+0.2T_s+9.01T_s^2}z^{-1} + \frac{1}{1+0.2T_s+9.01T_s^2}z^{-2}}$$

$$P_{1,2} = 0.91 \pm j0.27 = 0.949e^{\pm j165^\circ}$$

Ta thấy hàm truyền đạt thỏa mãn điều kiện để đa thức mẫu số có nghiệm phức.

Vì vậy, nó có dạng của một bộ cộng hưởng nếu T_s được chọn đủ nhỏ (ví dụ $T_s \leq 0.1$), để các cực nằm gần vòng tròn đơn vị. Chẳng hạn, nếu $T_s = 0.1$ thì các cực sẽ đặt tại các điểm:

7.1.3 Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp bất biến xung.

Phương pháp này xuất phát từ cách biểu diễn một hệ thống bằng xung. Theo đó, một bộ số IIR có đáp ứng xung hấp thụ được bằng cách lấy mẫu đáp ứng xung $h_a(t)$ của bộ lọc tương tự. Ta có :

$$h(n) = h(nT_s), n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

trong đó T là chu kỳ lấy mẫu.

Chúng ta đã biết rằng khi một tín hiệu liên tục trong miền thời gian (tín hiệu tương tự $x_a(t)$) có phổ $X_a(F)$ được lấy mẫu với tốc độ $= 1/T$ (samples/second) thì phổ của tín hiệu lấy mẫu là sự lặp lại tuần hoàn của $X_a(F)$ với chu kỳ F_s . Cụ thể thì quan hệ đó là:

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (7.13)$$

trong đó $f = F/F_s$ là tần số chuẩn hoá.

Hiện tượng chồng phổ xuất hiện nếu tốc độ lấy mẫu F_s nhỏ hơn hai lần thành phần tần số lớn nhất có trong $X_a(F)$. Thể hiện dưới góc độ lấy mẫu đáp ứng xung của một bộ lọc tương tự có đáp ứng tần số $X_a(F)$ thì bộ lọc số với đáp ứng xung G sẽ có đáp ứng tần số là:

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a[(\omega - 2k\pi)F_s] \quad (7.14)$$

$$\text{Hay} \quad H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (7.15)$$

$$\text{Tương đương với:} \quad H(\Omega T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(\Omega - \frac{2k\pi}{T_s}) \quad (7.16)$$

Có thể thấy rõ là bộ lọc số với đáp ứng tần số sẽ có các đặc tính đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng nếu chu kỳ lấy mẫu được chọn đủ nhỏ để tránh hoàn toàn hoặc cực tiểu hóa hiện tượng chồng phổ. Ta cũng thấy rằng phương pháp bất biến xung là không thích hợp để thiết kế các bộ lọc thông cao, bởi vì hiện tượng chồng phổ sẽ xuất hiện từ quá trình lấy mẫu.

Để xem xét sự ánh xạ giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z được hàm chứa trong quá trình lấy mẫu, ta dựa vào sự tổng quát hóa phương trình (6.76) bằng cách liên kết biến đổi z của $h(n)$ với biến đổi Laplace của $h(n)$. Sự liên kết được thực hiện như sau:

$$H(z) \Big|_{z=t} T_s = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(s - j \frac{2k\pi}{T_s}) \quad (7.17)$$

$$\text{Trong đó :} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \quad (7.18)$$

Và
$$H(z) \Big|_{z=t} T_s = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) e^{-\Omega T_s} \quad (7.19)$$

Khi $s = j\Omega$, phương trình (6.81) được rút gọn thành phương trình (6.76) (thừa số j trong G được bỏ đi trong ký hiệu).

Tính chất tổng quát của phép ánh xạ:

$$z = e^{sT_s} \quad (7.20)$$

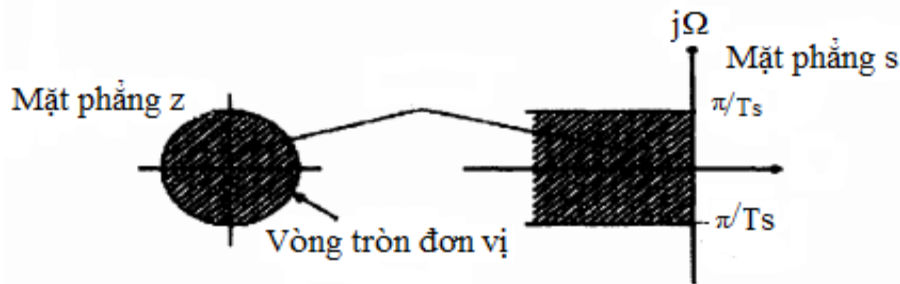
có thể có được bằng cách thay $s = \sigma + j\Omega$ và biểu diễn biến phức z dưới dạng cực

$Z = re^{j\omega} = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s}$. Rõ ràng, ta có :

$$r = e^{\sigma T_s} \quad \text{Và} \quad \omega = \Omega T_s \quad (7.21)$$

Kết quả là khi σ thì $0 < r < 1$, và khi $\sigma > 0$ thì $r > 1$, khi σ thì $r = 1$. Vì vậy, nửa trái của mặt phẳng s được ánh xạ vào trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z , và nửa phải của mặt phẳng s sẽ được ánh xạ thành các điểm nằm ngoài vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z . Đây là một trong số các đặc tính mong muốn của một phép ánh xạ tốt. Trục ảo cũng được ánh xạ thành vòng tròn đơn vị như đã chỉ ra ở trên. Tuy nhiên, đây không phải là phép ánh xạ một một. Vì π , nên phép ánh xạ hàm ý rằng $-\pi/T_s \leq \Omega \leq \pi/T_s$ ánh xạ vào các giá trị tương ứng trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Hơn nữa, khoảng tần số $\pi/T_s \leq \Omega \leq 3\pi/T_s$ trong khoảng $-\pi \leq \omega \leq \pi$ và điều này nói chung vẫn xảy ra đối với khoảng $(2k-1)\pi/T_s \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T_s$ với k là một số nguyên. Vì vậy phép ánh xạ từ biến tần số tương tự Ω sang biến tần số ω trong miền số là phép ánh xạ nhiều vào một, điều này thể hiện ảnh hưởng của hiện tượng chồng phổ do quá trình lấy mẫu.

Hình 7.3 minh họa phép ánh xạ từ mặt phẳng s sang mặt phẳng z .



Hình 7.3. Phép ánh xạ $z = e^{sT_s}$. Sẽ ánh xạ dãy có độ rộng $2\pi/T_s$ ($\sigma < 0$) trong mặt phẳng s thành các điểm trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z .

Để tìm hiểu sâu hơn nữa tác dụng của phương pháp bất biến xung lên các đặc tính của bộ lọc số IIR, ta hãy biểu diễn hàm hệ thống của bộ lọc tương tự dưới dạng tổng các phân thức. Với giả thiết là các cực của bộ lọc tương tự là khác nhau, ta có thể viết:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - P_k} \quad (7.22)$$

Trong đó các cực của bộ lọc tương tự và các hệ số trong khai triển phân thức. Kết quả là:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{p_k s}, t \geq 0 \quad (7.23)$$

Nếu ta lấy mẫu hàm một cách tuần hoàn tại các thời điểm ta sẽ được:

$$h(n) = h_a(nT_s) = \sum_{k=1}^N C_k e^{p_k T_s n} \quad (7.24)$$

Và hàm hệ thống của bộ lọc số IIR sẽ có dạng:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N C_k e^{p_k T_s n} \right) z^{-n} = \sum_{k=1}^N C_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T_s} z^{-1})^n \quad (7.25)$$

$$\forall p_k < 0, \quad \text{nên} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T_s} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}} \quad (7.26)$$

$$\text{Và} \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}} \quad (7.27)$$

Ta thấy bộ lọc số có các cực tại: $z_k = e^{p_k T_s}, k = 1, 2, \dots, N$.

Với hàm hệ thống như phương trình (7.27) bộ lọc số IIR dễ dàng được thực hiện bằng một dải ghép song song của các bộ lọc đơn cực. Nếu một số cực là các giá trị phức, chúng có thể được ghép thành từng cặp với nhau để tạo thành các bộ lọc thành phần có hai cực. Ngoài ra, hai thừa số chứa các cực có giá trị thực cũng có thể được kết hợp lại để tạo thành các bộ lọc thành phần có hai cực. Nên bộ lọc số IIR có thể được thực hiện bằng một dải song song của các bộ lọc thành phần có hai cực.

Mặc dù sự khai triển để đưa đến biểu thức $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{1 - e^{p_k T_s} z^{-1}}$ bộ lọc tương tự có các cực khác nhau, nhưng biểu thức trên cũng có thể tổng quát hóa đối với trường hợp các cực kép.

Ví dụ 7.3.

Chuyển một bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt thành bộ lọc số IIR bằng phương pháp bất biến xung.

Giải:

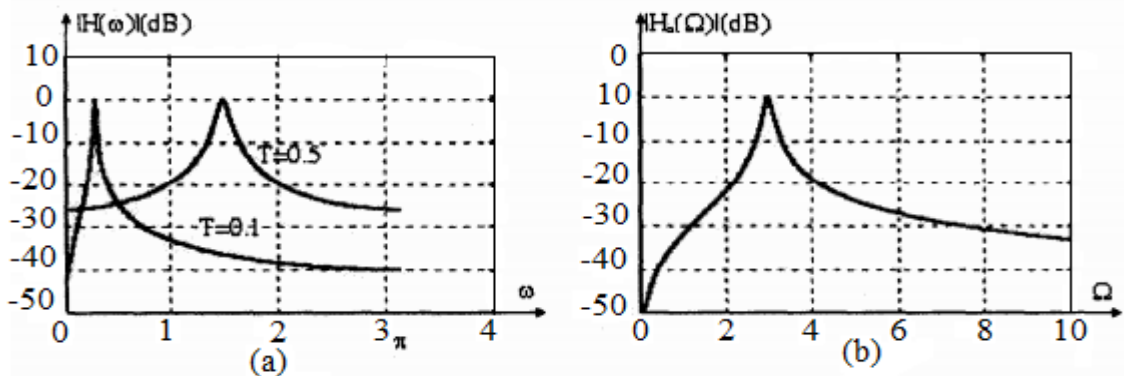
Ta thấy bộ lọc tương tự có một zero tại $s = -0.1$ và một cặp cực liên hợp phức tại $p_k = -0.1 \pm j3$. Ta không phải xác định đáp ứng xung hàm để thiết kế bộ lọc số bằng phương pháp bất biến xung, mà thay vào đó ta sẽ xác định trực tiếp $H(z)$ bởi phương trình (7.27) từ khai triển phân thức. Ta có:

$$H(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - j3} + \frac{1/2}{s + 0.1 + j3} \Rightarrow H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{0.1T_s} e^{j3T_s} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{0.1T_s} e^{-j3T_s} z^{-1}} \quad (7.28)$$

Do hai cực là liên hợp phức, nên ta có thể kết hợp chúng lại với nhau để tạo thành

một bộ lọc có hai cực đơn giản có hàm truyền đạt là:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc này được vẽ trong hình 7.4.a với hai trường hợp $T_s = 0.1$ và $T_s = 0.5$



Hình 7.4

(a) Đáp ứng biên độ của bộ lọc số

(b) Đáp ứng biên độ của bộ lọc số

Để có sự so sánh, ta vẽ thêm đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự trong hình 7.4.b. Từ đồ thị này, ta thấy sự ảnh hưởng hiện tượng chồng phổ (đáp ứng tần số bị biến đổi) khi T_s thay đổi thì tần số cộng hưởng cũng thay đổi theo. Ví dụ trên cũng cho thấy tầm quan trọng trong một giá trị T_s đủ nhỏ để giảm từ uốn của hiện tượng chồng phổ. Do ảnh hưởng của hiện tượng chồng phổ nên phương pháp bất biến chỉ thích hợp trong việc thiết kế các ứng thấp và thông dải.

7.2. Đặc tính của các bộ lọc tương tự thông dụng.

Như đã giới thiệu, vấn đề thiết kế bộ lọc tương tự đã phát triển từ lâu, vì vậy có nhiều sách viết về chủ đề này. Với mục đích cung cấp tài liệu tham khảo cho việc thiết kế bộ lọc số IIR, trong phần này ta sẽ trình bày tóm tắt các đặc tính quan trọng của vài loại bộ lọc thông dụng và các tham số tương ứng. Mặt khác, ta cũng chỉ thảo luận giới hạn ở bộ lọc thông thấp, bởi vì có các phương pháp chuyển bộ lọc thông thấp thành lọc thông dải, thông cao hoặc triệt dải.

7.2.1. Bộ lọc Butterworth

Bộ lọc Butterworth là bộ lọc toàn cực được đặc trưng bởi đáp ứng biên độ bình phương:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_C)^{2N}} \quad (7.29)$$

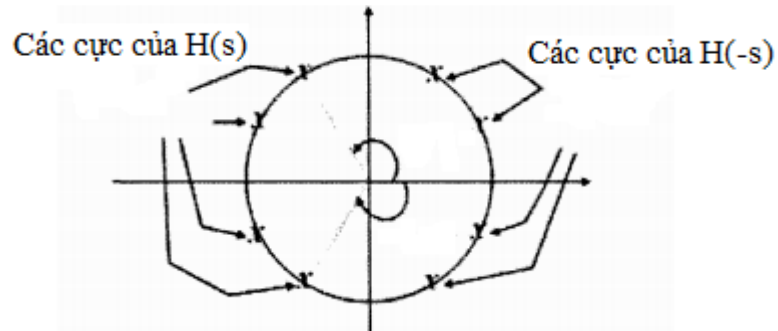
Trong đó N là bậc của bộ lọc và G là tần số cắt. Vì $H(s).H(-s)$ được tính tạo bằng với nên ta có thể viết:

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2/\Omega_C^2)^N} \quad (7.30)$$

Khoảng cách giữa các cực của $H(s).H(-s)$ xuất hiện trên vòng tròn đơn vị là bằng nhau. Ta thấy rằng :

$$\frac{-S^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N}, k=0,1,\dots,N-1. \text{ Vì thế:}$$

$$S_K = \Omega_c \cdot e^{jn/2} \cdot e^{j(2k+1)\pi/2N}, k=0,1,\dots,N-1 \quad (7.31)$$

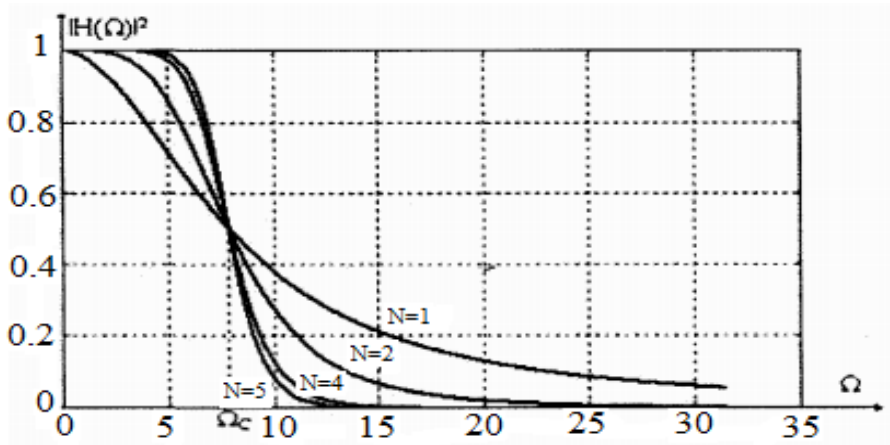


Hình 7.5. Các vị trí của các cực của bộ lọc Butterworth N=4.

Hình 7.5 minh họa vị trí của các cực của bộ lọc Butterworth với N=4. Đặc tuyến ứng tần số của bộ lọc này với vài giá trị khác nhau của N (N = 1, N=2, N=4, N=1) được vẽ trong hình 7.5. Ta thấy đơn điệu ở dải thông và cả dải chặn. Bậc cần thiết của bộ lọc để đáp ứng yêu cầu về độ suy giảm δ_2 tại một tần số cụ thể Ω_3 có thể xác định một cách dễ dàng từ phương trình (7.29). Tại $\Omega = \Omega_3$, ta có:

$$\delta_2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} \Leftrightarrow N = \frac{\log_{10}|1/\delta_2^2 - 1|}{2 \log_{10}(\Omega_s / \Omega_c)} \quad (7.32)$$

Như vậy, bộ lọc Butterworth hoàn toàn được đặc trưng bởi các thông số N, δ_2 và.



Hình 7.6. Đặc tuyến đáp ứng của bộ lọc Butterworth.

Ví dụ 7.4:

Xác định bậc và các cực của bộ lọc thông thấp Butterworth có tần số cộng hưởng 100 Hz và độ suy giảm 40 dB tại tần số 1000 Hz.

Giải:

Ta có: $\Omega_c = 1000\pi$, $\Omega_s = 2000\pi$

Với độ suy giảm 40 dB, ta có : $\delta_2 = 0.01$. Chọn N=7, và các cực là :

$$S_K = 1000\pi e^{j(n/2 + (2k+1)\pi/14)}, k=0,1,\dots,6.$$

7.2.2. Bộ lọc Chebyshev

Có hai loại bộ lọc Chebyshev. Loại 1 là các bộ lọc toàn cực có tính chất gợn sóng đơn điệu ở dải thông và tính gợn sóng đều ở dải chặn. Các zero của bộ lọc Chebyshev loại 2 nằm trên trục ảo trong mặt phẳng s.

Đặc tuyến đáp ứng biên độ bình phương của bộ lọc Chebyshev loại 1 được cho bởi biểu thức sau :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_C)} \quad (7.33)$$

Trong đó δ là thông số của bộ lọc, nó có quan hệ với độ gợn sóng trong dải thông (đa thức Chebyshev bậc N được định nghĩa như sau):

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (7.34)$$

Đa thức Chebyshev có thể được thành lập bằng phương trình đệ quy như sau :

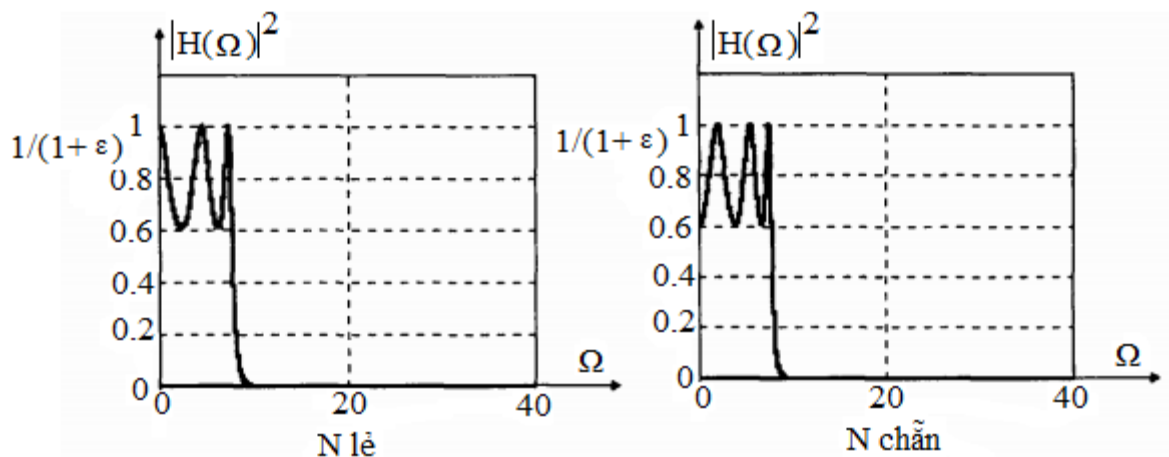
$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x), \quad N=1,2,\dots \quad (7.35)$$

Trong đó $T_0(x) = 0$ và $T_1(x) = 1$

* Các tính chất của đa thức Chebyshev:

1. $|T_N(x)| \leq 1$, với $|x| \leq 1$
2. $T_N(1) = 1$, với mọi N.
3. Tất cả các nghiệm của đa thức đều nằm trong khoảng.

Hình 7.7 minh họa sự ảnh hưởng của thông số lên độ gợn sóng dải thông tương ứng với hai trường hợp N chẵn và N lẻ.



Hình 7.7 Đặc tuyến tần số của bộ lọc Chebyshev loại 1, $\varepsilon = 0.8$

Khi N lẻ, $T_N(0) = 0 \Rightarrow |H(0)|^2 = 1$, khi N Chẵn $T_N(0) = 1, \Rightarrow |H(0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ số cạnh băng tần $\Omega = \Omega_C$, ta có :

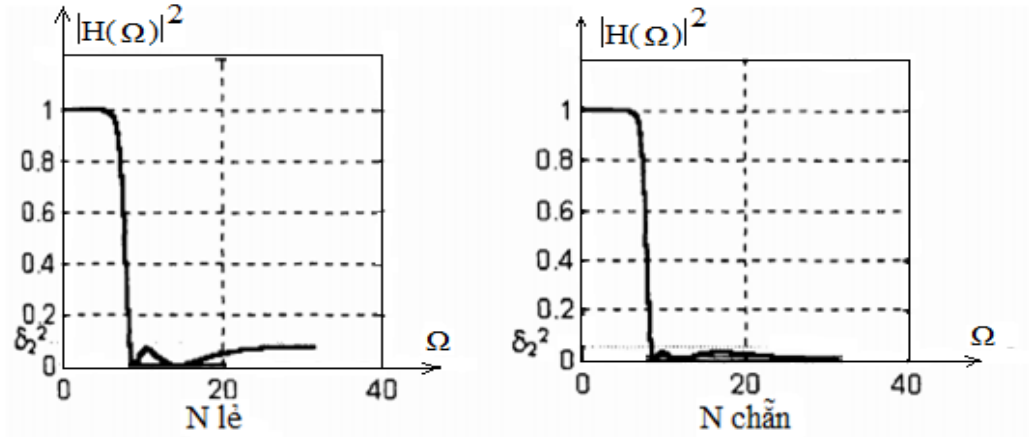
$$T_N(1)=1, \Rightarrow 1-\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Leftrightarrow e^2 = \frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1 \quad (7.36)$$

Trong đó, δ_1 là giá trị của độ gợn dải thông.

Bộ lọc Chebyshev loại 2 có cả zero lẫn cực. Đáp ứng biên độ bình phương là :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_S / \Omega_C) / T_N^2(\Omega_S / \Omega)]} \quad (7.37)$$

Trong đó là đa thức Chebyshev bậc N và G là tần số cạnh dải chặn được minh họa ở hình sau :



Hình 7.8 Đặc tuyến tần số của bộ lọc Chebyshev loại 1

Ta thấy các bộ lọc Chebyshev được đặc trưng bởi các thông số N, ε , N và tỉ số Ω , với một tập đặc tính kỹ thuật ε và Ω ta có thể xác định được bậc của bộ lọc từ biểu thức:

$$N = \frac{\log_{10} \left[(\sqrt{1-\delta_2^2} + \sqrt{1-\delta_2^2(1+\delta^2)}) / \varepsilon \delta_2 \right]}{\log_{10} \left[(\Omega_S / \Omega_C + \sqrt{(\Omega_S / \Omega_C)^2 - 1}) \right]} \quad (7.38)$$

Nói chung, với cùng các chỉ tiêu kỹ thuật, bộ lọc Chebyshev có ít cực hơn (bậc thấp hơn) bộ lọc Butterworth. Nếu ta so sánh bộ lọc Butterworth với bộ lọc Chebyshev có cùng số cực, cùng dải thông và dải chặn thì bộ lọc Chebyshev có dải quá độ hẹp hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Quách Tuấn Ngọc – Xử lý tín hiệu số - Nhà xuất bản Giáo Dục – 1995.
- [2] Nguyễn Quốc Trung – Xử lý tín hiệu và lọc số tập 1 – Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật – 1999.
- [3] Nguyễn Quốc Trung – Xử lý tín hiệu và lọc số tập 2 – Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật – 2001.
- [4] Doãn Hòa Minh, Xử lý tín hiệu số, Đại học Cần Thơ - 2000.
- [5] Alan V.Oppenheim, Ronald W. Schafer – Discrete – Time Signal Processing – Prentice – Hall, Inc. – 1989.
- [6] C. Sidney Burrus, James H. McClellan, Alan V.Oppenheim, Thomas W Parks, Ronald W. Schafer, Hans W. Schuessler – Computer-Based Exercises For Signal Processing Using Matlab - Prentice – Hall International, Inc. – 1994.
- [7] Emmanuel C. Ifeachor – Barrie W. Jervis – Digital Signal Processing A Practical Approach – Hall International - 2002.
- [8] William D. Stanley – Gay R. Dougherty – Ray Dougherty - Digital Signal Processing – Reston Publishing Company, Inc. – 1984.

MỤC LỤC

Lời nói đầu	1
Chương 1 Mở đầu.....	2
1.1 Một số khái niệm cơ bản	2
1.1.1 Tín hiệu – tín hiệu số	2
1.1.2 Các hệ thống xử lý tín hiệu.....	4
1.2 Hệ thống xử lý số tín hiệu tương tự.....	4
1.2.1 Biến đổi D/A	4
1.2.2 Biến đổi A/D.....	7
1.2.3 Lấy mẫu – Định lý lấy mẫu	8
1.2.4 Hiện tượng Aliasing	11
1.2.5 Lượng tử hóa	12
1.3 Tổng quan về DSP	12
1.3.1 Sự hình thành và phát triển của DSP	12
1.3.2 Sự khác nhau của 1 bộ DSP và 1 bộ xử lý chung.....	12
1.3.3 Các lĩnh vực ứng dụng của DSP.....	13
Chương 2 Biểu diễn và phân tích tín hiệu rời rạc và hệ thống rời rạc trong miền thời gian.....	14
2.1 Tín hiệu rời rạc – dãy	14
2.1.1 Cách biểu diễn tín hiệu rời rạc.....	14
2.1.2 Các dãy cơ bản	15
2.1.3 Các phép toán cơ bản của dãy	17
2.1.4 Tín hiệu công suất và tín hiệu năng lượng	20
2.2 Hệ thống thời gian rời rạc.....	22
2.2.1 Khái niệm	22
2.2.2 Đáp ứng xung của một hệ thống rời rạc	23
2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI	23
2.3.1 Khái niệm	23
2.3.2 Tích chập	23
2.3.3 Các hệ thống LTI đặc biệt	28
2.4 Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (LCCDE).....	32
2.4.1 Khái niệm	32
2.4.2 Nghiệm của LCCDE.....	34
2.4.3 Hệ thống rời rạc đệ quy và hệ thống rời rạc không đệ quy.....	36

2.4.4 Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối	40
2.5 Tương quan của các tín hiệu.....	42
2.5.1 Tương quan chéo (crosscorrelation).....	43
2.5.2 Tự tương quan (autocorrelation)	44
Bài tập chương 2.....	46
Chương 3 Biểu diễn và phân tích hệ thống rời rạc trong miền Z	48
3.1 Biến đổi Z (ZT)	48
3.1.1 Định nghĩa biến đổi Z hai phía và một phía	48
3.1.2 Sự tồn tại của biến đổi Z.....	52
3.1.3 Cực và không (Poles and zeros)	55
3.1.4 Tính chất của biến đổi Z	56
3.2 Biến đổi Z ngược	60
3.2.1 Định lý Cauchy.....	60
3.2.2 Biến đổi Z ngược	60
3.3 Phân tích hệ thống LTI trong miền Z	66
3.3.1 Hàm truyền đạt	66
3.3.2 Sự kết nối của các hệ thống LTI.....	67
3.4 Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng nhờ biến đổi Z	69
3.5 Hệ thống ổn định và nhân quả.....	70
3.5.1 Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến	70
3.5.2 Sự ổn định của hệ thống tuyến tính bất biến và nhân quả.....	71
Bài tập chương 3.....	72
Chương 4 Phân tích tín hiệu rời rạc ở miền tần số rời rạc.....	74
4.1 Phân tích tần số của tín hiệu rời rạc.....	74
4.1.1 Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu rời rạc tuần hoàn	74
4.1.2 Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn.....	79
4.2 Quan hệ giữa DFT và ZT	87
4.2.1 Khôi phục biến đổi Z từ DFT	87
4.2.2 Khôi phục biến đổi Fourier.....	89
Bài tập chương 4.....	90
Chương 5 Biểu diễn và phân tích hệ thống rời rạc trong miền tần số	92
5.1 Khái niệm	92
5.1.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI	92
5.1.2 Đáp ứng quá độ và đáp ứng xác lập với tín hiệu hình sin	99

5.1.3 Đáp ứng xác lập với tín hiệu vào tuần hoàn	100
5.2 Hệ thống LTI và mạch lọc số	100
5.2.1 Lọc chọn tần lý tưởng	100
5.2.2 Tính không khả thi của bộ lọc lý tưởng	103
5.2.3 Mạch lọc thực tế	104
5.3 Thiết kế hệ thống số bằng cách đặt các cực và zero trên mặt phẳng phức Z ...	105
5.3.1 Lọc thông thấp, thông cao và thông dải	106
5.3.2 Bộ cộng hưởng số (digital resonator)	110
Bài tập chương 5	112
Chương 6 Thiết kế bộ lọc FIR	113
6.1 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính dùng phương pháp cửa sổ	115
6.1.1 Nguyên tắc	115
6.1.2 Các bước chính của phương pháp cửa sổ	115
6.1.3 Cửa sổ chữ nhật	115
6.2 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính dùng phương pháp lấy mẫu trong miền tần số	122
6.2.1 Điều kiện đối xứng $h(n)=h(M-1-n)$	122
6.2.2 Điều kiện đối xứng $h(n)=-h(M-1-n)$	124
6.2.3 Xác định chọn đáp ứng xung	124
6.2.4 Công thức tính $h(n)$	129
6.3 Thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính dùng phương pháp có độ gọn không đổi bằng phương pháp lặp	135
6.4 So sánh các phương pháp thiết kế bộ lọc FIR	145
BÀI TẬP CHƯƠNG 6	147
Chương 7 Thiết kế bộ lọc số IIR	148
7.1 Thiết kế bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự	148
7.1.1 Nguyên tắc	148
7.1.2 Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp tương đương vi phân	148
7.1.3 Thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp bất biến xung	152
7.2 Đặc tính của các bộ lọc tương tự thông dụng	155
7.2.1 Bộ lọc Butterworth	155
7.2.2 Bộ lọc Chebyshev	157
Tài liệu tham khảo	159
Mục lục	160