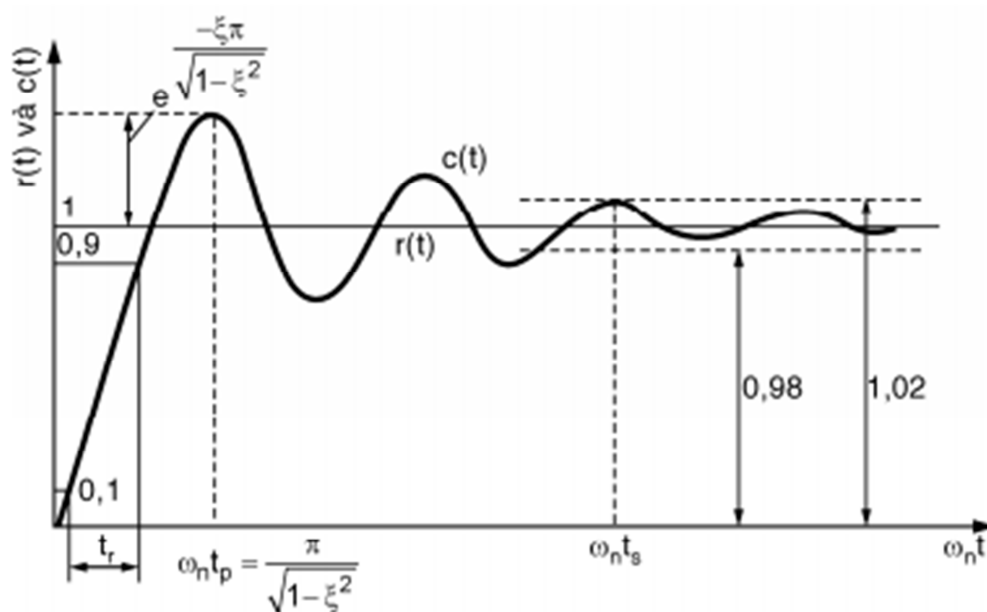


GIÁO TRÌNH KỸ THUẬT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Nguyễn Văn Dư

Nguyễn Văn Tám



Khoa Cơ Khí Chế Tạo Máy

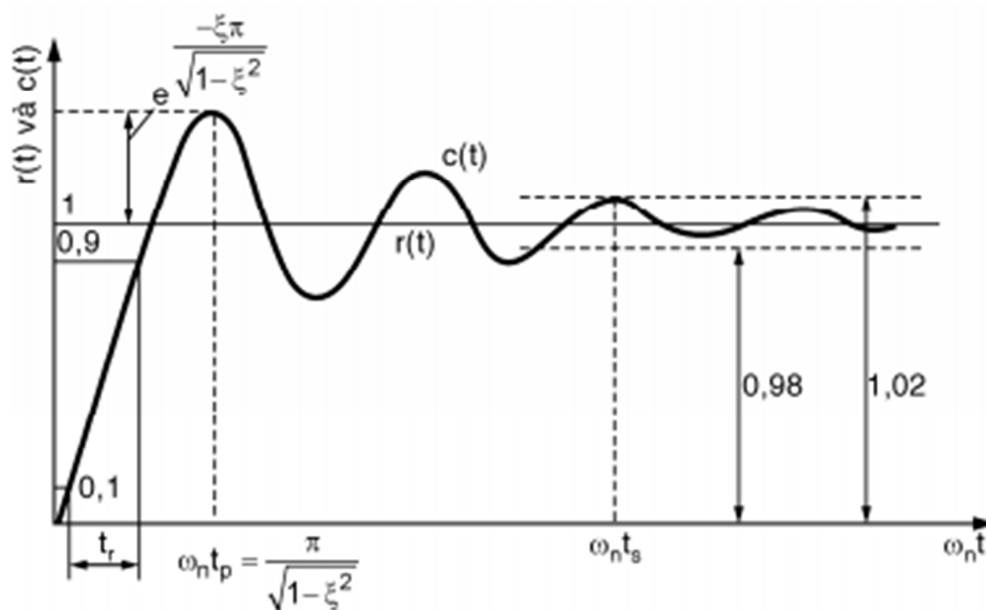
Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Vĩnh Long

Tháng 9 năm 2015

GIÁO TRÌNH KỸ THUẬT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Nguyễn Văn Dư

Nguyễn Văn Tám



In lần thứ I

MHP: CK1202

Khoa Cơ Khí Chế Tạo Máy

Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Vĩnh Long

Tháng 9 năm 2015

LỜI MỞ ĐẦU

Giáo trình này được biên soạn trên cơ sở đề cương môn học Kỹ Thuật Điều Khiển Tự Động dành cho sinh viên các ngành thuộc Khoa Cơ khí Chế tạo máy và sinh viên thuộc các chuyên ngành Tự Động Hóa. Nội dung giáo trình bao gồm các kiến thức cơ bản về lý thuyết điều khiển tự động hệ tuyến tính và được trình bày trong 7 chương:

Chương 1: Tổng Quan Về Điều Khiển Hệ Thống

Chương 2: Mô Hình Hóa Hệ Thống Điều Khiển

Chương 3: Phân Tích Đặc Tính Của Các Phần Tử Liên Tục

Chương 4: Khảo Sát Tính Ổn Định Của Hệ Thống

Chương 5: Phân Tích Hệ Thống Bằng Phương Pháp Sử Dụng Biểu Đồ Bode

Chương 6: Phân Tích Và Thiết Kế Hệ Thống Theo Phương Pháp QĐNS

Chương 7: Ảnh Hưởng Của Bộ Điều Khiển PID Lên Chất Lượng Hệ Thống

Ngày nay, các công cụ để điều khiển đều biến đổi nhanh chóng và hoàn thiện, nhưng những nguyên lý cơ bản vẫn không thay đổi hoặc thay đổi không đáng kể. Các vấn đề được đề cập trong sách hướng dẫn này dựa trên các giáo trình về Điều khiển tự động trong và ngoài nước nhưng được tóm tắt và cô đọng giúp học viên nắm được những vấn đề cơ bản nhất của môn học.

Do khả năng và kinh nghiệm biên soạn còn hạn chế nên tài liệu chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô, các bạn sinh viên và độc giả để tài liệu ngày càng được hoàn thiện hơn. Các ý kiến đóng góp xin gửi về: Khoa Cơ khí Chế tạo máy, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long - Số 73 Nguyễn Huệ, Tp Vĩnh Long.

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 1: Tổng Quan Về Điều Khiển Hệ Thống	1
1.1 Giới thiệu về hệ điều khiển.....	1
1.2 Hệ thống điều khiển	3
1.3 Phân biệt giữa hệ điều khiển vòng hở và vòng kín	5
1.4 Các nguyên tắc điều khiển	7
1.5 Các dạng bài toán căn bản	9
1.6 Câu hỏi ôn tập chương 1	10
Chương 2: Mô Hình Hóa Hệ Thống Điều Khiển.....	11
2.1 Giới thiệu	11
2.2 Phương trình vi phân	11
2.3 Mô hình hóa hệ thống cơ khí	12
2.4 Mô hình hóa hệ thống điện	12
2.5 Mô hình hóa hệ thống nhiệt	13
2.6 Phép biến đổi laplace	16
2.7. Ứng dụng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân.....	24
2.8. Hàm truyền	26
2.9 Đại số sơ đồ khối	33
2.10 Khái niệm trạng thái và biến trạng thái	38
2.11 Tuyến tính hóa	47
2.12 Bài Tập chương	48
Chương 3: Phân Tích Đặc Tính Của Các Phần Tử Liên Tục	50
3.1 Khái niệm về đặc tính động học	50
3.2 Đặt tính thời gian	50
3.3 Đặt tính tần số của các khâu động học điển hình	52
Chương 4: Khảo Sát Tính Ổn Định Của Hệ Thống.....	63
4.1 Khái niệm chung.....	63
4.2. Tiêu chuẩn ổn định đại số.....	65
4.3 Sử dụng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz để thiết kế sự ổn định	69

4.4 Tiêu chuẩn ổn định tần số	71
4.5 Bài tập.....	82

Chương 5: Phân Tích Hệ Thống

Bảng Phương Pháp Sử Dụng Biểu Đồ Bode	83
5.1 Phương pháp vẽ biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận	83
5.2 Các bước để vẽ biểu đồ Bode	83
5.3 Thiết kế bộ điều khiển dùng phương pháp đáp ứng tần số.....	87
5.4 Bài tập.....	95

Chương 6: Phân Tích Và Thiết Kế Hệ Thống

Theo Phương Pháp Quỹ Đạo Nghiệm Số	96
6.1 Giới thiệu	96
6.2 Vẽ Quỹ đạo nghiệm số đối với hệ thống có hồi tiếp âm đơn vị.....	96
6.3 Vẽ QĐNS đối với hệ hồi tiếp dương	103
6.4 Thiết kế bộ điều khiển dùng QĐNS	108
6.5. Phương pháp bù sớm pha	108
6.6 Phương pháp bù trễ pha.....	112
6.7 Phương pháp bù sớm trễ pha	115
6.8 Bài tập.....	119

Chương 7: Ảnh Hưởng Của Bộ Điều Khiển PID

Lên Chất Lượng Hệ Thống.....	120
7.1 Ảnh hưởng của bộ điều khiển PID lên chất lượng hệ thống	120
7.2 Chất lượng hệ thống	122
7.3 Phân tích đáp ứng quá độ	125
7.4 Hệ bậc hai	126
7.5 Hệ bậc cao	128
7.6 Các tiêu chuẩn tối ưu hoá đáp ứng quá độ	134
7.7 Sai số xác lập trong hệ điều khiển hồi tiếp đơn vị	136
7.8 Bài tập	137

TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	138
--------------------------------	------------

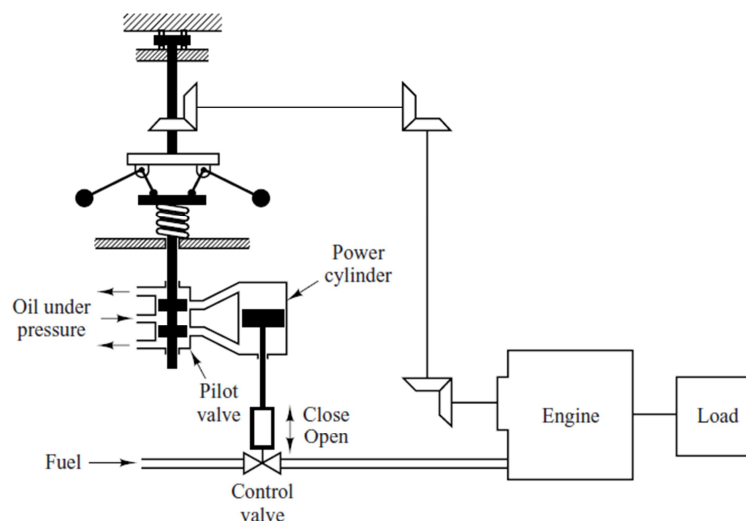
CHƯƠNG 1

TỔNG QUAN VỀ ĐIỀU KHIỂN HỆ THỐNG

1.1. Giới thiệu về hệ điều khiển

Lý thuyết điều khiển mà chúng ta sử dụng ngày hôm nay bao gồm lý thuyết điều khiển cổ điển, lý thuyết điều khiển hiện đại và lý thuyết điều khiển bền vững. Giáo trình sẽ phân tích và thiết kế hệ điều khiển dựa trên lý thuyết điều khiển cổ điển, hiện đại và trình bày ngắn gọn về lý thuyết điều khiển bền vững.

Vào thế kỷ 19, James Watt đã phát minh ra máy điều tốc ly tâm (hình 1.1) để điều tốc động cơ hơi nước. Và nó đã đặt nền móng cho điều khiển tự động. Các giai đoạn phát triển lý thuyết điều khiển tiếp tục được phát huy bởi Minorsky, Hazen và Nyquist. Năm 1922, Minorsky đã minh chứng tính ổn định của hệ thống lái của con tàu dựa trên phương trình vi phân của nó. Năm 1932, Nyquist đã xác định được tính ổn định của hệ vòng kín dựa trên đáp ứng vòng hở khi ngõ vào có dạng hình sin. Năm 1934, Hazen đã giới thiệu hệ chỉnh cơ để điều khiển vị trí khi tín hiệu ngõ vào thay đổi.



Hình 1.1 Hệ thống điều tốc ly tâm

Trong suốt thập niên 40, phương pháp đáp ứng tần số (đặc biệt là phương pháp vẽ biểu đồ Bode) được dùng để thiết kế hệ điều khiển vòng kín tuyến tính. Và phương pháp này thỏa mãn được yêu cầu về chất lượng của hệ thống. Vào những năm 1940 và 1950 bộ điều khiển PID được sử dụng để điều khiển hệ thống trong công nghiệp như điều khiển áp suất, điều khiển nhiệt độ,...Đầu những năm 1940, Ziegler và Nichol đã trình bày các luật tinh chỉnh bộ điều khiển PID. Luật này sau đó được gọi là luật tinh chỉnh Ziegler-Nichol. Từ cuối những năm 1940 đến những năm 1950, phương pháp

quỹ đạo nghiệm số được Evans phát triển khá đầy đủ.

Phương pháp đáp ứng tần số và quỹ đạo nghiệm số là vấn đề cốt lõi của lý thuyết điều khiển cổ điển. Phương pháp này thỏa mãn được các yêu cầu về chất lượng của hệ thống. Từ sau những năm 1950, điểm nổi bật của bài toán thiết kế điều khiển đã chuyển sang thiết kế hệ điều khiển tối ưu.

Các đối tượng hiện đại đa số rất phức tạp với nhiều ngõ vào và nhiều ngõ ra. Để mô tả được hệ thống điều khiển hiện đại cần có nhiều phương trình. Lý thuyết điều khiển cổ điển thường lý tưởng hóa hệ thống với một ngõ vào và một ngõ ra. Từ năm 1960, khi máy tính ra đời người ta đã sử dụng phương pháp biến trạng thái để phân tích và tổng hợp hệ thống trong miền thời gian. Với phương pháp này có thể đáp ứng được độ phức tạp, độ chính xác của các đối tượng hiện đại.

Trong suốt những năm từ 1960 đến 1980, các nhà khoa học đã nghiên cứu tỉ mỉ về điều khiển tối ưu. Điều khiển thích nghi và điều khiển dựa trên tính tự học đối với các hệ thống phức tạp. Từ những năm 1980 đến 1990, lý thuyết điều khiển hiện đại tập trung phát triển về điều khiển bền vững và các chủ đề có liên quan đến loại điều khiển.

Lý thuyết điều khiển hiện đại dựa trên việc phân tích các hệ phương trình vi phân trong miền thời gian. Do các phương trình Vi phân được phân tích từ mô hình thực của đối tượng cần điều khiển nên việc thiết kế hệ điều khiển trở nên đơn giản hơn. Tuy nhiên tính ổn định của hệ thống dễ bị ảnh hưởng bởi sai số giữa đối tượng thật và mô hình. Điều này có nghĩa là bộ điều khiển được thiết kế dựa trên mô hình. Sau đó bộ điều khiển này được áp dụng vào điều khiển đối tượng thật thì không ổn định. Để khắc phục tình trạng trên, trước hết phải thiết lập bộ điều khiển có một dãy sai số chấp nhận được. Do đó nếu sai số của hệ thống nằm trong dãy đã giả định thì bộ điều khiển được thiết kế sẽ ổn định hơn. Phương pháp thiết kế dựa vào nguyên lý trên được gọi là lý thuyết điều khiển bền vững. Nguyên lý này kết hợp cả về đáp ứng miền trong tần số và đáp ứng trong miền thời gian, tất nhiên việc tính toán rất phức tạp.

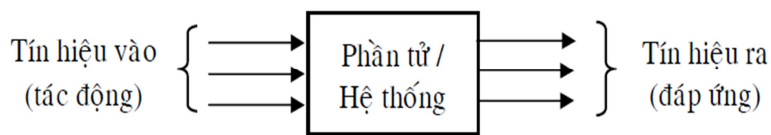
Trước khi đề cập đến hệ thống điều khiển, một số thuật ngữ cơ bản cần được định nghĩa trước như sau:

Điều khiển : Điều khiển một hệ thống là quá trình can thiệp vào hệ thống để đáp ứng của hệ đạt mục đích định trước. Quá trình điều khiển bao gồm các công đoạn: thu thập thông tin, xử lý thông tin và tác động lên hệ thống. Quá trình điều khiển không có sự tham gia trực tiếp của con người gọi là điều khiển tự động.

Ví dụ 1.1: Xét quá trình lái (điều khiển) một xe máy để xe luôn chạy với tốc độ ổn định 40 km/h. Để đạt được mục đích này trước hết mắt người lái xe phải quan sát đồng hồ tốc độ để biết tốc độ hiện tại của xe (thu thập thông tin). Tiếp theo, bộ não sẽ so sánh tốc độ hiện tại với tốc độ mong muốn và ra quyết định tăng ga nếu tốc độ nhỏ hơn 40 km/h và giảm ga nếu tốc độ lớn hơn 40km/h (xử lý thông tin). Cuối cùng tay người lái xe phải vặn tay ga để thực hiện việc tăng hay giảm ga (tác động vào hệ thống). Kết quả là tốc độ xe được hiệu chỉnh lại và giữ ổn định như mong muốn. Trong các hệ thống điều khiển tự động, quá trình điều khiển cũng diễn ra tương tự

nhưng các bộ phận: mắt, bộ não, tay của con người được thay thế bằng các thiết bị kỹ thuật có chức năng tương ứng.

Tín hiệu: Thông tin trong hệ thống điều khiển được thể hiện bằng các tín hiệu. Các tín hiệu có thể là dòng điện, điện áp, công suất, lực, áp suất, lưu lượng, nhiệt độ, vị trí, vận tốc, gia tốc,... Mỗi phần tử điều khiển nhận tín hiệu vào từ một số phần tử của hệ thống và tạo nên tín hiệu ra đưa vào phần tử khác. Hệ thống cũng giao tiếp với môi trường bên ngoài thông qua các tín hiệu vào, ra của nó. Thay vì tên gọi tín hiệu vào, tín hiệu ra người ta còn sử dụng khái niệm tác động và đáp ứng với nghĩa là: khi tác động vào hệ thống một tín hiệu vào thì hệ thống sẽ có đáp ứng là tín hiệu ra. Các tín hiệu được mô hình hoá toán học bằng các hàm của thời gian, ví dụ $u(t)$, $y(t)$,... Trong sơ đồ hệ thống, các tín hiệu vào, ra thường được biểu diễn bằng các mũi tên như trên hình 1.2.



Hình 1.2 Sơ đồ mô tả tín hiệu vào, ra

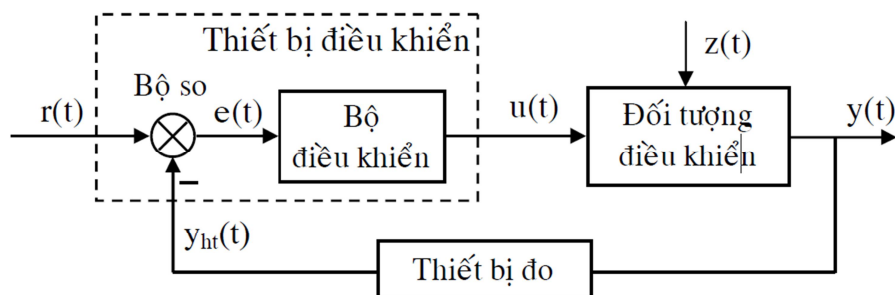
Bảng 1.1 dưới đây trình bày một số đối tượng thường gặp trong kỹ thuật và các tín hiệu vào, tín hiệu ra tương ứng.

Bảng 1.1

Đối tượng	Tín hiệu vào	Tín hiệu ra
Động cơ điện	Điện áp	Vận tốc, góc quay
Van	Vị trí nòng van	Lưu lượng
Xylanh lực	Lưu lượng, áp suất	Vận tốc, vị trí, lực piston
Lò nhiệt	Công suất cấp nhiệt	Nhiệt độ
Chiết áp	Vị trí con trượt	Điện áp

1.2 Hệ thống điều khiển

Hệ thống gồm ba thành phần cơ bản (hình 1.3) là đối tượng điều khiển, thiết bị đo và bộ điều khiển.



Hình 1.3 Trình bày cấu trúc cơ bản của một hệ thống điều khiển

Trong đó:

$r(t)$: tín hiệu vào, tín hiệu chuẩn (reference input), giá trị đặt trước.

$y(t)$: tín hiệu ra (output), đại lượng cần điều khiển, giá trị thực.

$y_{ht}(t)$: tín hiệu hồi tiếp

$e(t)$: tín hiệu sai lệch, sai số

$u(t)$: tín hiệu điều khiển

$z(t)$: tín hiệu nhiễu

Đối tượng điều khiển (ĐTĐK) : Là hệ thống vật lý cần điều khiển để có đáp ứng mong muốn (controlled system). ĐTĐK bao gồm đa dạng các loại máy, thiết bị kỹ thuật, quá trình công nghệ. ĐTĐK là máy, thiết bị thường được đặc trưng bằng các cơ cấu chấp hành như động cơ, xylanh, hệ bàn trượt với tín hiệu ra là chuyển động vật lý như vận tốc, vị trí, góc quay, gia tốc, lực. ĐTĐK là quá trình công nghệ thường có tín hiệu ra nhiệt độ, áp suất, lưu lượng,...

Thiết bị đo (cảm biến): Thực hiện chức năng đo và chuyển đổi đại lượng ra của hệ thống thành dạng tín hiệu phù hợp để thuận tiện so sánh, xử lý, hiển thị. Sự chuyển đổi là cần thiết khi các tín hiệu vào, ra không cùng bản chất vật lý: Tín hiệu vào có thể là vận tốc, vị trí, nhiệt độ, lực... trong khi tín hiệu ra đa phần là tín hiệu điện. Nguyên tắc chung để đo các đại lượng không điện bằng phương pháp điện là biến đổi chúng thành tín hiệu điện (điện áp hoặc dòng điện).

Các thiết bị đo điển hình là:

- Đo vận tốc: bộ phát tốc (DC tachometer, AC tachometer, optical tacho.)
- Đo lượng dịch chuyển (vị trí), góc quay : chiết áp thẳng, chiết áp xoay, thước mã hoá, bộ mã hóa góc quay (rotary encoder),...
- Đo nhiệt độ: cặp nhiệt ngẫu (thermo-couple), điện trở nhiệt (thermistor).
- Đo lưu lượng, áp suất : bộ chuyển đổi lưu lượng, áp suất.
- Đo lực: cảm biến lực (loadcell,...)

Bộ so: So sánh và phát hiện độ sai lệch e giữa tín hiệu vào chuẩn và tín hiệu hồi tiếp (hay giá trị đo được của tín hiệu ra).

Thông thường, các thiết bị đo thực hiện chuyển đổi tỉ lệ nên :

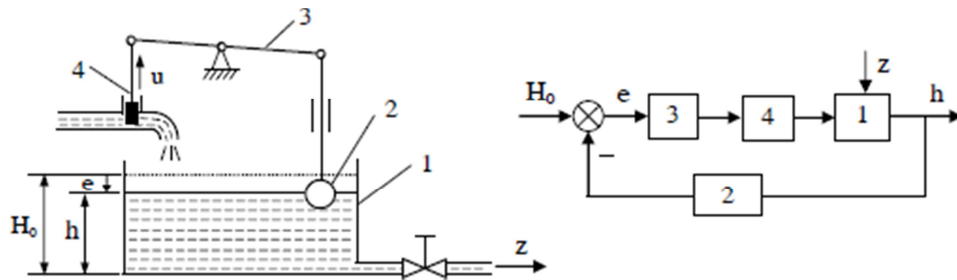
$$y_{ht} = Ky \quad (\text{với } K \text{ là hệ số chuyển đổi.})$$

$$\text{Nếu: } K=1 \quad \text{thì: } e = r - y_{ht} = r - y$$

Bộ điều khiển: Dùng tín hiệu sai lệch e để tạo tín hiệu điều khiển u . Thuật toán để xác định $u(t)$ gọi là thuật toán điều khiển hay luật điều khiển. Bộ điều khiển liên tục có thể thực hiện bằng cơ cấu cơ khí, thiết bị khí nén, mạch điện RLC, mạch khuếch đại thuật toán. Bộ điều khiển số thực chất là các chương trình phần mềm chạy trên vi xử lý hay máy tính. Trên sơ đồ, bộ điều khiển và bộ so được biểu diễn tách riêng nhưng thực tế bộ so thường chỉ là một thành phần của bộ điều khiển (thiết bị điều khiển).

Nhiều: Các tác động lên hệ thống gây nên các ảnh hưởng không mong muốn được gọi chung là nhiễu. Nhiễu luôn tồn tại và có thể tác động vào bất cứ phần tử nào trong hệ thống, nhưng thường được quan tâm nhiều nhất là các nhiễu tác động lên đối tượng điều khiển, loại này gọi là nhiễu đầu ra hay nhiễu phụ tải. Trên đây chúng ta chỉ mới đề cập đến các thành phần cơ bản của hệ thống điều khiển. Trong thực tế, cấu trúc hoàn chỉnh của một hệ thống điều khiển thường là đa dạng và phức tạp hơn. Ví dụ, trong hệ còn có cơ cấu thiết đặt tín hiệu vào chuẩn, các cơ cấu có vai trò trung gian giữa bộ điều khiển và đối tượng như van điều khiển, bộ khuếch đại công suất, các cơ cấu đóng ngắt, chuyển mạch, các mạch cách ly, động cơ, các bộ truyền động. Trong hệ thống điều khiển số còn có các bộ chuyển đổi A/D, D/A, card giao tiếp,...

Ví dụ 1.2 : Xét hệ thống điều khiển mức nước trên hình 1.4.



Hình 1.4 Hệ thống điều khiển mức nước đơn giản

Trong hệ thống điều khiển tự động này, đối tượng điều khiển là bồn nước (1).

Mục tiêu điều khiển là giữ mức nước trong bồn luôn ổn định và bằng trị số H_0 đặt trước cho dù lượng nước tiêu thụ thay đổi như thế nào.

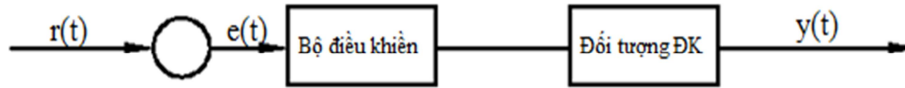
- Tín hiệu ra $y = h$: Mức nước thực tế.
- Tín hiệu vào $r = H_0$: Mức nước yêu cầu.
- Nhiễu z : sự thay đổi lượng nước tiêu thụ.
- Thiết bị đo là phao (2); Bộ điều khiển là hệ thống đôn bẫy (3) có chức năng khuếch đại sai lệch và điều khiển đóng mở van; cơ cấu tác động là van (4).
- Tín hiệu điều khiển u : Độ nâng của van (4).
- Tín hiệu sai lệch: $e = r - y = H_0 - h$

Mức nước yêu cầu có thể thay đổi bằng cách điều chỉnh độ dài đoạn nối từ phao đến đôn bẫy.

1.3 Phân biệt giữa hệ điều khiển vòng hở và vòng kín

Hệ điều khiển vòng hở (open-loop system): Điều khiển vòng hở là điều khiển không quan sát ngõ ra. Nói cách khác, điều khiển vòng hở không đo ngõ ra cũng không hồi tiếp từ tín hiệu ngõ ra để so sánh với tín hiệu ngõ vào. Sơ đồ điều khiển vòng hở được mô tả như hình 1.5. Dựa trên tín hiệu tham khảo $r(t)$, bộ điều khiển xuất tín hiệu $u(t)$ để điều khiển đối tượng với đáp ứng $y(t)$ mà không cần quan tâm đến đối tượng có chấp hành tín hiệu điều khiển hay không. Đối với hệ điều khiển vòng hở

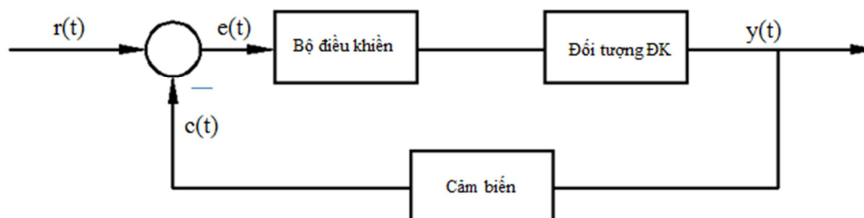
thường được dùng để điều khiển các đối tượng với đáp ứng không cần độ chính xác cao. Trong đời sống thực tế có rất nhiều loại hệ thống điều khiển vòng hở như điều khiển máy giặt, điều khiển máy nước nóng, điều khiển lò nung.... Các hoạt động của máy giặt bao gồm: ngâm, giặt và xả. Các hoạt động này dựa trên thời gian chờ định trước. Máy giặt không đo tín hiệu ngõ ra như độ sạch của quần áo chẳng hạn.



Hình 1.5 Hệ điều khiển vòng hở

Do hệ điều khiển vòng hở không so sánh với tín hiệu ngõ vào mong muốn nên tín hiệu ngõ vào sẽ tương ứng với một điều kiện hoạt động cố định. Chính vì thế độ chính xác của hệ thống sẽ phụ thuộc vào sự cân chỉnh ban đầu. Nếu có nhiều can thiệp thì hệ điều khiển vòng hở sẽ không hoạt động theo đúng tác vụ mong muốn. Nói chung các hệ thống hoạt động dựa trên thời gian chờ đều là hệ điều khiển vòng hở.

Hệ điều khiển vòng kín hay hệ điều khiển hồi tiếp (*Closed-loop control system*): Một hệ thống duy trì mối quan hệ giữa ngõ vào mong muốn và ngõ ra bằng cách so sánh chúng và sử dụng sự sai biệt này như một phương tiện để điều khiển thì được gọi là hệ điều khiển vòng kín. Nói cách khác, điều khiển vòng kín là điều khiển có quan sát ngõ ra. Hình 1.6 trình bày sơ đồ của hệ điều khiển vòng kín. Dựa trên sự sai biệt giữa tín hiệu tham khảo $r(t)$ và tín hiệu hồi tiếp từ $y(t)$, bộ điều khiển sẽ xuất tín hiệu điều khiển $u(t)$ để điều khiển đối tượng sao cho $y(t)$ gần giống với $r(t)$. Hệ điều khiển vòng kín được dùng để điều khiển các đối tượng với đáp ứng cần độ chính xác cao. Hệ thống điều khiển nhiệt độ là một ví dụ minh chứng cho hệ điều khiển vòng kín. Nhiệt độ trong lò nung được đo bằng cảm biến nhiệt và so sánh với nhiệt độ mong muốn (tín hiệu ngõ vào lập trình được), nếu có sự sai khác thì bộ điều khiển sẽ gửi tín hiệu đến bộ nung để điều chỉnh nhiệt độ gần với nhiệt độ mong muốn. Do tín hiệu ngõ ra được quan sát liên tục và hồi tiếp để so sánh với tín hiệu tham khảo nên nhiều ngoài can thiệp vào hệ thống có thể bị loại bỏ nhờ bộ điều khiển. Chính điều này làm cho hệ điều khiển vòng kín có độ tin cậy cao.



Hình 1.6 Hệ điều khiển vòng kín

Thuận lợi của hệ điều khiển vòng kín so với hệ vòng hở là có hồi tiếp nên đáp ứng của hệ thống ít nhạy với nhiễu ngoài cũng như sự thay đổi các tham số bên trong hệ thống. Nếu xét về tính ổn định của hệ thống thì hệ điều khiển vòng hở dễ thiết kế

hơn bởi vì hệ này không xem tính ổn định của hệ thống là vấn đề then chốt trong khi hệ điều khiển vòng kín thì đòi hỏi phải có. Hệ điều khiển vòng kín hướng tới sửa lỗi và có thể làm cho biên độ của tín hiệu điều khiển thay đổi.

Chú ý rằng nếu hệ thống có các ngõ vào được biết trước và không có nhiễu can thiệp vào hệ thống thì nên sử dụng hệ điều khiển vòng hở. Hệ điều khiển vòng kín với thuận lợi là có thể áp dụng cho hệ thống có ngõ vào là nhiễu không biết trước và hoặc các tham số của hệ thống bị thay đổi. Do có nhiều thành phần được sử dụng trong hệ điều khiển vòng kín nên chi phí để thiết kế cho hệ này sẽ đắt hơn so với hệ vòng hở tương ứng. Thông thường người ta kết hợp giữa điều khiển vòng hở và điều khiển vòng kín để giảm chi phí nhưng vẫn thỏa mãn được chỉ tiêu chất lượng của hệ thống.

Phần lớn các phân tích và thiết kế hệ điều khiển trong giáo trình này thì dựa trên hệ điều khiển vòng kín. Một số hệ điều khiển vòng hở được sử dụng trong những điều kiện xác định như không có nhiễu và khó đo ngõ ra.

Những thuận lợi chính của hệ điều khiển vòng hở:

- Cấu trúc đơn giản và dễ bảo trì.
- Thiết kế rẻ tiền hơn so với hệ điều khiển vòng kín tương ứng.
- Không quan tâm đến tính ổn định của hệ thống.
- Đối với các hệ thống khó đo ngõ ra hoặc không cần đo ngõ ra chính xác.

Những bất lợi chính của hệ điều khiển vòng hở:

- Nhiễu và những thay đổi so với tính toán có thể xảy ra lỗi làm cho ngõ ra có thể không giống với tín hiệu tham khảo.
- Để duy trì chất lượng mong muốn đối với ngõ ra thì phải cân chỉnh lại mỗi khi sử dụng.
- Những thuận lợi chính của hệ điều khiển vòng kín
- Nhiễu và các tham số của hệ thống có thể thay đổi nhưng đáp ứng của hệ thống vẫn đảm bảo giống với tín hiệu tham khảo.
- Do có hồi tiếp nên bộ điều khiển sửa sai liên tục nên không cần cân chỉnh nhiều.
- Hệ thống có độ tin cậy cao.

Những bất lợi chính của hệ điều khiển vòng kín:

- Cấu trúc phức tạp và khó bảo trì.
- Thiết kế đắt tiền hơn so với hệ điều khiển vòng hở tương ứng.
- Cần phải đo chính xác ngõ ra.
- Phụ thuộc vào tín hiệu hồi tiếp. Nếu cảm biến phản hồi sai tín hiệu hồi tiếp thì bộ điều khiển sẽ đưa ra quyết định sai; và đương nhiên hệ thống sẽ không ổn định.

1.4 Các nguyên tắc điều khiển

Nguyên tắc điều khiển thể hiện đặc điểm lượng thông tin và phương thức hình thành tác động điều khiển trong hệ thống. Có ba nguyên tắc điều khiển cơ bản: Nguyên tắc giữ ổn định, nguyên tắc điều khiển theo chương trình và nguyên tắc điều

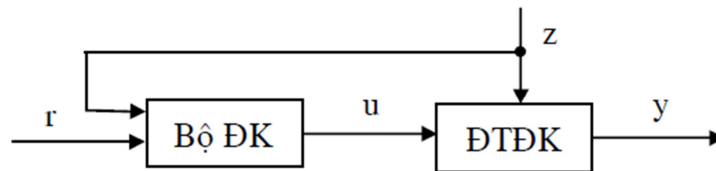
khuyến thích nghi. Khi thiết kế hệ thống ta dựa vào mục tiêu điều khiển, yêu cầu chất lượng và giá thành để chọn nguyên tắc điều khiển phù hợp nhất.

1.4.1 Nguyên tắc giữ ổn định: Nguyên tắc này nhằm giữ tín hiệu ra ổn định và bằng giá trị hằng số định trước. Có ba nguyên tắc điều khiển giữ ổn định:

✓ **Điều khiển bù nhiễu**

Được dùng khi các tác động bên ngoài lên ĐTĐK có thể kiểm tra và đo lường được, còn đặc tính của ĐTĐK đã được xác định đầy đủ. Bộ điều khiển sử dụng giá trị đo được của nhiễu để tính toán tín hiệu điều khiển $u(t)$.

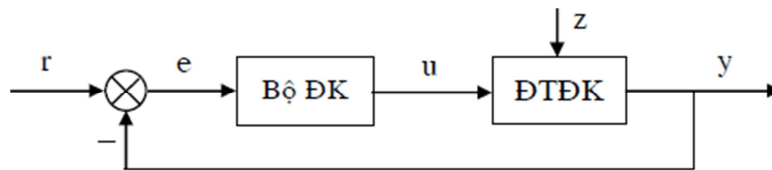
Nguyên tắc điều khiển này có ý nghĩa phòng ngừa, ngăn chặn trước. Hệ thống (hình 1.7) có khả năng bù trừ sai số trước khi nhiễu thực sự gây ảnh hưởng đến tín hiệu ra. Tuy nhiên, vì trong thực tế không thể dự đoán và kiểm tra hết mọi loại nhiễu nên với các hệ phức tạp thì điều khiển bù nhiễu không thể cho chất lượng cao.



Hình 1.7 Sơ đồ điều khiển bù nhiễu

✓ **Điều khiển san bằng sai lệch**

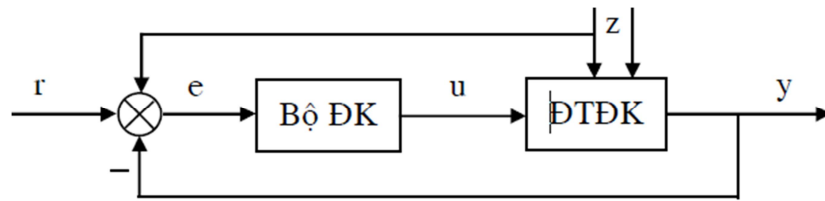
Nguyên tắc này được dùng khi các tác động bên ngoài không kiểm tra và đo lường được, còn đặc tính của ĐTĐK thì chưa được xác định đầy đủ. Tín hiệu ra $y(t)$ được đo và phản hồi về so sánh với tín hiệu vào $r(t)$. Bộ điều khiển (hình 1.8) sử dụng độ sai lệch vào-ra để tính toán tín hiệu điều khiển $u(t)$, điều chỉnh lại tín hiệu ra theo hướng làm triệt tiêu sai lệch. Nguyên tắc điều khiển này có tính linh hoạt, thử nghiệm và sửa sai. Hệ thống có thể điều chỉnh để làm triệt tiêu ảnh hưởng của các nhiễu không biết trước và/hoặc không đo được. Nhược điểm của nó là tác động hiệu chỉnh chỉ hình thành sau khi độ sai lệch đã tồn tại và được phát hiện, tức là sau khi tín hiệu ra đã thực sự bị ảnh hưởng. Tín hiệu ra ở xác lập không giữ được ổn định một cách tuyệt đối mà thường có dao động nhỏ quanh giá trị xác lập.



Hình 1.8 Sơ đồ điều khiển san bằng sai lệch

✓ **Điều khiển phối hợp**

Để nâng cao chất lượng điều khiển, có thể kết hợp nguyên tắc bù nhiễu và nguyên tắc san bằng sai lệch gọi là điều khiển phối hợp (hình 1.9). Mạch bù nhiễu sẽ tác động nhanh để bù trừ sai số tạo ra bởi các nhiễu đo được, còn mạch điều khiển phản hồi sẽ hiệu chỉnh tiếp các sai số tạo ra bởi các nhiễu không đo được.



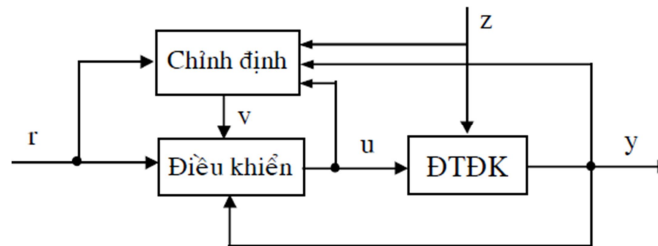
Hình 1.9 Sơ đồ điều khiển phối hợp

1.4.2 Nguyên tắc điều khiển theo chương trình

Nguyên tắc này giữ cho tín hiệu ra thay đổi đúng theo một hàm thời gian (chương trình) định trước.

1.4.3 Nguyên tắc điều khiển thích nghi (tự chỉnh định)

Khi cần điều khiển các đối tượng phức tạp, có thông số dễ bị thay đổi do ảnh hưởng của môi trường, hoặc nhiều đối tượng đồng thời mà phải đảm bảo cho một tín hiệu có giá trị cực trị, hay một chỉ tiêu tối ưu nào đó... thì các bộ điều khiển với thông số cố định không thể đáp ứng được, khi đó ta phải dùng nguyên tắc thích nghi. Sơ đồ hệ thống thích nghi như hình 1.10. Tín hiệu $v(t)$ chỉnh định lại thông số của bộ điều khiển sao cho hệ thích ứng với mọi biến động của môi trường.



Hình 1.10 Sơ đồ hệ thống điều khiển thích nghi

1.5 Các dạng bài toán căn bản

Có ba dạng bài toán cơ bản trong lý thuyết điều khiển: phân tích hệ thống, thiết kế hệ thống và nhận dạng hệ thống.

- **Phân tích hệ thống:** đối với dạng bài toán này thường yêu cầu tìm đáp ứng ngõ ra và đánh giá chất lượng của hệ thống dựa trên thông số và cấu trúc của đối tượng đã biết.
- **Thiết kế hệ thống:** đối với dạng bài toán này thường yêu cầu thiết kế bộ điều khiển thỏa mãn yêu cầu về chất lượng dựa trên cấu trúc và thông số của đối tượng đã biết.
- **Nhận dạng hệ thống:** đối với bài toán dạng này hoàn toàn chưa biết trước cấu trúc và thông số của đối tượng. Do đó bài toán sẽ yêu cầu tìm cấu trúc và thông số của đối tượng.

Bài toán phân tích hệ thống và thiết kế hệ thống luôn luôn thực hiện được trong khi bài toán nhận dạng hệ thống không phải lúc nào cũng thực hiện được.

Trong lý thuyết điều khiển tự động, người ta thường phân ra làm nhiều loại hệ thống khác nhau như:

- Hệ thống liên tục (được mô tả bằng phương trình vi phân).
- Hệ thống rời rạc (được mô tả bằng phương trình sai phân).
- Hệ thống tuyến tính (được mô tả dưới dạng phương trình vi phân/sai phân tuyến tính).
- Hệ thống phi tuyến (được mô tả dưới dạng phương trình vi phân/sai phân phi tuyến).
- Hệ thống bất biến theo thời gian (các hệ số của phương trình vi phân/ sai phân không thay đổi theo thời gian) .
- Hệ thống thay đổi theo thời gian (các hệ số của phương trình vi phân/sai phân thay đổi theo thời gian)

1.6 Câu hỏi ôn tập chương 1

1. Hệ thống điều khiển tự động có thể phân loại như thế nào?
2. Hệ thống điều khiển có mấy phần tử cơ bản?
3. Hãy nêu các quy tắc điều khiển cơ bản để điều khiển một hệ thống điều khiển?
4. Nêu các bước thiết lập một hệ thống điều khiển?

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH HÓA HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

2.1 Giới thiệu

Nội dung chương này nhằm giải quyết hai vấn đề:

- Xác định mô hình toán học cho các phần tử.
- Xác lập mối liên kết giữa các mô hình toán học riêng thành một mô hình toán học chung cho toàn bộ hệ thống.

Hệ thống điều khiển trong thực tế rất đa dạng. Các phần tử của hệ thống có thể là cơ, điện, nhiệt, thủy lực, khí nén,... Để nghiên cứu các hệ thống có bản chất vật lý khác nhau chúng ta cần dựa trên một cơ sở chung là toán học. Khi nghiên cứu hệ thống trước hết chúng ta cần biết hệ thống gồm những thiết bị gì, có những phần tử nào và tìm cách mô tả chúng bằng các mô hình toán học. Mô hình cần phải đảm bảo độ chính xác nhất định, phản ánh được các đặc trưng của hệ thống thực, nhưng đồng thời phải đơn giản cho việc biểu diễn, phân tích. Trong nhiều trường hợp, để có một mô hình toán tương đối đơn giản, chúng ta phải xem xét bỏ qua một vài thuộc tính vật lý ít quan trọng trong hệ thống và lý tưởng hoá một số hiện tượng vật lý thực tế. Để mô tả phần tử và hệ thống tuyến tính bất biến liên tục người ta thường dùng các dạng mô hình toán học sau đây :

- Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng.
- Hàm truyền
- Phương trình trạng thái.

Hai dạng mô hình phương trình vi phân và hàm truyền thích hợp với hệ SISO. Mô hình phương trình trạng thái đặc biệt thích hợp với hệ MIMO.

2.2 Phương trình vi phân

Tổng quát, mối quan hệ giữa tín hiệu vào $r(t)$ và tín hiệu ra $y(t)$ của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có thể mô tả bằng phương trình vi phân :

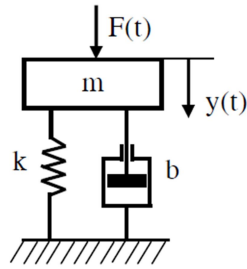
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t)$$

Số mũ n là bậc của hệ thống. Hệ thống có $m < n$ được gọi là hệ thống hợp thức. Chỉ có các hệ thống hợp thức mới tồn tại trong thực tế. Mô hình phương trình vi phân được xây dựng theo phương pháp lý thuyết, tức là được thiết lập dựa trên các định luật vật lý biểu diễn các quá trình động học xảy ra bên trong và các quan hệ giao tiếp với môi trường bên ngoài của hệ thống. Các định luật cơ bản chi phối các phần tử cơ khí là định luật II Newton, quan hệ giữa lực và biến dạng, quan hệ giữa mô men và vận tốc.

Các định luật cơ bản chi phối các phần tử điện là định luật Kirchhoff, quan hệ dòng điện- điện áp trên điện trở, điện cảm, tụ điện.

Các định luật cơ bản chi phối các phần tử nhiệt là định luật truyền nhiệt và định luật bảo toàn năng lượng.

2.3 Mô hình hóa hệ thống cơ khí (hình 2.1)



Hình 2.1 Hệ thống cơ khí mbk

Giả sử tại $t=0$ hệ đang ở trạng thái cân bằng. Áp dụng định luật Newton ta có:

$$\sum F_i = ma$$

$$F - ky - bv = ma$$

$$F - ky - b \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

Phương trình vi phân mô tả mối quan hệ giữa tín hiệu vào (F) và tín hiệu ra (y) là:

$$F(t) = m \frac{d^2y}{dt^2} + ky(t) + b \frac{dy}{dt}$$

Trong đó :

- Tín hiệu vào : lực $F(t)$ tác dụng từ bên ngoài, [N]
- Tín hiệu ra : lượng di động $y(t)$ của khối lượng m , [m]
- m : khối lượng thiết bị đề lên bộ giảm chấn, [kg]
- b : hệ số ma sát nhớt (hệ số giảm chấn), [N.s/m]
- k : độ cứng lò xo, [N/m]

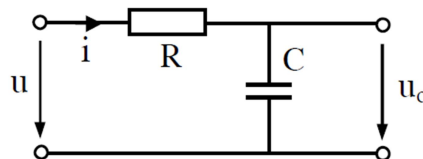
➤ $m \frac{d^2y}{dt^2}$: Lực quán tính;

➤ $b \frac{dy}{dt}$: Lực giảm chấn;

➤ ky : Lực đàn hồi lò xo;

2.4 Mô hình hóa hệ thống điện

Xác định phương trình vi phân của mạch điện RC nối tiếp như hình 2.2



Hình 2.2 Hệ thống điện RC

- Tín hiệu vào : điện áp ngõ vào u , [Volt]
- Tín hiệu ra : điện áp ra u_c giữa hai bản tụ điện, [Volt]

Theo định luật Kirchoff, ta có:

$$u = u_R + u_c = Ri + u_c$$

$$\text{mà } c(t) = \frac{dq(t)}{du} \Rightarrow du(t) = \frac{dq(t)}{c} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{c} \int dq(t) \quad (2.1)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow dq(t) = idt \quad (2.2)$$

Từ (2.1) và (2.2) ta được:

$$u(t) = \frac{1}{c} \int idt \Rightarrow i(t) = c \frac{du(t)}{dt};$$

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân mô tả quan hệ tín hiệu vào - ra:

$$u(t) = RC \frac{du_c}{dt} + u_c(t)$$

2.5 Mô hình hóa hệ thống nhiệt

Hệ thống nhiệt liên quan đến truyền nhiệt từ một chất sang một chất khác. Có thể được phân tích bằng trở kháng và dung kháng thông qua nhiệt dung và nhiệt trở.

Có ba cách khác nhau để truyền nhiệt từ một chất sang một chất khác: dẫn nhiệt trực tiếp, đối lưu và bức xạ. Trong phần này chỉ xét dẫn nhiệt trực tiếp và đối lưu (bức xạ nhiệt chỉ đáng kể khi nhiệt độ của phần phát là rất cao so với phần thu. Hầu hết các quá trình nhiệt trong các hệ thống điều khiển quá trình không liên quan đến truyền nhiệt bức xạ).

Công thức dẫn nhiệt trực tiếp hoặc đối lưu:

$$q = K \Delta \theta$$

Trong đó:

Q = lưu lượng nhiệt, kcal/s

$\Delta \theta$ = chênh lệch nhiệt độ, °C

K = hệ số, kcal/s °C

Hệ số K được tính như sau:

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \text{ với dẫn nhiệt trực tiếp}$$

$$= HA \text{ với đối lưu}$$

Với k = hệ số dẫn nhiệt, kcal/m.s.°C

A = diện tích trung bình khi dòng nhiệt dẫn qua, m²

ΔX = độ dày của dây dẫn, m

H = hệ số đối lưu, kcal/m².°C

❖ Nhiệt trở và nhiệt dung

Nhiệt trở R truyền nhiệt giữa hai chất có thể được định nghĩa như sau:

$$R = \frac{\text{sự chênh lệch nhiệt độ, } ^\circ\text{C}}{\text{sự thay đổi tốc độ dòng nhiệt, kcal/s}}$$

Nhiệt trở đối với dẫn truyền nhiệt trực tiếp hoặc truyền nhiệt đối lưu định nghĩa:

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Khi hệ số dẫn nhiệt đối lưu là hằng số thì nhiệt trở hoặc là cho truyền dẫn trực tiếp hoặc đối lưu là hằng số, nhiệt dung được xác định:

$$C = \frac{\text{sự thay đổi nhiệt lưu trữ, kcal}}{\text{sự thay đổi nhiệt độ, } ^\circ\text{C}}$$

Hay

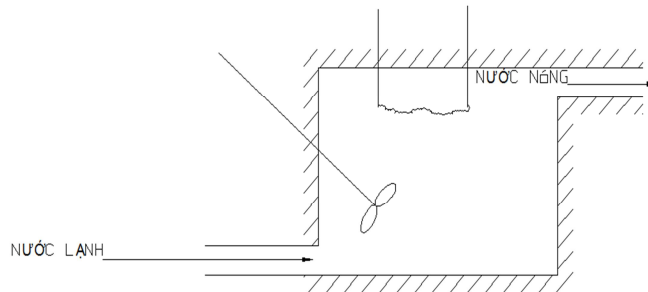
$$C = m.c$$

Trong đó m = khối lượng của chất, kg

c = nhiệt dung riêng của chất, kcal/kg $^\circ\text{C}$

✓ Hệ thống nhiệt

Xem xét các hệ thống thể hiện trong hình 2.3. Giả sử rằng bồn sẽ bị cách ly để tránh sự mất nhiệt vì không khí xung quanh. Và giả sử rằng không có lưu trữ nhiệt trong bể cách ly và trong bể chất lỏng. Do đó, một nhiệt độ duy nhất được sử dụng để mô tả nhiệt độ của chất lỏng trong bể và lượng chất lỏng chảy ra.



Hình 2.3 Hệ thống bồn nước nóng

$\bar{\theta}_i$ = nhiệt độ xác lập của chất lỏng chảy vào, $^\circ\text{C}$

$\bar{\theta}_0$ = nhiệt độ xác lập của chất lỏng chảy ra, $^\circ\text{C}$

G = tốc độ dòng chảy xác lập, kg/s

M = khối lượng của chất lỏng trong bể, kg

c = nhiệt dung riêng của chất lỏng, kcal/kg $^\circ\text{C}$

R = nhiệt trở, $^\circ\text{C s/kcal}$

C = nhiệt dung, kcal/ $^\circ\text{C}$

$\bar{H}$ = tốc độ nhiệt độ ngổ vào xác lập, kcal/s

Giả sử rằng nhiệt độ của chất lỏng chảy vào được giữ ổn định và tốc độ nhiệt ngổ vào (nhiệt được cung cấp bởi gia nhiệt) là đột ngột thay đổi từ $\bar{H}$ đến $\bar{H} + h_i$. Trong đó h_i thể hiện cho sự thay đổi nhỏ đối với tốc độ nhiệt ngổ vào. Tốc độ nhiệt ra thay đổi từ $\bar{H}$ đến $\bar{H} + h_0$. Nhiệt độ của chất lỏng chảy ra cũng sẽ được thay đổi từ $\bar{\Theta}_0$ đến $\bar{\Theta}_0 + \theta$. Đối với trường hợp này h_0 , C và R được tính như sau:

$$h_0 = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R \frac{\theta}{h_0} = \frac{1}{Gc}$$

Phương trình cân bằng nhiệt của hệ thống này là

$$Cd\theta = (h_i - h_0)dt$$

Hay

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_0$$

Có thể viết lại

$$RC \frac{d\theta}{dt} - \theta = Rh_i$$

Lưu ý rằng thời hằng của hệ thống bằng RC hoặc M/G giây. Hàm truyền có θ và h_i , được viết như sau:

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

Trong đó, $\Theta(s)$ và $H_i(s)$ lần lượt là biến đổi Laplace của $\theta(t)$ và $h_i(t)$.

Trong thực tế, nhiệt độ của chất lỏng chảy vào có thể dao động và được xem là nhiễu. (Nếu hằng số nhiệt độ dòng chảy ra không đổi là mong muốn, một bộ điều khiển tự động có thể được lắp đặt để điều chỉnh tốc độ dòng nhiệt để bù trừ cho các dao động về nhiệt độ của chất lỏng chảy vào). Nếu nhiệt độ của chất lỏng chảy vào đột ngột thay đổi từ $\bar{\Theta}_i$ đến $\bar{\Theta}_i + \theta_i$ trong khi tỷ lệ nhiệt đầu vào H và tốc độ dòng chảy chất lỏng G được giữ không đổi thì tốc độ dòng nhiệt chảy ra sẽ thay đổi từ $\bar{H}$ tới $\bar{H} + h_0$ và nhiệt độ chất lỏng chảy ra thay đổi từ $\bar{\Theta}_0$ tới $\bar{\Theta}_0 + \theta$. Phương trình cân bằng nhiệt cho trường hợp này là

$$Cd\theta = (Gc\theta_i - h_0)dt$$

Hay

$$C \frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_0$$

Có thể được viết lại

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

Nếu hệ thống nhiệt này thay đổi về nhiệt độ của chất lỏng chảy vào và tốc độ ngõ vào làm nóng đầu vào trong khi tốc độ dòng chảy ra được giữ ổn định, sự thay đổi nhiệt θ ở ngõ ra có thể được viết bởi phương trình sau:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

2.6 Phép biến đổi laplace

Để xác định hàm tín hiệu ra của hệ thống khi biết hàm tín hiệu vào, ta cần phải giải phương trình vi phân mô tả hệ thống. Phép biến đổi Laplace giúp ta giải phương trình vi phân một cách đơn giản, thuận lợi hơn so với cách giải thông thường.

Biến đổi laplace thực chất là chuyển hệ thống từ miền thời gian $f(t)$ sang miền tần số $F(s)$

2.6.1 Định nghĩa:

Cho hàm thời gian $f(t)$ xác định với $t \geq 0$, biến đổi Laplace của $f(t)$ là:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Trong đó:

L - là ký hiệu phép biến đổi Laplace.

$F(s)$ - gọi là ảnh Laplace hay biến đổi Laplace của hàm $f(t)$.

s - là biến phức, gọi là biến Laplace.

Điều kiện để $f(t)$ có biến đổi Laplace là tích phân ở công thức định nghĩa (2-2) hội tụ.

Quá trình toán học ngược lại -Tìm hàm gốc $f(t)$ từ hàm ảnh $F(s)$ - được gọi là phép biến đổi Laplace ngược và ký hiệu là L^{-1} . Cho hàm phức $F(s)$, biến đổi Laplace ngược của $F(s)$ là:

$$f(t) = L^{-1}[f(s)] = \frac{1}{2\pi} \oint_C F(s)e^{ts} ds \quad (t \geq 0)$$

với C là đường cong kín được lựa chọn trong miền s ; j là số ảo đơn vị.

2.6.2 Tính chất

a. Tính đơn ánh

Biến đổi Laplace là phép biến đổi một-một, tức là ứng với mỗi hàm $f(t)$ cho trước chỉ có duy nhất một ảnh $F(s)$ và ngược lại.

b. Tính tuyến tính

Nếu $F(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ là ảnh Laplace của $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ và k là hằng số thì :

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \text{ và } L[kf(t)] = kF(s)$$

$$L^{-1}[F_1(s) \pm F_2(s)] = f_1(t) \pm f_2(t) \text{ và } L^{-1}[kF(s)] = kf(t)$$

Tính chất này xuất phát từ tính tuyến tính của phép tích phân trong công thức định nghĩa biến đổi Laplace và Laplace ngược.

c. Ảnh của đạo hàm

Lấy tích phân từng phần $\int u dv = uv - \int v du$

với $u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}$

$$dv = df(t) \Rightarrow v = f(t)$$

ta có:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Mà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0 \Rightarrow [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} = -f(0)$$

Trong đó: $f(0)$ là giá trị của hàm $f(t)$ tại thời điểm $t=0$

Từ kết quả trên ta thấy rằng:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

Nếu các điều kiện đầu bằng 0, ta có công thức đơn giản:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$$

d. Ảnh của tích phân

Tương tự cách tìm ảnh của đạo hàm, ta có

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

e. Định lý giá trị cuối

Nếu $f(t)$ có ảnh Laplace là $F(s)$ và nếu $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ hữu hạn thì:

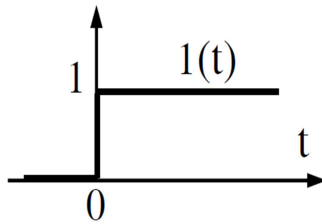
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Định lý giá trị cuối giúp ta xác định giá trị ổn định (xác lập) của hàm $f(t)$ mà không cần phải biến đổi ngược hàm $F(s)$. Tuy nhiên cần lưu ý là nếu hàm $f(t)$ không tồn tại trạng thái ổn định, ví dụ trường hợp $f(t)$ là hàm $\sin \omega t$ hay $e^{at} \sin \omega t$ với $a > 0$ thì định lý giá trị cuối không áp dụng được.

2.6.3 Biến đổi laplace của các hàm cơ bản

Trong mục này chúng ta tìm biến đổi Laplace của các hàm cơ bản thường dùng trong phân tích hệ thống điều khiển. Ta giả thiết là chỉ xét các hàm $f(t)$ trong miền $t > 0$ và coi $f(t)=0$ khi $t < 0$. Điều này phù hợp với thực tế vì thông thường chúng ta chỉ nghiên cứu hoạt động của hệ thống điều khiển sau một thời điểm đã được lựa chọn bất kỳ và đặt là $t=0$. Tín hiệu ra của hệ thống ở mọi thời điểm $t > 0$ hoàn toàn có thể xác định nếu biết các điều kiện ban đầu và hàm tác động (tín hiệu vào) ở thời điểm $t=0$.

a. Hàm nấc



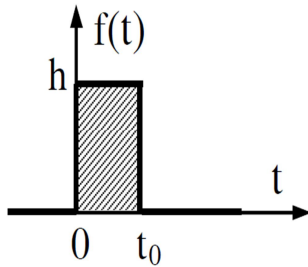
Hình 2.4 hàm nấc

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= \left| -\frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} [e^{-\infty} - e^0] \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

b. Hàm xung đơn vị

xét hàm xung chữ nhật $f(t)$:



Hình 2.5 Hàm xung

$$f(t) = h[u(t) - u(t - t_0)] = \begin{cases} h, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t < 0 \text{ và } t > t_0 \end{cases}$$

Nếu lấy diện tích ht_0 bằng 1 đơn vị, thì $h = 1/t_0$. Khi $t_0 \rightarrow 0$ thì chiều cao $h \rightarrow \infty$ nhưng diện tích vẫn bằng 1. Trường hợp đặc biệt này của hàm xung được gọi là hàm xung đơn vị, hay hàm xung Dirac, ký hiệu là $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases}$$

Hàm $\delta(t)$ có tính chất $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

✓ Ảnh Laplace:

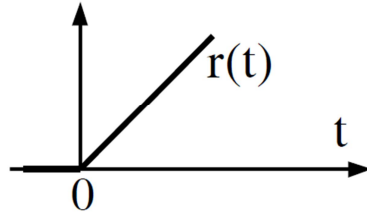
$$F(s) = L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{0+} \delta(t) e^{-s \cdot 0} dt = \int_0^{0+} \delta(t) dt = 1$$

Hàm xung Dirac có độ rộng bằng 0 và độ lớn vô cùng nên chỉ là hàm toán học thuần túy, trong thực tế chỉ tồn tại các tín hiệu gần đúng với xung Dirac. Hàm xung

Dirac thường được dùng để mô tả các nhiễu tác động trong khoảng thời gian rất ngắn (tức thời). Ngoài ra, khái niệm xung Dirac cũng rất hữu ích để mô tả quá trình rời rạc hoá một tín hiệu liên tục bất kỳ như chúng ta sẽ đề cập đến sau này.

c. Hàm dốc

$$f(t) = r(t)$$



Hình 2.6 Hàm dốc

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} t d(e^{-st}) \\ &= -\frac{1}{s} [te^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} [te^{-st}]_0^{\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (te^{-st}) = \infty \cdot 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{st}} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{st}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy

$$F(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

Vì

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \text{ nên } F(s) = \frac{1}{s^2}$$

d. Hàm mũ $f(t) = e^{-at}$

$$\begin{aligned} F(s) &= L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+at)} dt \\ &= -\frac{1}{s+a} \int_0^{\infty} d(e^{-(s+at)}) \\ &= -\frac{1}{s+a} [e^{-(s+at)}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

2.6.4 Biến đổi Laplace của một số hàm thông dụng

$x(t)$	$X(s)$	$X(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1	$\frac{t^{n-1} e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t) e^{-\alpha t}$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\cos(\omega t) e^{-\alpha t}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$		
$\frac{1}{ab} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$		

2.6.5 Phép biến đổi Laplace ngược

Bài toán đặt ra là tìm hàm thời gian $y(t)$ khi biết ảnh Laplace $Y(s)$.

Thông thường, ảnh Laplace $Y(s)$ có dạng hàm hữu tỉ :

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Biến đổi ngược $L^{-1}[Y(s)]$ có thể tính bằng công thức định nghĩa nhưng cách này phức tạp. Có một cách tiện dụng hơn, đó là phân tích $Y(s)$ thành tổng các phân thức đơn giản rồi áp dụng các công thức biến đổi cơ bản cho từng thành phần của tổng.

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n L^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n y_i(t)$$

Dạng hàm $y(t)$ phụ thuộc vào nghiệm của mẫu số $Q(s)$. Các nghiệm này có thể là nghiệm đơn (nghiệm thực riêng biệt), nghiệm bội, hoặc nghiệm phức. Dưới đây chúng ta sẽ lần lượt khảo sát các trường hợp cụ thể.

a) Mẫu số của $Y(s)$ chỉ có các nghiệm đơn

Giả sử $Q(s)$ có n nghiệm đơn là $s_1, s_2, \dots, s_n$.

Khi đó có thể phân tích :

$$Q(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_i}{s-s_i} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

trong đó A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các hệ số hằng.

Nhân cả hai vế của phương trình với $(s-s_i)$, ta được:

$$(s-s_i) Y(s) = \frac{A_1(s-s_i)}{s-s_1} + \frac{A_2(s-s_i)}{s-s_2} + \dots + A_i + \dots + \frac{A_n(s-s_i)}{s-s_n}$$

Nếu lấy giới hạn khi $s \rightarrow s_i$ thì tất cả các thành phần có chứa $(s-s_i)$ ở vế phải đều bằng 0, từ đó ta xác định được:

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} [(s-s_i)Y(s)] = [(s-s_i)Y(s)]|_{s=s_i}$$

Tra bảng ta có:

$$L^{-1} \left[\frac{A_i}{s-s_i} \right] = A_i e^{s_i t}$$

Vậy:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t}$$

Ví dụ 2.1: Tìm biến đổi Laplace ngược của $Y(s) = \frac{2s+1}{2s^2+6s+4}$

Giải

Mẫu số của $Y(s)$ có $a_n = 2$ và nghiệm $s = -1$; $s = -2$ nên có thể phân tích:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{2s^2+6s+4} = \frac{2s+1}{2(s^2+3s+2)} = \frac{2s+1}{2(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

Xác định các hệ số

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2s+1}{2(s+2)} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2s+1}{2(s+1)} \right] = \frac{3}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}$$

Biến đổi [L] ngược ta được:

$$Y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-2t}$$

b. Mẫu là nghiệm bội

Nếu $Q(s)$ có $(n-r)$ nghiệm đơn và một nghiệm bội s_k lặp r lần, ta phân tích

$$Q(s) = a_n (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_{n-r})(s-s_k)^r$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \dots + \frac{A_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{B_r}{(s-s_k)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s-s_k)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(s-s_k)}$$

Các hệ số A_i ($i=1, 2, \dots, n-r$) xác định như trường hợp nghiệm đơn đã biết.

Các hệ số B_i ($i=r, \dots, 2, 1$) được xác định bằng cách nhân cả hai vế của phương trình trên với $(s-s_k)^r$, sau đó lấy đạo hàm bậc $(r-i)$ của cả hai vế rồi lấy giới hạn khi $s \rightarrow s_k$. Ta có kết quả cuối cùng như sau:

Nhận xét

Nếu s_k là nghiệm kép, cần xác định hai hệ số B_2, B_1

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow s_k} [(s - s_k)^2 Y(s)]; B_1 = \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{d}{ds} (s - s_k)^2 Y(s) \right]$$

Nếu s_k là nghiệm bội ba, cần xác định ba hệ số B_3, B_2, B_1

$$B_3 = \lim_{s \rightarrow s_k} [(s - s_k)^3 Y(s)]; B_2 = \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{d}{ds} (s - s_k)^3 Y(s) \right];$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s - s_k)^3 Y(s) \right]$$

Biến đổi Laplace ngược hàm ảnh $Y(s)$ ta được:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-r} A_i e^{s_i t} = A_1 e^{s_1 t} + B_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{s_k t} + \dots + B_2 t e^{s_k t} + B_1 e^{s_k t}$$

Ví dụ 2.2: Cho ảnh $[L]$, $Y(s) = \frac{2}{s(s+3)(s+1)^2}$, hãy xác định hàm $y(t)$

Giải

Mẫu số của $Y(s)$ có hai nghiệm đơn $s_1 = 0$; $s_2 = -3$ và một nghiệm kép $s_k = -1$

Do đó có thể phân tích:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+3)} + \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{(s+1)}$$

Xác định hệ số:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{2}{(s+3)(s+1)^2} \right] = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -3} \left[\frac{2}{s(s+1)^2} \right] = -\frac{1}{6}$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2}{s(s+3)} \right] = -1$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{d}{ds} (s-1)^2 Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s(s+3)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{-2(2s+3)}{s^2(s+3)^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{3s} - \frac{1}{6(s+3)} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2(s+1)}$$

Biến đổi Laplace ngược ta được:

$$y(t) = L^{-1} [Y(s)] = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} e^{-3t} - t e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t}$$

c. Mẫu số của Y(s) có nghiệm phức

Nghiệm phức luôn có từng cặp liên hợp, ta ký hiệu là $p_{1,2} = a \pm j\omega$. Giữa chúng có mối quan hệ : $(s-p_1)(s-p_2) = (s-a-j\omega)(s-a+j\omega) = (s-a)^2 + \omega^2$. Trường hợp nghiệm phức cũng có thể phân tích tương tự như trường hợp nghiệm đơn nhưng để thuận tiện hơn, ta thường dùng cách nêu dưới đây.

Nếu Q(s) có (n-2) nghiệm đơn và 2 nghiệm phức $p_{1,2}$ thì có thể phân tích :

$$\begin{aligned} Q(s) &= a_n (s - s_1) \dots (s - s_{n-2})(s - p_1)(s - p_2) \\ &= a_n (s - s_1) \dots (s - s_{n-2})[(s-a)^2 + \omega^2] \\ Y(s) &= \frac{A_1}{s-s_1} + \dots + \frac{A_{n-2}}{s-s_{n-2}} + \frac{C_1(s-a) + C_2\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Các hệ số A_i , C_1 và C_2 có thể xác định bằng phương pháp đồng nhất hệ số đa thức, hoặc áp dụng công thức sau :

$$A_i = \lim_{s \rightarrow s_i} [(s - s_i)Y(s)]$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \{ [(s - p_1)(s - p_2)Y(s)]|_{s=p_1} \}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \{ [(s - p_1)(s - p_2)Y(s)]|_{s=p_1} \}$$

Trong đó:

Im: phần ảo; Re: phần thực

Biến đổi Laplace ngược hàm ảnh Y(s) ta được:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-2} A_i e^{s_i t} + C_1 e^{at} \cos \omega t + C_2 e^{at} \sin \omega t$$

Ví dụ 2.3: xác định hàm y(t) khi biết ảnh Laplace $Y(s) = \frac{5(s+1)}{s(s^2+2s+5)}$

Giải

Mẫu số của Y(s) có một nghiệm đơn $s = 0$ và hai nghiệm phức $p_{1,2} = -1 \pm 2j$

Do đó có thể phân tích:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{C_1(s-1) + 2C_2}{s^2 + 2s + 5}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 5} \right] = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \{ [(s - p_1)(s - p_2)Y(s)]|_{s=p_1} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{5(s+1)}{s} \right\}_{s=-1+2j} = -1$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \{ [(s - p_1)(s - p_2)Y(s)]|_{s=p_1} \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{5(s+1)}{s} \right\}_{s=-1+2j} = 2$$

Cũng có thể dùng phương pháp đồng nhất hệ số đa thức:

$$Y(s) = \frac{5(s+1)}{s^2+2s+5} = \frac{A}{s} + \frac{C_1(s-1)+2C_2}{s^2+2s+5} = \frac{(A+C_1)s^2 + (2A+C_1+2C_2)s+5A}{s(s^2+2s+5)}$$

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ A + C_1 = 0 \\ 2A + C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-(s+1)+2(2)}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2(2)}{(s+1)^2+2^2}$$

Biến đổi Laplace ngược ta thu được:

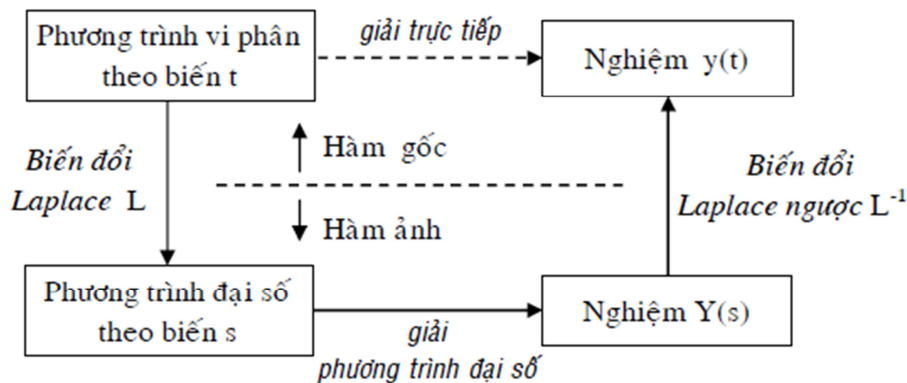
$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-t}\cos 2t + 2 e^{-t}\sin 2t \\ &= 1 + e^{-t} \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2t - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2t \right) \\ &= 1 + \sqrt{5} e^{-t} \sin (2t - \varphi) \end{aligned}$$

2.7. Ứng dụng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

Xét hệ thống tuyến tính liên tục bất biến có tín hiệu vào $r(t)$, tín hiệu ra $y(t)$, được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t)$$

Bài toán đặt ra là tìm nghiệm $y(t)$ khi biết trước tín hiệu vào $r(t)$ và các điều kiện ban đầu của hệ thống. Với phương pháp cổ điển thì việc tìm nghiệm toàn phần yêu cầu phải xác định hằng số tích phân từ các điều kiện đầu. Nếu dùng phương pháp biến đổi Laplace thì điều này là không cần thiết vì điều kiện đầu đã bao gồm trong biến đổi Laplace của các thành phần đạo hàm. Trình tự ứng dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân có thể tóm tắt theo sơ đồ dưới đây:



Ví dụ 2.4: Giải phương trình: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

Với điều kiện đầu $y(0) = a$ và $y'(0) = b$

Giải

Lấy biến đổi Laplace cả hai vế phương trình đã cho, ta được:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 0$$

$$[s^2Y(s) - as - b] + 3[sY(s) - a] + 2Y(s) = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = as + (3a+b)$$

$$Y(s) = \frac{as + (3a+b)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2a+b}{(s+1)} - \frac{a+b}{(s+2)}$$

Vậy : $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}$ với $t \geq 0$

Ví dụ 2.5: Giải phương trình vi phân $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 8r(t)$

Với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0$, tín hiệu vào $r(t)$ là hàm nấc

Giải

Biến đổi Laplace cả hai vế phương trình đã cho, ta được:

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = 8R(s)$$

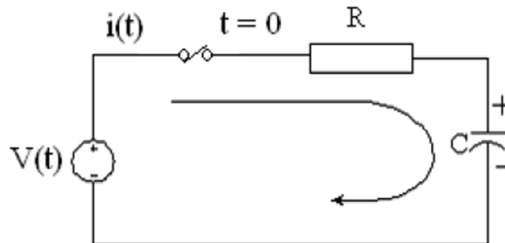
Tín hiệu vào bậc thang đơn vị nên $R(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{8}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{4}{5s} - \frac{4(s+1)}{5[(s+1)^2 + 3^2]} - \frac{(4/3)(3)}{5[(s+1)^2 + 3^2]}$$

Hàm thời gian: $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\cos 3t - \frac{4}{15}e^{-t}\sin 3t \text{ với } t \geq 0$$

Ví dụ 2.6: Cho mạch điện sau



Giả sử khi mạch điện đóng tại thời điểm $t = 0$ thì $V_c(0) = 1.0 \text{ V}$. Tìm dòng điện $i(t)$ chạy trong mạch điện. Trong đó $V(t) = 5\text{V}$, $C = 1\mu\text{F}$, $R = 1\text{k}\Omega$

Giải:

Ta có phương trình sau

$$v(t) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

hay $Cv(t) = CRi + \int i dt$

thay các thông số đầu bài đã cho vào

$$5.10^{-6} = 10^3 \cdot 10^{-6}i + \int i dt$$

$$5.10^{-6} = 10^{-3}i + \int i dt$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace

$$\frac{5.10^{-6}}{s} = 10^{-3}I + \left(\frac{I}{s} + \frac{[\int i dt]}{s} \right)$$

Theo đề bài $V_c(0) = 1.0V$ nên ta có:

$$V_c(0) = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{10^{-6}} [\int i dt] = 1$$

$$[\int i dt] = 10^{-6}$$

Thay vào công thức ta có:

$$\frac{5.10^{-6}}{s} = 10^{-3}I + \left(\frac{I}{s} + \frac{10^{-6}}{s} \right)$$

$$\left(\frac{1}{s} + 10^{-3} \right) I = \frac{5.10^{-6}}{s} - \frac{10^{-6}}{s} = \frac{4.10^{-6}}{s}$$

$$(1 + 10^{-3}s) I = 4.10^{-6}$$

$$i = \frac{4.10^{-6}}{1 + 10^{-3}s} = 4.10^{-3} \frac{1}{s + 1000}$$

Thực hiện tra bảng biến đổi Laplace ta tìm được $i(t)$ như sau

$$i(t) = 4.10^{-3} e^{-1000t}$$

2.8. Hàm truyền

Xét hệ thống tuyến tính liên tục bất biến có tín hiệu vào $r(t)$, tín hiệu ra $y(t)$, được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t)$$

Giả thiết các điều kiện đầu bằng 0, biến đổi Laplace hai vế ta được :

$$Y(s) (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = R(s) (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)$$

Biểu thức:

$$Y(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Được gọi là hàm truyền (hay hàm truyền đạt) của hệ thống.

2.8.1 Định nghĩa: Hàm truyền là tỉ số giữa ảnh Laplace của tín hiệu ra và ảnh Laplace của tín hiệu vào khi các điều kiện đầu bằng 0.

Để có hàm truyền ta thực hiện các bước sau đây:

- 1) Viết phương trình vi phân mô tả hệ thống (hay phần tử).
- 2) Lấy biến đổi Laplace của phương trình vi phân, với giả thiết tất cả các điều kiện ban đầu bằng 0.
- 3) Lập tỉ số tín hiệu ra $Y(s)$ trên tín hiệu vào $R(s)$. Tỉ số này chính là hàm truyền.

Nhận xét:

- Khái niệm hàm truyền chỉ dùng cho phần tử và hệ thống tuyến tính bất biến.
- Biểu thức hàm truyền chỉ phụ thuộc vào các thông số a_i, b_i và bậc n của hệ thống mà không phụ thuộc vào thể loại và giá trị (biên độ) tín hiệu vào, tín hiệu ra nên có thể dùng hàm truyền để mô tả hệ thống.
- Việc giả thiết các điều kiện đầu bằng 0 là dựa trên quan điểm dùng hàm truyền để nghiên cứu bản chất động học của hệ thống. Điều kiện đầu khác 0 chỉ phản ánh đặc tính động học ứng với các trường hợp riêng cụ thể.
- Vì hàm truyền là phân thức đại số không có phép vi phân và tích phân nên dùng hàm truyền để nghiên cứu hệ thống sẽ thuận lợi hơn nhiều so với dùng phương trình vi phân. Với khái niệm hàm truyền, quan hệ giữa tín hiệu vào với tín hiệu ra có thể biểu diễn dưới dạng phương trình đại số :

$$Y(s) = R(s) \cdot G(s) \quad (\text{tín hiệu ra} = \text{tích của tín hiệu vào và hàm truyền})$$

Điều này giúp cho công việc xác định tín hiệu ra của hệ thống ứng với một tín hiệu vào cho trước được đơn giản hơn nhiều.

➤ **Đa thức mẫu số của hàm truyền được gọi là đa thức đặc tính:**

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

➤ **Nếu cho mẫu số của hàm truyền bằng 0, ta có phương trình đặc tính:**

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Trên cơ sở khảo sát các nghiệm hoặc các hệ số của phương trình đặc tính, ta có thể đánh giá tính ổn định của hệ thống. Vấn đề xét tính ổn định của hệ thống sẽ được trình bày riêng ở chương 4.

➤ **Hàm truyền $G(s)$ cũng được viết dưới dạng zero-cực như sau:**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

Trong đó :

$z_i (i=1 \dots m)$ -là nghiệm của đa thức tử số, gọi là các zero.

$p_i (i=1 \dots n)$ - là nghiệm của đa thức mẫu số, gọi là các cực (pole).

- P_i cũng chính là nghiệm của phương trình đặc tính.

$$K = \frac{b_m}{a_n} - \text{độ lợi}$$

Với hệ thống MIMO có q ngõ vào và p ngõ ra thì ta phải viết hàm truyền riêng cho từng cặp ngõ vào-ra:

$$G_{ij} = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)} \quad (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q)$$

Quan hệ vào-ra của hệ MIMO được viết ở dạng ma trận:

$$Y(s) = G(s)R(s) \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & \cdots & G_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_q(s) \end{bmatrix}$$

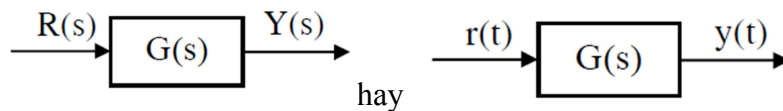
Trong đó:

$Y(s) = [Y_1(s) \dots Y_p(s)]^T$ - là ảnh Laplace của véctơ tín hiệu ra

$R(s) = [R_1(s) \dots R_p(s)]^T$ - là ảnh Laplace của véctơ tín hiệu vào

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & \cdots & G_{pq} \end{bmatrix} - \text{là ma trận hàm truyền}$$

Một hệ thống hay phần tử tuyến tính có tín hiệu vào $r(t)$, tín hiệu ra $y(t)$, sau khi đã được mô hình hoá và có hàm truyền $G(s)$ thường được biểu diễn đơn giản, trực quan bằng một khối như hình vẽ:

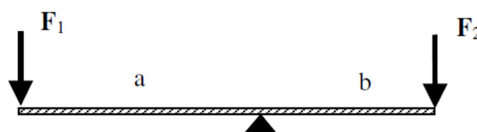


Cách biểu diễn này rất tiện cho việc cho việc xây dựng mô hình của một hệ thống phức tạp gồm nhiều khối ghép nối tiếp, song song hoặc phản hồi. Một số ví dụ về cách tìm hàm truyền

➤ Nguyên tắc chung

- Thành lập phương trình vi phân
- Sử dụng phép biến đổi Laplace để đưa về dạng hàm truyền đạt theo định nghĩa

Ví dụ 2.7: Khuếch đại lực bằng cánh tay đòn



Xét phương trình cân bằng mômen:

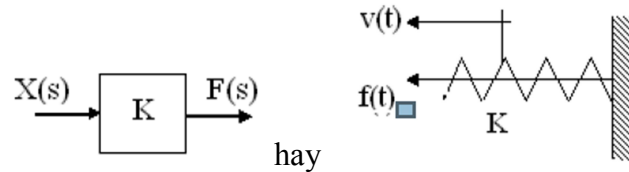
$$F_1(t) a = F_2(t) b \Rightarrow F_1(s) a = F_2(s) b$$

$$G(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{a}{b}$$

2.8.2 Hàm truyền của hệ thống cơ khí

❖ Phần tử chuyển động thẳng

a/ Lò xo



Trong đó: K là hệ số đàn hồi của lò xo

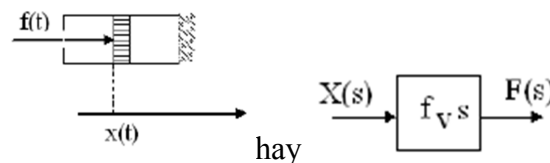
Nếu ta ấn lò xo có chiều dài L, di động được một lượng X thì cần một lực tác động lên là:

$$F(t) = Kx(t)$$

Thông qua biến đổi Laplace ta có hàm truyền của lò xo như sau:

$$G(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = K$$

b/ Bộ giảm chấn (lỏng hoặc khí)



Để di động pít-tông với vận tốc v, ta cần tác động lên một lực là f

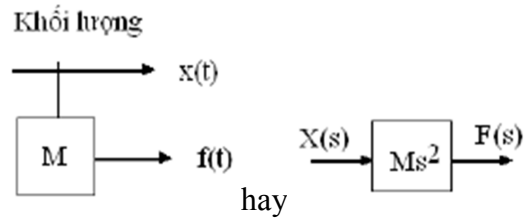
$$f(t) = f_v v(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$$

trong đó f_v là hệ số giảm chấn

Thực hiện biến đổi Laplace

$$G(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = f_v s$$

c/ trọng khối



Theo định luật II Newton tổng các lực ở bên ngoài tác động vào một trọng khối sẽ bằng tích của trọng khối và gia tốc ta có

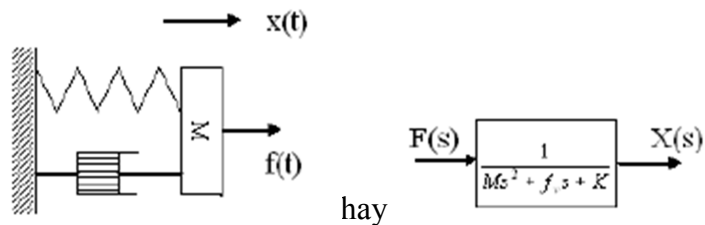
$$\sum f = Ma = M \frac{dv(t)}{dt} = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace ta có hàm truyền của trọng khối là

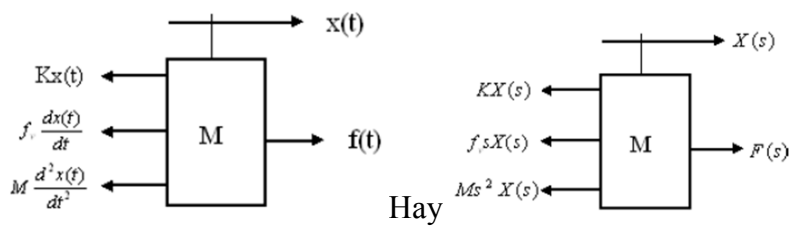
$$G(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = Ms^2$$

d/ Thiết bị giảm chấn

Thiết bị giảm chấn bao gồm trọng khối – lò xo - bộ giảm chấn



Để tìm được hàm truyền của hệ thống trước tiên ta vẽ biểu diễn các lực tác động trọng khối



Sử dụng định luật Newton để viết phương trình chuyển động

$$F(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) + f_v \frac{dx(t)}{dt}$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace

$$(Ms^2 + f_v s + K) X(s) = F(s)$$

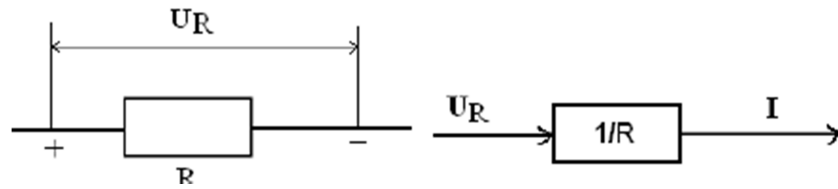
Từ đó ta rút ra hàm truyền của hệ thống là

$$G(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$

2.8.3 Hàm truyền của mạch điện

Trong mạch điện có các phần tử cơ bản là điện trở (R), điện cảm (L) và tụ điện (C).

a) Điện trở R



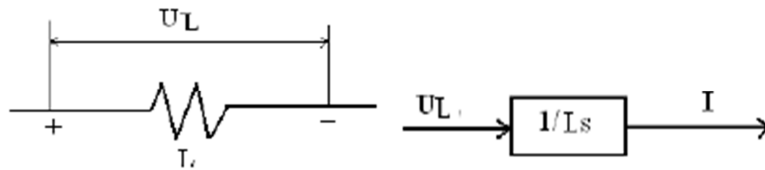
Điện áp rơi tỷ lệ thuận với cường độ dòng điện I chạy qua điện trở:

$$v(t) = Ri \quad i(t) = \frac{1}{R} v(t) \quad Z = R$$

Thông qua phép biến đổi Laplace ta có được hàm truyền của điện trở là

$$G_r = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$$

b) Điện cảm L



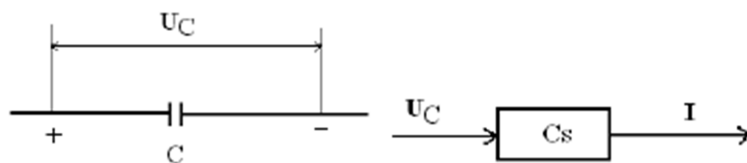
Điện áp rơi trên điện cảm là

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$$

Thông qua biến đổi Laplace ta tính được trở kháng Z và hàm truyền của điện cảm L

$$Z = Ls \quad G_L = \frac{1}{U_L} = \frac{1}{Ls}$$

c) Tụ điện C

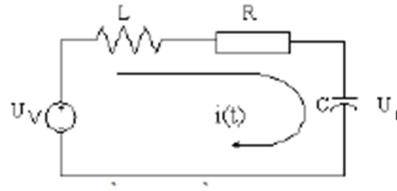


Điện áp rơi trên điện dung là

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \Rightarrow i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$Z = \frac{1}{C} ; G_c = \frac{1}{U_C} = Cs$$

d/ Các phần tử R, L, C mắc nối tiếp



$$U_v = Ri + L \frac{di}{dt} + U_r$$

$$U_r = \frac{1}{C} \int_0^\infty i dt \Rightarrow i = C \frac{dU_r}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 U_r}{dt^2}$$

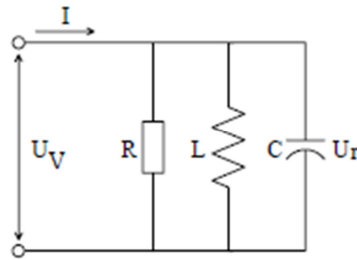
Thực hiện phép biến đổi Laplace ta có

$$(LCs^2 + RCs + 1) U_r = U_v$$

Rút ra được hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{U_r}{U_v} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Các phần tử điện mắc song song



Dòng điện của mạch điện là

$$I = \frac{U}{Z}$$

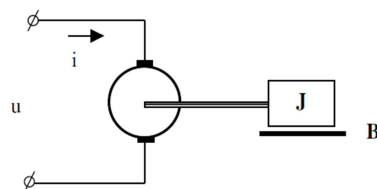
Tổng trở của mạch song song được tính là

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + \frac{1}{1/Cs} = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs}$$

Hàm truyền của hệ thống là

$$G(s) = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} = \frac{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{\frac{1}{C}s}$$

Ví dụ 2.8 : Động cơ điện một chiều kích từ độc lập



Giả sử từ thông $\Phi = \text{const}$, J là mômen quán tính qui về trục động cơ, B là hệ số ma sát ở trục

Thành lập hàm truyền của động cơ với:

u : tín hiệu vào là điện áp phần ứng

ω : tín hiệu ra là góc quay của trục động cơ

Giải

Phương trình quan hệ về điện áp phần ứng

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e_u$$

$$e_u = K_e \Phi \omega$$

Suy ra

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + K_e \Phi \omega \quad (2.3)$$

Phương trình quan hệ về mômen trên trục động cơ:

$$K_i \Phi i = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \quad (2.4)$$

Thay phương trình (2.3) vào (2.4) ta được:

$$\begin{aligned} u &= \frac{R}{K_i \Phi} \left(J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \right) + \frac{L}{K_i \Phi} \left(J \frac{d^2\omega}{dt^2} + B \frac{d\omega}{dt} \right) + K_e \Phi \omega \\ \Rightarrow u &= \frac{LJ}{K_i \Phi} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ+LB}{K_i \Phi} \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{RB}{K_i \Phi} + K_e \Phi \right) \omega \end{aligned}$$

Với

$$a_2 = \frac{LJ}{K_i \Phi}, a_1 = \frac{RJ+LB}{K_i \Phi}; a_0 = \left(\frac{RB}{K_i \Phi} + K_e \Phi \right)$$

Ta có

$$U(s) = (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \omega(s)$$

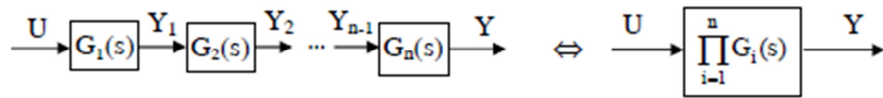
Hàm truyền của động cơ điện một chiều là:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

2.9 Đại số sơ đồ khối

Đại số sơ đồ khối là thuật toán biến đổi tương đương các sơ đồ khối. Hai sơ đồ khối được gọi là tương đương nhau nếu chúng có quan hệ giữa tín hiệu vào, tín hiệu ra như nhau. Để có hàm truyền của hệ thống phức tạp, ta thường phân chia hệ thống thành nhiều khâu nhỏ. Tìm hàm truyền của các khâu đó. Tiếp theo là biến đổi sơ đồ khối để làm xuất hiện các dạng kết nối đơn giản rồi lần lượt tính các hàm truyền tương đương theo nguyên tắc rút gọn dần từ trong ra ngoài. Sau đây là một số quy tắc biến đổi sơ đồ khối thường dùng.

2.9.1 Hệ nối tiếp



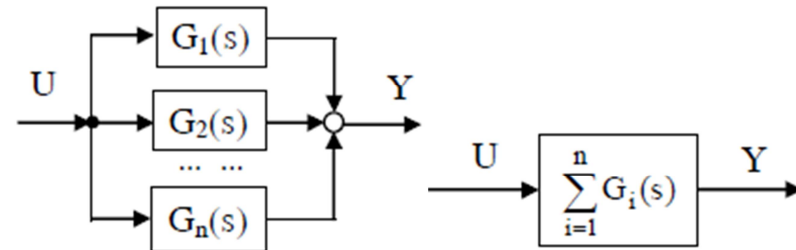
Theo sơ đồ khối ta có:

$$Y(s) = U(s) \cdot G_1(s) G_2(s) \dots G_n(s)$$

Hàm truyền tương đương:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) G_2(s) \dots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

2.9.2 Hệ song song



Theo sơ đồ khối ta có:

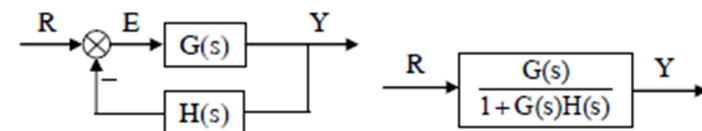
$$Y(s) = U(s) G_1(s) + U(s) G_2(s) + \dots + U(s) G_n(s)$$

Hàm truyền tương đương:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

2.9.3 Hệ hồi tiếp vòng

a/ Hồi tiếp âm



Từ sơ đồ khối ta có các phương trình mô tả quan hệ vào-ra:

$$\begin{cases} -Y(s)H(s) + R(s) = E(s) \\ E(s)G(s) = Y(s) \end{cases}$$

$$[-Y(s)H(s) + R(s)]G(s) = Y(s)$$

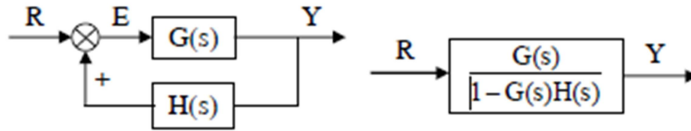
Hàm truyền của hệ kín hồi tiếp âm :

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.5)$$

Trường hợp đặc biệt khi hàm truyền mạch phản hồi $H(s)=1$, ta có hệ thống hồi tiếp âm đơn vị. Khi đó công thức (2.5) trở thành:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

b/ Hồi tiếp dương



Từ sơ đồ khối ta có các phương trình mô tả quan hệ vào-ra:

$$\begin{cases} Y(s)H(s) + R(s) = E(s) \\ E(s)G(s) = Y(s) \end{cases}$$

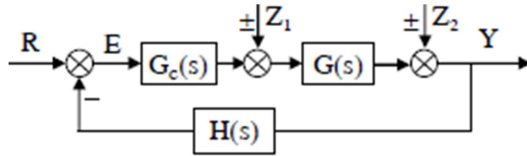
$$[Y(s)H(s) + R(s)]G(s) = Y(s)$$

Hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

2.9.4 Hệ hồi tiếp có nhiễu tác động

Xét hệ hồi tiếp (hệ kín) có sơ đồ khối:



Nếu coi nhiễu $z_1(t)=z_2(t)=0$, ta có phương trình quan hệ:

$$[-Y(s)H(s) + R(s)] \cdot G_c(s) \cdot G(s) = Y(s)$$

=> Hàm truyền của tín hiệu vào $r(t)$:

(thường được coi là hàm truyền của hệ thống, nếu không tính đến nhiễu)

$$G_k = G_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}$$

Nếu coi tín hiệu vào $r(t)=0$ và nhiễu $z_2(t)=0$, ta có phương trình quan hệ:

$$[-Y(s)H(s)G_c(s) \pm Z_1(s)] \cdot G(s) = Y(s)$$

Hàm truyền nhiễu của $z_1(t)$:

$$G_{Z1(s)} = \frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{\pm G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}$$

Nếu coi tín hiệu vào $r(t)=0$ và nhiễu $z_1(t)=0$, ta có phương trình quan hệ:

$$-Y(s)H(s)G_c(s)G(s) \pm Z_2(s) = Y(s)$$

Hàm truyền nhiễu của $z_2(t)$:

$$G_{Z2(s)} = \frac{Y(s)}{Z_2(s)} = \frac{\pm 1}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}$$

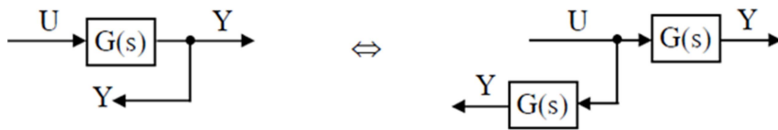
Tổng quát, quan hệ vào ra của hệ kín được biểu diễn như sau:

$$\sum Y_i = \frac{G_c(s)G(s)R(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \pm \frac{Z_1(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} \pm \frac{Z_2(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}$$

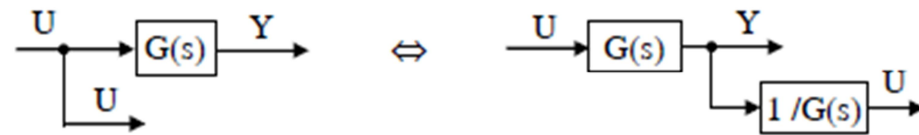
Nhận xét:

Trong thực tế, hệ thống điều khiển luôn có sự tác động của nhiễu. Các thông số trong hàm truyền $G(s)$ của đối tượng điều khiển cũng có thể thay đổi do ảnh hưởng của môi trường, hoặc tồn tại sai số giữa mô hình và đối tượng thực tế. Từ các biểu thức đã nêu ở trên ta thấy nếu $G_c(s)G(s)H(s) \gg 1$ thì các hàm truyền $G_{Z1}(s)$ và $G_{Z2}(s)$ sẽ xấp xỉ bằng 0, tức là ảnh hưởng của nhiễu lên tín hiệu ra của hệ kín là không đáng kể. Đây là một ưu điểm của hệ kín so với hệ hở. Mặt khác, nếu $G_c(s)G(s)H(s) \gg 1$ thì $G_k(s) = Y(s) / R(s) \gg 1 / H(s)$, do đó tín hiệu ra $Y(s) \gg R(s) / H(s)$, tức là tín hiệu ra của hệ kín chỉ phụ thuộc vào $H(s)$ mà không phụ thuộc vào $G_c(s)$ và $G(s)$. Như vậy cấu trúc vòng kín làm giảm được ảnh hưởng của sự thay đổi hoặc sai số của các thông số trong hàm truyền $G(s)$ của đối tượng điều khiển. Đây là ưu điểm thứ hai của hệ kín.

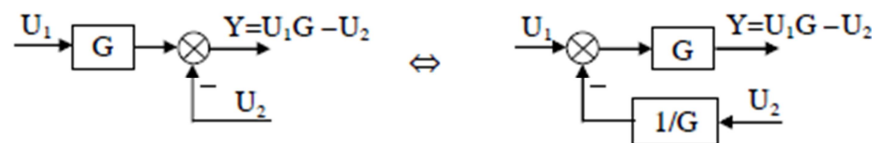
2.9.5 Chuyển điểm rẽ ra trước một khối



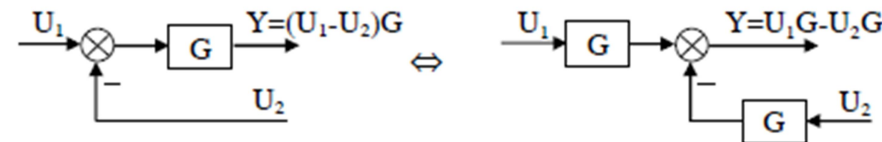
2.9.6 Chuyển điểm rẽ ra sau một khối



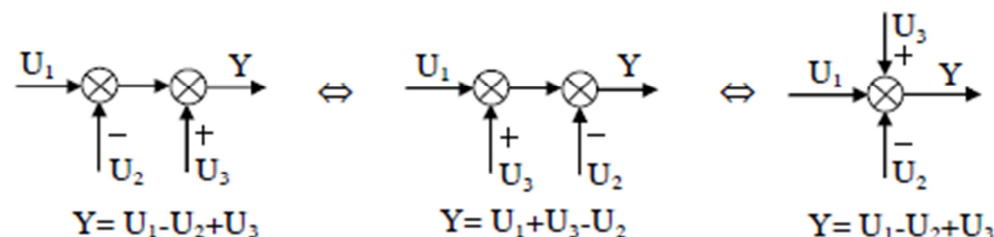
2.9.7 Chuyển bộ tổng (bộ so) ra trước một khối



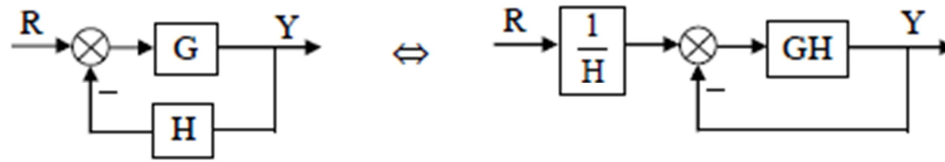
2.9.8 Chuyển bộ tổng (bộ so) ra sau một khối



2.9.9 Hoán vị, nhập hoặc tách các bộ tổng

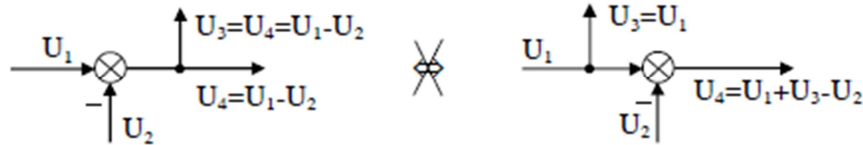


2.9.10 Chuyển về dạng hồi tiếp đơn vị



Lưu ý: Các biến đổi sau đây là không tương đương

2.9.11 Chuyển vị trí điểm rẽ nhánh và bộ tổng:

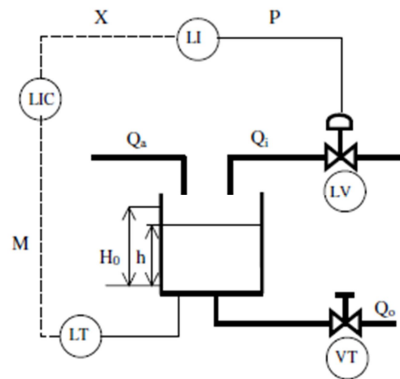


2.9.12 Chuyển vị trí hai bộ tổng khi giữa hai bộ tổng đó có điểm rẽ nhánh:



Ví dụ 2.9: Điều khiển mực chất lỏng trong bể chứa

Cho một hệ thống điều khiển tự động mực chất lỏng trong bể chứa như hình vẽ, biết rằng:



LT: chuyển đổi mức chất lỏng

LIC: bộ hiệu chỉnh

LY: chuyển đổi dòng điện/áp suất

LV: van điều chỉnh tự động

VT: van điều khiển bằng tay

- Hàm truyền của bộ chuyển đổi mức chất lỏng/dòng điện

$$G_{LT}(s) = \frac{1}{T_c s + 1} \text{ với } T_c = 1$$

Phương trình vi phân biểu diễn quan hệ giữa lưu lượng và độ cao cột chất lỏng là:

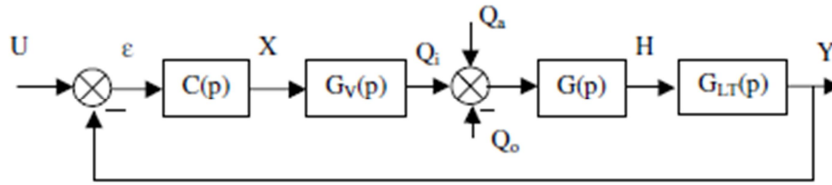
$$\theta \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = Q_i(t) + Q_a(t) \text{ với } \theta = 25$$

- Hàm truyền của cả bộ chuyển đổi dòng điện sang áp suất và van tự động là:

$$G_v(s) + \frac{Q_e(s)}{N(s)} = \frac{1}{T_v s + 1} \text{ với } T_v = 4$$

Yêu cầu:

1. Thành lập sơ đồ điều khiển của hệ thống
2. Tìm các hàm truyền đạt $\Omega_{HU}(s)$, $\Omega_{HQa}(s)$, $\Omega_{HQo}(s)$
3. Giả sử chưa có bộ điều khiển $C(s)=1$. Tìm giá trị xác lập của cột nước ở ngõ ra nếu $u(t) = 5.1(t)$ và $Q_a = 2.1(t)$



2.10 Khái niệm trạng thái và biến trạng thái

2.10.1 Khái niệm về trạng thái

Khái niệm trạng thái có trong cơ sở của cách tiếp cận hiện đại trong mô tả động học của các hệ thống đã được phát triển lần đầu tiên đưa ra năm 1936. Sau đó khái niệm này được các nhà khoa học ở Nga và Mỹ ứng dụng rộng rãi để giải các bài toán điều khiển tự động.

Trạng thái của hệ thống được đặc trưng như là lượng thông tin tối thiểu về hệ, cần thiết để xác định hành vi của hệ trong tương lai khi biết tác động vào. Nói một cách khác, trạng thái của hệ được xác định bởi tổ hợp các tọa độ mở rộng đặc trưng cho hệ.

Trạng thái của một hệ thống là tập hợp nhỏ nhất các biến (gọi là biến trạng thái) mà nếu biết giá trị của các biến này tại thời điểm t_0 và biết các tín hiệu vào thời điểm $t > t_0$ ta hoàn toàn có thể xác định được đáp ứng của hệ thống tại mọi thời điểm $t > t_0$.

Hệ thống bậc n có n biến trạng thái. Các biến trạng thái có thể chọn là biến vật lý hoặc không phải là biến vật lý.

Theo quan điểm phân tích và tổng hợp hệ thống thường, người ta chia các biến đặc trưng hệ thống hay có quan hệ nhất định với nó và các nhóm như sau:

- Các biến vào hay các tác động vào u_i được tạo ra bởi các hệ thống nằm ngoài các hệ được xét.
- Các biến ra y_i đặc trưng cho đáp ứng của hệ theo các biến vào đã định.
- Các biến trung gian x_i đặc trưng trạng thái bên trong của hệ.

2.10.2 Khái niệm véc tơ trạng thái:

n biến trạng thái hợp thành véc tơ cột

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

gọi là véc tơ trạng thái.

- Không gian trạng thái: không gian n chiều là không gian hợp bởi các trục của các biến trạng thái.

Ví dụ ta có các biến trạng thái điện áp của điện trở V_R và điện áp của tụ điện V_C các biến này sẽ hình thành 2 trục của không gian trạng thái.

Để thuận lợi trong thao tác với các đại lượng nhiều chiều, tổ hợp các biến vào có thể trình bày dưới dạng véc tơ các tác động vào:

$$u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_n(t)]^T$$

Tổ hợp các biến ra trình bày dưới dạng véc tơ ra

$$y(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_n(t)]^T$$

Các tổ hợp các tọa độ trung gian, đặc trưng nội dung bên trong của hệ được viết dạng véc tơ trạng thái của hệ.

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

Theo định nghĩa trạng thái của hệ tại thời điểm bất kỳ $t > t_0$, trạng thái của hệ là một hàm của trạng thái ban đầu $x(t_0)$ và véc tơ vào $r(t_0, t)$, tức là:

$$x(t) = F[x(t_0), u(t_0, t)] \quad (2.6)$$

Véc tơ ra tại thời điểm t có quan hệ đơn trị với $x(t_0)$ và $u(t_0, t)$

$$y(t) = \psi[x(t_0), u(t_0, t)] \quad (2.7)$$

Các phương trình (2.6) và (2.7) thường gọi là phương trình trạng thái của hệ.

Nếu hệ thống được mô tả bởi các phương trình vi phân tuyến tính, thì phương trình trạng thái của hệ được viết dưới dạng sau: (Bằng cách sử dụng các biến trạng thái, ta có thể chuyển phương trình vi phân bậc n mô tả hệ thống thành hệ gồm n phương trình vi phân bậc nhất)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t).u(t) \\ y(t) = C(t).x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

trong đó: $\underline{x}$ ($n \times 1$) véc tơ các biến trạng thái,

$\underline{u}$ ($m \times 1$) véc tơ các biến đầu vào

$\underline{y}$ ($r \times 1$) véc tơ các biến đầu ra.

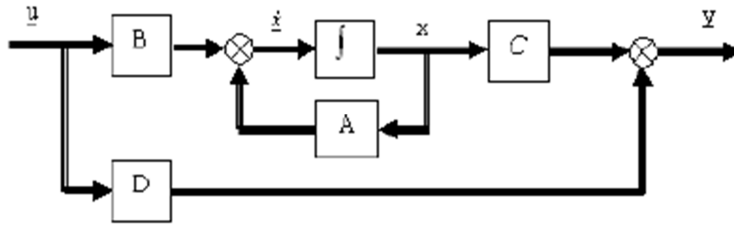
$A(t)$ - Ma trận hệ thống.

$B(t)$ - Ma trận điều khiển hay ma trận đầu vào.

$C(t)$ - Ma trận ra.

D(t) - Ma trận vòng.

Các ma trận có các phần tử phụ thuộc vào biến t, lần lượt có kích thước là: $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $C(r \times n)$, $D(r \times m)$.



Hình 2.4: Sơ đồ khối biểu diễn hệ thống điều khiển trong không gian trạng thái

Thực tế các hệ thống thực đều có tính quán tính, do đó D là một ma trận có các phần tử đều bằng không.

2.10.3 Hệ tuyến tính hệ số hằng.

Hệ thống có mô hình trạng thái là:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Trong đó các ma trận A, B, C và D là các ma trận hằng số.

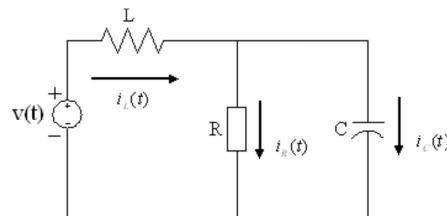
A được gọi là ma trận hệ thống. Nếu s làm cho phương trình $\det(sI - A) = 0$ thì s được gọi là giá trị riêng của ma trận A (đây chính là điểm cực của hệ thống). I là ma trận đơn vị, s là một số phức, det là kí hiệu của phép tính định thức ma trận.

• Ứng dụng biểu diễn mô hình toán học trên không gian trạng thái

Ứng dụng hệ phương trình trạng thái để biểu diễn các hệ vật lý phức tạp. Bước đầu tiên là chọn vectơ trạng thái, việc lựa chọn này phải tuân theo các yêu cầu sau:

- Các biến trạng thái phải là tối thiểu nhưng vẫn phải đảm bảo biểu diễn đầy đủ trạng thái của hệ thống.
- Các biến trạng thái phải độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2.10: Cho hệ thống vật lý có sơ đồ như sau:



Xây dựng mô hình trạng thái cho đối tượng.

Giải:

Bước 1: Đặt tên các dòng điện nhánh bao gồm i_R , i_R và i_C

Bước 2: Chọn các biến trạng thái bằng cách viết phương trình vi phân cho các phần tử chứa năng lượng bao gồm tụ điện C và điện cảm L

$$C \frac{dv_c}{dt} = i_c \quad ; \quad L \frac{di}{dt} = v_L$$

Ta chọn i_L và v_C là các biến trạng thái, nhưng do i_C và v_L không phải là các biến trạng thái nên ta phải viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các biến trạng thái i_L và v_C , biến đầu vào là $v(t)$.

Bước 3: Sử dụng lý thuyết về mạch điện cụ thể là viết phương trình dựa vào định luật Kirchhoff. Tại nút 1 ta có

$$i_c = -i_R + i_L = -\frac{1}{R}v_c + i_L$$

Mặt khác ta có

$$v_L = -v_C + v(t)$$

Bước 4: Thay công thức trên với nhau ta thu được công thức như sau:

$$C \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{R}v_c + i_L$$

$$L \frac{di}{dt} = -v_C + v(t)$$

Hay

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c + \frac{1}{C}i_L$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v_c + \frac{1}{L}v(t)$$

Bước 5: Rút ra công thức của tín hiệu đầu ra $i_R(t)$

$$i_R = \frac{1}{R}v_c$$

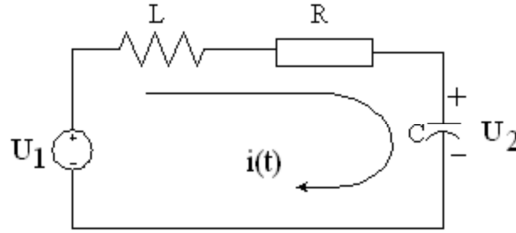
kết quả cuối cùng là

$$\begin{bmatrix} v'_c \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v(t)$$

tín hiệu đầu ra

$$i_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.11: Cho mạch điện gồm ba phần tử R, L và C mắc nối tiếp như hình



U_1 là điện áp đặt vào mạch. Tìm mô hình trạng thái.

Giải:

Ta có phương trình điện áp của mạch là:

$$u_1 = u_R + u_L + u_C$$

thay các công thức tính điện áp của các phần tử

$$u_1 = iR + L \frac{di}{dt} + u_2 \quad (2.8)$$

$$\text{Trong đó } u_2 = u_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.9)$$

Trạng thái của mạch được quyết định bởi điện áp ra u_2 và dòng điện i . Ta gọi u_2 và i là các biến trạng thái.

Đặt:

$$u_2 = x_1$$

$$i = x_2$$

Từ công thức (2.8) và (2.9) ta rút ra công thức tính dòng điện là

$$i = C \frac{du_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} u_2 + \frac{1}{L} u_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u_1$$

Dạng chính tắc được viết như sau:

$$x'_1 = 0.x_1 + \frac{1}{C}x_2 + 0.u_1$$

$$x'_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_1$$

Viết hệ trên dưới dạng vectơ ma trận

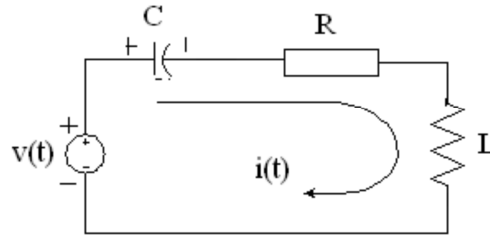
$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_1$$

Hay viết gọn lại

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Gọi là phương trình trạng thái của hệ thống. Không gian hai chiều gồm trạng thái dòng điện $i = x_2$ và điện áp trên tụ là $u_2 = x_1$ được gọi là không gian trạng thái.

Ví dụ 2.12: Cho hệ thống bên dưới



Ta có

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v(t)$$

Thay $i(t) = \frac{dq}{dt}$ vào công thức trên ta được

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t)$$

Ta đặt $i(t)$, $q(t)$ là các biến trạng thái

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t)$$

viết dưới dạng vectơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v$$

Điện áp v_L là biến trạng thái đầu ra

$$v_L = -\frac{1}{C}q - Ri + v$$

Hay

$$V_L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} + u$$

2.10.4 Chuyển từ hàm truyền đạt sang không gian trạng thái và ngược lại

➤ Chuyển từ hàm truyền đạt sang không gian trạng thái

Để có thể mô phỏng được một hệ thống trên máy tính thì mô hình toán học của đối tượng phải được biểu diễn trên không gian trạng thái. Vì vậy khi ta đã mô hình của đối tượng biểu diễn bằng hàm truyền đạt ta phải chuyển sang phương trình trạng thái.

- Chọn các biến trạng thái, mỗi biến trạng thái được xác định bởi đạo hàm của biến trạng thái trước đó.

- Ta xét phương trình vi phân sau:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

Cách thuận tiện chọn biến trạng thái là chọn biến đầu ra

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

.....

$$x_{n-1} = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

Lấy đạo hàm hai vế

$$x'_1 = \frac{dy}{dt}$$

$$x'_2 = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$x'_3 = \frac{d^3 y}{dt^3}$$

.....

$$x'_{n-1} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Biểu diễn trên không gian trạng thái

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

$$x'_3 = x_4$$

....

$$x'_{n-1} = x_n$$

$$x'_n = a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

Biểu diễn dưới dạng vectơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

Viết phương trình trạng thái đầu ra

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Các bước thực hiện biến đổi từ hàm truyền sang hệ phương trình trạng thái:

- **B1:** chuyển từ hàm truyền về phương trình vi phân và thực hiện phép biến đổi Laplace ngược với các điều kiện đầu bằng không.
- **B2:** Thực hiện chọn các biến trạng thái và biểu diễn trong không gian trạng thái.

Ví dụ 2.13: Một đối tượng có hàm truyền đạt là $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 5s + 4}$

Xây dựng mô hình trạng thái cho đối tượng. Xác định các giá trị riêng.

Giải

Bước 1: Tìm phương trình vi phân

$$C(s).(s^2 + 5s + 4) = 5.R(s) \Rightarrow \frac{d^2c}{dt^2} + 5 \frac{dc}{dt} + 4c = 25r$$

Bước 2: Lựa chọn các biến trạng thái

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = \frac{dc}{dt} = x'_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = 25r - 4x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Viết dưới dạng vectơ ma trận

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Tìm giá trị riêng

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s + 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s+5) + 4 = s^2 + 5s + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

Các giá trị riêng là $s_1 = -1, s_2 = -4$

Ví dụ 2.14: Cho hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Chuyển đổi sang hệ phương trình trạng thái.

Bước 1: Tìm phương trình vi phân

Thực hiện phép nhân chéo

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s)$$

Chuyển đổi thành phương trình vi phân bằng cách dùng phép biến đổi Laplace ngược với điều kiện đầu bằng 0

$$\ddot{c} + 9\dot{c} + 26c = 24r$$

Bước 2: Lựa chọn biến trạng thái

Chọn các biến trạng thái như sau:

$$X_1 = c$$

$$X_2 = \dot{c}$$

$$X_3 = \ddot{c}$$

Lấy đạo hàm cả hai vế phương trình (2.89) ta sẽ thu được hệ phương trình trạng thái

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r$$

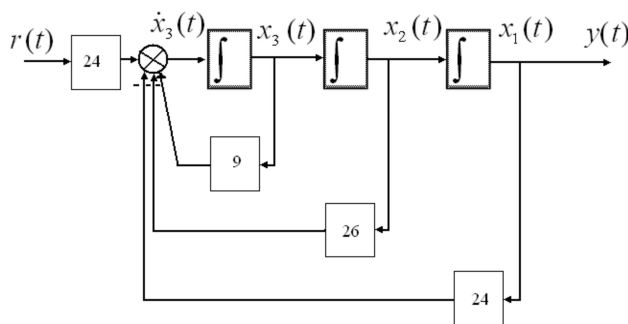
$$y = c = x_1$$

Viết dưới dạng vectơ ma trận

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Mô hình được biểu diễn như sau



➤ Chuyển từ không gian trạng thái sang hàm truyền đạt

Mô hình toán học trong gian trạng thái được biểu diễn như sau:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

Thực hiện chuyển đổi Laplace với điều kiện đầu bằng 0

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Từ rút $X(s)$ ra:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) (*)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Trong đó I là ma trận đơn vị

Thay $X(s)$ vào (*) rút ra được

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

Ta gọi $[C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)]$ là ma trận hàm truyền bởi vì nó quan hệ với vectơ biến ra $Y(s)$ và vectơ biến vào $U(s)$.

Nếu $U(s)$ và $Y(s)$ là các đại lượng vô hướng ta có thể tìm hàm truyền như sau

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Vi dụ 2.15: Cho phương trình trạng thái biết đầu ra là $Y(s)$ và đầu vào là $U(s)$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x}$$

Giải: Từ đầu bài ta xác định các ma trận A , B , C và D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

Ta tìm $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1}$$

Thay $(sI - A)^{-1}$, B , C , D vào ta được hàm truyền

$$T(s) = \frac{10(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+2s+1}$$

2.11 Tuyến tính hóa

- Các hệ thống mà ta đã xét với giả thuyết là tuyến tính. Trên thực tế hầu hết các đối tượng là phi tuyến.

- Trong hệ thống cũng có thể bao gồm cả đại lượng phi tuyến và tuyến tính.
- Do thực tế yêu cầu người thiết kế phía tuyến tính hóa một số đại lượng phi tuyến để sử dụng.

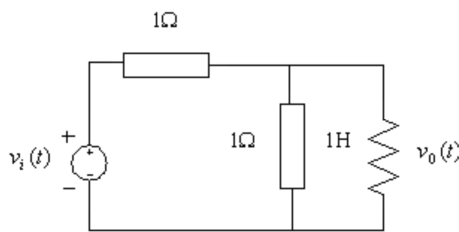
- Các bước thực hiện tuyến tính hóa

- + **Bước 1:** Viết phương trình vi phân của hệ thống. Với giả thiết tín hiệu đầu vào nhỏ
- + **Bước 2:** Tuyến tính hóa phương trình vi phân, dùng biến đổi Laplace với điều kiện đầu bằng 0.

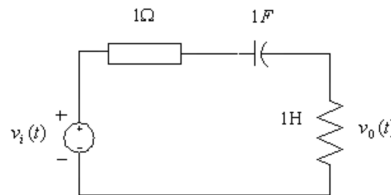
2.12 Bài Tập chương

1. Tìm hàm truyền của hệ thống sau

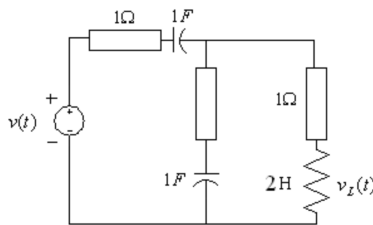
a) $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$



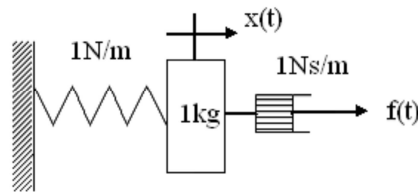
b) $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$



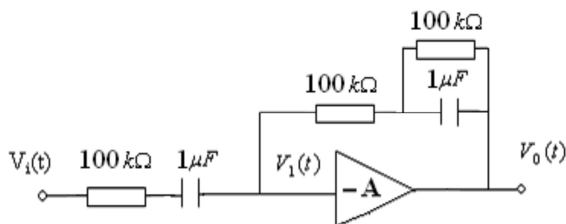
c) $G(s) = V_L(s)/V(s)$



d) $G(s) = X_1(s)/F(s)$



e) $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$



2. Giải phương trình vi phân sau

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 6y = 0$$

$$\text{Với } y(0+) = 5; \dot{y}(0+) = -2; \ddot{y}(0+) = 14$$

3. Tìm hàm truyền $G(s)$ của hệ thống khi biết được dạng biểu diễn trên không gian trạng thái

$$\text{a) } \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} r; \quad y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

$$\text{b) } \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} r; \quad y = [1 \quad 3 \quad 6]x$$

CHƯƠNG 3

PHÂN TÍCH ĐẶC TÍNH CỦA CÁC PHẦN TỬ LIÊN TỤC

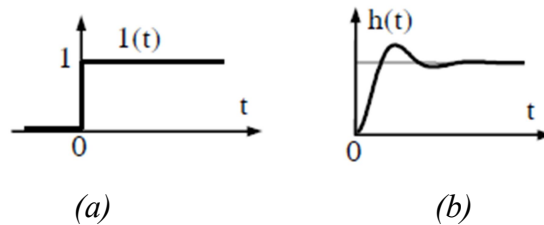
3.1 Khái niệm về đặc tính động học

Đặc tính động của hệ thống mô tả sự thay đổi tín hiệu ở đầu ra của hệ thống theo thời gian khi có tác động ở đầu vào. Trong thực tế các hệ thống điều khiển rất đa dạng, tuy nhiên những hệ thống được mô tả bằng mô hình toán học có dạng như nhau sẽ có đặc tính động học như nhau. Để khảo sát đặc tính động của hệ thống tín hiệu vào thường được chọn là tín hiệu cơ bản như hàm xung đơn vị, hàm nấc đơn vị hay hàm điều hòa. Tùy theo dạng của tín hiệu vào thử mà đặc tính động thu được là đặc tính thời gian hay đặc tính tần số.

3.2 Đặc tính thời gian

3.2.1 Hàm quá độ

Hàm quá độ của một khâu $h(t)$ là phản ứng của khâu đối với tín hiệu vào là hàm nấc (hình 3.1). Thường được sử dụng để thử hệ thống ổn định hóa:



Hình 3.1(a) Tín hiệu đầu vào

(b) Hàm quá độ

Khâu động học có tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu ra $y(t)$, ta có:

$$h(t) = y(t)|_{x(t)=1(t)}$$

Để tìm hàm quá độ $h(t)$ khi biết hàm truyền $G(s)$ ta thực hiện hai bước:

Bước 1: Tìm ảnh Laplace $H(s)$ của $h(t)$

$$\text{Do: } H(s) X(s) = G(s) L[1(t)] \cdot G(s) = \frac{1}{s} G(s)$$

$$\text{Nên: } H(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Bước 2: Biến đổi Laplace ngược của $H(s)$ ta có hàm quá độ $h(t)$

$$h(t) = L^{-1}[H(s)]$$

3.2.2 Hàm trọng lượng

Nếu tín hiệu vào là hàm xung đơn vị $\delta(t)$ thì tín hiệu ra gọi là đáp ứng xung, hàm quá độ xung, hay hàm trọng lượng, ký hiệu là $g(t)$.

Tức là:

$$g(t) = y(t)|_{x(t)=\delta(t)}$$

Nếu biết hàm truyền $G(s)$ có thể tìm hàm trọng lượng $g(t)$ như sau :

$$\text{Do tín hiệu vào} \quad G(s) = \frac{L[g(t)]}{L[\delta(t)]} = L[g(t)]$$

$$\text{Nên tín hiệu ra} \quad g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

Nếu biết hàm quá độ $h(t)$ có thể tìm hàm trọng lượng $g(t)$ như sau

$$\text{Do tín hiệu vào:} \quad \delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt}$$

$$\text{Nên tín hiệu ra:} \quad g(t) = \frac{d[h(t)]}{dt}$$

3.2.3. Đáp ứng dốc

Hàm dốc đơn vị thường dùng làm tín hiệu vào để thử hệ thống điều khiển theo dõi. Khi tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị thì tín hiệu ra gọi là đáp ứng dốc.

3.2.4 Đáp ứng với tín hiệu vào bất kỳ

Tổng quát, một tín hiệu $x(t)$ bất kỳ có thể biểu diễn thông qua hàm $\delta(t)$ hoặc $1(t)$ như sau:

$$x(t) = x(t) \int_0^t \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} 1(t - \tau) d\tau$$

Với: $x(t)$ là giá trị xác định của hàm $x(t)$ tại thời điểm $t = \tau$

$\delta(t - \tau)$ là xung đơn vị được phát tại thời điểm $t = \tau$

$1(t - \tau)$ là hàm bậc thang đơn vị được phát tại thời điểm $t = \tau$

Dựa vào tính chất xếp chồng của hệ tuyến tính ta có thể xác định tín hiệu ra $y(t)$ thông qua hàm trọng lượng $g(t)$ hoặc hàm quá độ $h(t)$ như sau:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau$$

Ví dụ: $G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)}$, Xác định hàm trọng lượng và hàm quá độ của hệ thống

*Hàm trọng lượng:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s(s+5)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{5s} + \frac{4}{5(s+5)} \right\}$$

$$g(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} e^{-5t}$$

*Hàm quá độ:

$$\text{Cách 1: } h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} e^{-5\tau} \right) d\tau = \left[\frac{1}{5} \tau - \frac{4}{25} e^{-5\tau} \right]_0^t$$

$$h(t) = \frac{1}{5} t + \frac{4}{25} e^{-5t} + \frac{4}{25}$$

Cách 2: $h(t) = L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+5)} \right\} \Rightarrow$ thực hiện biến đổi Laplace ngược thu được kết quả như trên

Nhận xét:

Mô tả toán học - Phương trình vi phân

- Hàm truyền

- Phương trình trạng thái

Khi biết hàm trọng lượng hay hàm quá độ ta có thể biết được hàm truyền của hệ thống

- $G(s) = L[g(t)]$

- $G(s) = L \left\{ \frac{dh(t)}{dt} \right\}$

Ví dụ: Cho hệ thống có đáp ứng nấc:

$$h(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Xác định hàm truyền

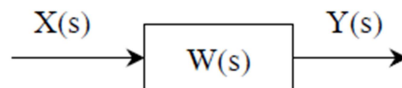
$$G(s) = L \left\{ \frac{dh(t)}{dt} \right\} = L \{ 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3} = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

3.3 Đặt tính tần số của các khâu động học điển hình

3.3.1 Định nghĩa các khâu động học điển hình

Các khâu động học mà phương trình vi phân mô tả quá trình động học của chúng có bậc nhỏ hơn hoặc bằng hai, được gọi là khâu động học điển hình.

Đặc điểm của các khâu động học điển hình là chỉ có một đầu vào và một đầu ra như hình 3.2, tín hiệu đầu ra không ảnh hưởng đến tín hiệu đầu vào.



Hình 3.2 Khâu động học chỉ có một đầu vào và một đầu ra

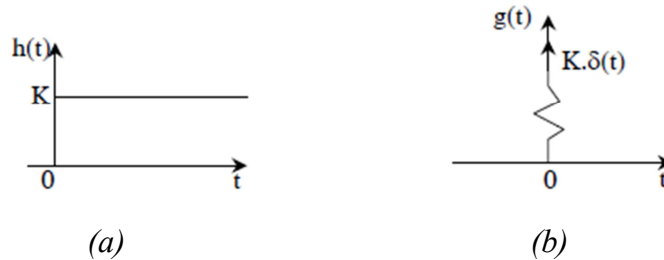
Các khâu động học điển hình bao gồm: Khâu nguyên hàm, khâu tích phân, khâu vi phân, khâu trễ. Khâu nguyên hàm gồm các khâu: Khâu khuếch đại (khâu không quán tính), khâu quán tính bậc một, khâu quán tính bậc hai (Khâu giao động). Sau đây ta khảo sát các khâu động học điển hình trên.

3.3.2 Khâu tỉ lệ

- Khâu không quán tính là khâu mà phương trình động học có dạng: $y = K.x$
- Hàm truyền đạt của khâu. $G(s) = K$

Các đặc tính thời gian.

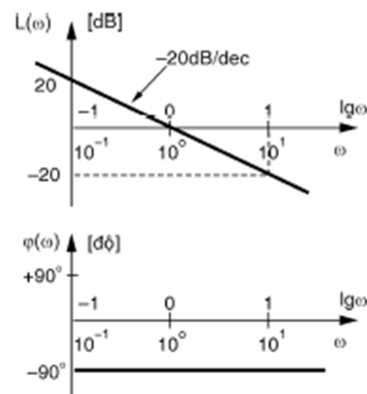
- Hàm quá độ : $h(t) = K.1(t)$.
- Hàm trọng lượng : $g(t) = K.\delta(t)$



Hình 3.3 : Đặc tính thời gian của khâu tỉ lệ

a) Hàm quá độ; b) Hàm quá độ

Các đặc tính tần số



Hình 3.4 Đặc tính tần số của khâu tỉ lệ

(biểu đồ bode)

- Đặc tính tần số: $G(j\omega) = K$
- Biên độ: $M(\omega) = K \Rightarrow L(\omega) = 20\lg K$
- Pha: $\varphi(\omega) = 0$

Các biểu thức trên cho thấy đặc tính tần số của khâu tỉ lệ là hằng số với mọi ω , do đó biểu đồ Bode về biên độ là một đường song song với trục hoành, cách trục hoành $20\lg K$; biểu đồ Bode về pha là một đường nằm ngang trùng với trục hoành.

3.3.3 Khâu tích phân lý tưởng

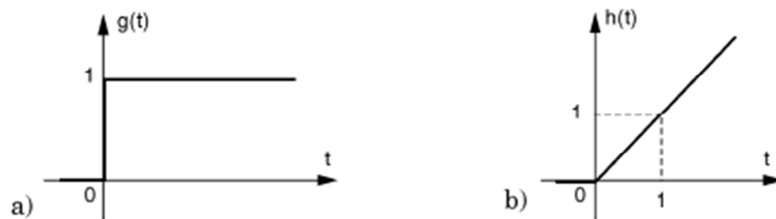
Hàm truyền: $G(s) = \frac{1}{s}$

Đặc tính thời gian:

$$Y(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)}{s}$$

- Hàm trọng lượng: $g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1(t)$
- Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \cdot 1(t)$

Vậy hàm trọng lượng và hàm quá độ của khâu tích phân lý tưởng tương ứng là hàm nấc đơn vị và hàm dốc đơn vị. Một đặc điểm quan trọng cần quan tâm là hàm quá độ của khâu tích phân lý tưởng tăng đến vô cùng



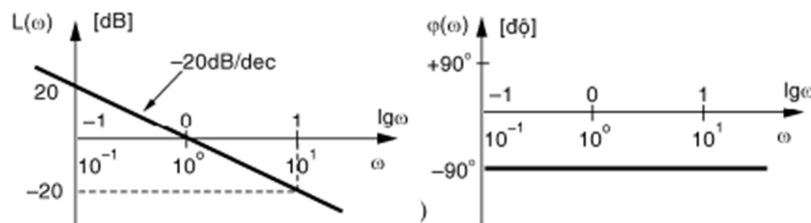
Hình 3.5: Đặc tính thời gian của khâu tích phân lý tưởng

a) Hàm trọng lượng; b) Hàm quá độ

Các đặc tính tần số

- Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$
- Biên độ: $M(\omega) = \frac{1}{\omega} \Rightarrow L(\omega) = 20\lg M(\omega) = 20\lg\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20\lg\omega$
- Pha: $\varphi = -90^\circ$

Nếu vẽ $L(\omega)$ trong hệ tọa độ vuông góc thông thường thì đồ thị $L(\omega)$ là đường cong. Tuy nhiên do trục hoành của biểu đồ Bode được chia theo thang logarith cơ số 10 nên dễ dàng thấy rằng biểu đồ Bode về biên độ của khâu tích phân lý tưởng là đường thẳng có độ dốc -20dB/dec . Biểu đồ Bode về pha của khâu tích phân lý tưởng là đường nằm ngang do $\varphi(\omega) = -90^\circ$ với mọi ω .



Hình 3.6: Đặc tính tần số của khâu tích phân lý tưởng (biểu đồ bode)

3.3.4 Khâu vi phân lý tưởng

Hàm truyền: $G(s) = s$

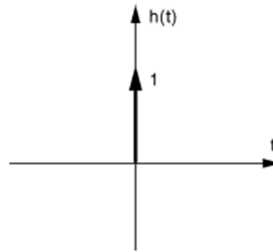
Đặc tính thời gian:

$$Y(s) = R(s).G(s) = sR(s)$$

➤ Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = L^{-1}[1] = \delta(t)$

➤ Hàm trọng lượng: $g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \delta'(t)$

Hàm quá độ của khâu vi phân lý tưởng hàm xung đơn vị, hàm quá độ, chỉ có thể mô tả bằng biểu thức toán học, không biểu diễn bằng đồ thị được.



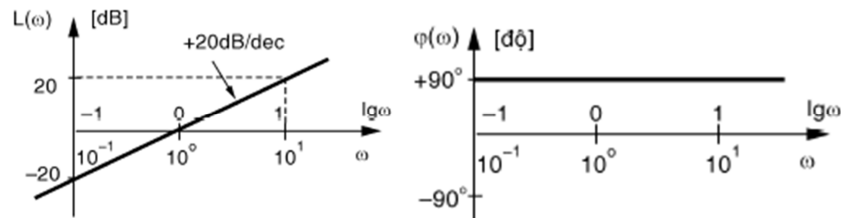
Hình 3.7 Hàm quá độ của khâu vi phân lý tưởng

➤ Đặc tính tần số: $G(j\omega) = j\omega$

➤ Biên độ: $M(\omega) = \omega \Rightarrow L(\omega) = 20\lg M(\omega) = 20\lg \omega$

➤ Pha: $\varphi(\omega) = +90^\circ$

Đặc tính tần số của khâu vi phân lý tưởng hoàn toàn trái ngược so với khâu tích phân lý tưởng. Biểu đồ Bode về biên độ của khâu vi phân lý tưởng là đường thẳng có độ dốc +20dB/dec, biểu đồ Bode về pha là đường nằm ngang $\varphi(\omega) = +90^\circ$



Hình 3.8 Đặc tính tần số của khâu vi phân lý tưởng

3.3.5 Khâu quán tính bậc nhất

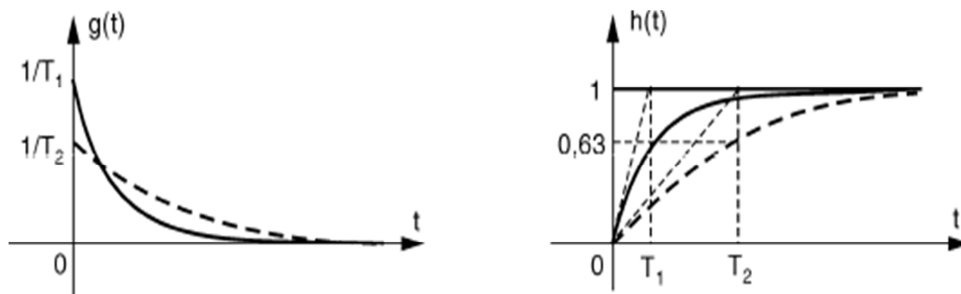
Hàm truyền: $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$

Đặc tính thời gian: $Y(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)}{Ts+1}$

➤ Hàm trọng lượng: $g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{Ts+1}\right\} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$

➤ Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(Ts+1)}\right\} = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t) \quad (3.1)$

Hàm trọng lượng của khâu quán tính bậc nhất là hàm mũ suy giảm về 0, hàm quá độ tăng theo qui luật hàm mũ đến giá trị xác lập bằng 1. Tốc độ biến thiên của hàm trọng lượng và hàm quá độ tỉ lệ với T nên T được gọi là thời hằng của khâu quán tính bậc nhất. T càng nhỏ thì đáp ứng càng nhanh, T càng lớn thì đáp ứng càng chậm. Hình 3.9 minh họa đặc tính thời gian của hai khâu quán tính bậc nhất có thời hằng tương ứng là T_1 và T_2 , trong đó $T_1 < T_2$. Thay $t = T$ vào biểu thức (3.1) ta được $h(T) = 0.63$, do đó thời hằng của khâu quán tính bậc nhất chính là thời gian cần thiết để hàm quá độ tăng lên bằng 63% giá trị xác lập (giá trị xác lập của $h(t) = 1$). Một cách khác để xác định thời hằng T là vẽ tiếp tuyến với hàm quá độ tại gốc tọa độ, khoảng cách từ giao điểm của tiếp tuyến này với đường nằm ngang có tung độ bằng 1 chính là T .



Hình 3.9 Đặc tính thời gian của khâu quán tính bậc nhất

a) Hàm trọng lượng;

b) Hàm quá độ

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1 - Tj\omega}{1 + T^2\omega^2}$

Phần thực $P(\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2}$

Phần ảo: $Q(\omega) = \frac{-T\omega}{1 + T^2\omega^2}$

➤ Biên độ: $M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

Hay $L(\omega) = 20\lg(M(\omega)) = 20\lg\left(\frac{1}{T^2\omega^2 + 1}\right) = -20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2} \quad (3.2)$

➤ Pha: $\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1}\left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right] = -\text{tg}^{-1}(T\omega) \quad (3.3)$

Biểu thức (3.2) cho thấy biểu đồ Bode biên độ là một đường cong. Có thể vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận như sau:

- Nếu $\omega < 1/T \Leftrightarrow \omega T < 1$: $L(\omega) \sim -20\lg\sqrt{1} = 0$, do đó ta có thể vẽ gần đúng bằng đường thẳng nằm trên trục hoành (độ dốc bằng 0).

- Nếu $\omega > 1/T \Leftrightarrow \omega T > 1$: $L(\omega) \sim -20\lg\sqrt{\omega^2 T^2} = -20\lg\omega T$, do đó ta vẽ gần đúng bằng đường thẳng có độ dốc -20dB/dec . Như phân tích ở trên, ta thấy tại tần số $1/T$ độ dốc của các đường tiệm cận thay đổi, biểu đồ Bode là một đường gấp khúc nên tần số

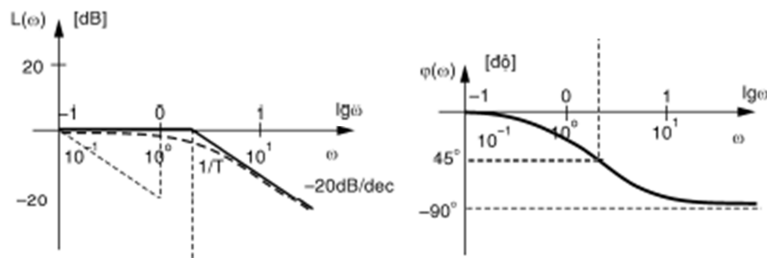
$1/T$ gọi là tần số gãy của khâu quán tính bậc nhất. Thay giá trị ω vào biểu thức (3.3) ta vẽ được biểu đồ Bode về pha. Để ý một số điểm đặc biệt như sau:

$$\omega \rightarrow 0 : \varphi(\omega) \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow 1/T : \varphi(\omega) \rightarrow -45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty : \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$$

Hình 3.10 minh họa biểu đồ Bode của khâu quán tính bậc nhất. Đường cong đứt nét ở biểu đồ Bode biên độ chính là đường $L(\omega)$ vẽ chính xác. Sai lệch cực đại giữa đường cong vẽ chính xác và các đường tiệm cận xuất hiện tại tần số gãy, tại tần số này giá trị chính xác của $L(\omega)$ là $-20\lg\sqrt{2} \sim -3\text{dB}$, trong khi giá trị gần đúng là 0dB , sai lệch này khá bé có thể bỏ qua được. Do đó khi phân tích và thiết kế hệ thống tự động trong miền tần số ta có thể dùng biểu đồ Bode biên độ vẽ bằng các đường tiệm cận thay cho biểu đồ Bode biên độ vẽ chính xác



Hình 3.10 Đặc tính tần số của khâu quán tính bậc nhất

3.3.6 Khâu vi phân bậc nhất

Hàm truyền: $G(s) = Ts+1$

Đặc tính thời gian: $Y(s) = R(s).G(s) = R(s)(Ts+1)$

- Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{(Ts+1)}{s}\right] = T\delta(t)+1(t)$
- Hàm trọng lượng: $g(t) = h'(t) = T\delta'(t) + \delta(t)$ (3.4)

Hàm quá độ của khâu vi phân bậc nhất là tổ hợp tuyến tính của hàm xung đơn vị và hàm nấc đơn vị (hình 3.11). Ta thấy rằng khâu vi phân lý tưởng và vi phân bậc nhất có đặc điểm chung là giá trị hàm quá độ vô cùng lớn tại $t = 0$. Hàm trọng lượng là đạo hàm của hàm quá độ, chỉ có thể mô tả bằng biểu thức toán học (3.4), không biểu diễn bằng đồ thị được.

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = Tj\omega + 1$

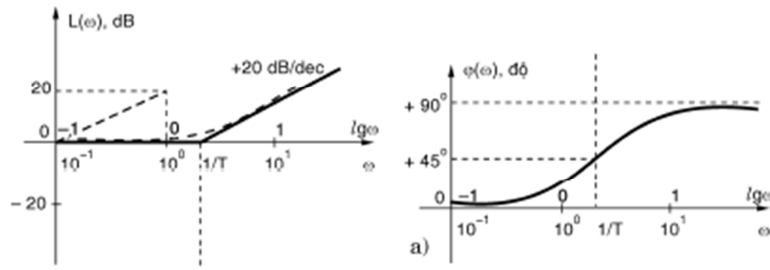
Phần thực: $P(\omega) = 1$

Phần ảo: $Q(\omega) = T\omega$

- Biên độ: $M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{1^2 + (T\omega)^2}$
 $\Rightarrow L(\omega) = 20\lg M(\omega) = 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$ (3.5)

- Pha: $\varphi(\omega) = \text{tg}^{-1}\left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right] = \text{tg}^{-1}(T\omega)$ (3.6)

So sánh biểu thức (3.5) và (3.54) với (3.2) và (3.3) ta rút ra được kết luận: Biểu đồ Bode của khâu vi phân bậc nhất và khâu quán tính bậc nhất đối xứng nhau qua trục hoành (h.3.11).



Hình 3.11 Biểu đồ Bode khâu quán tính bậc 1

3.3.7 Khâu dao động bậc 2

Hàm truyền: $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (0 < \xi < 1)$

Hay $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\omega_n = \frac{1}{T})$

Đặc tính thời gian:

$$Y(s) = R(s).G(s) = \frac{R(s)\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

➤ **Hàm trọng lượng** $g(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right]$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin[(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t] \quad (3.7)$$

➤ **Hàm quá độ** $h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right\}$

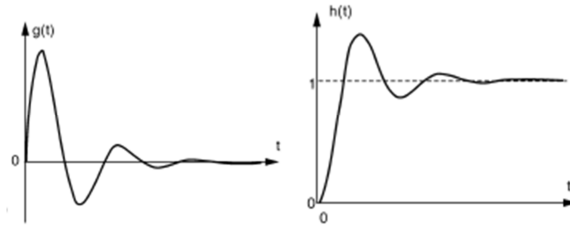
$$\Rightarrow h(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin[(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t + \theta] \quad (3.8)$$

Trong đó độ lệch pha φ xác định bởi $\theta = \cos^{-1}\xi$. Biểu thức (3.7) và (3.8) cho thấy đặc tính thời gian của khâu dao động bậc hai có dạng dao động suy giảm, hàm trọng lượng là dao động suy giảm về 0, hàm quá độ là dao động suy giảm đến giá trị xác lập là 1

(hình 3.12).

- Nếu $\xi = 0$: $h(t) = 1 - \sin(\omega_n t + 90^\circ)$, đáp ứng của hệ là dao động không suy giảm với tần số ω_n , do đó ω_n gọi là tần số dao động tự nhiên của khâu dao động bậc hai.

- Nếu $0 < \xi < 1$: đáp ứng của hệ là dao động với biên độ giảm dần, ξ càng lớn dao động suy giảm càng nhanh, do đó ξ gọi là hệ số tắt (hay hệ số suy giảm).



Hình 3.12: Đặc tính thời gian của khâu dao động bậc hai

a) Hàm trọng lượng b) Hàm quá độ

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \frac{1}{-T^2\omega^2 + 2\xi Tj\omega + 1}$

➤ Biên độ: $M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$

$\Rightarrow L(\omega) = 20\lg M(\omega) = -20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \quad (3.9)$

➤ Pha: $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\text{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} \right) \quad (3.10)$

❖ Biểu thức (3.9) cho thấy biểu đồ Bode biên độ của khâu dao động bậc hai là một đường cong. Tương tự như đã làm đối với khâu quán tính bậc nhất, ta có thể vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận như sau:

Nếu $\omega < 1/T$ $\omega T < 1$ thì $L(\omega) = -20\lg \sqrt{1} = 0$, do đó ta có thể vẽ gần đúng bằng đường thẳng nằm trên trục hoành (độ dốc bằng 0).

Nếu $\omega > 1/T$ $\omega T > 1$ thì $L(\omega) = -20\lg \sqrt{(-\omega^2 T^2)^2} = -40\lg \omega T$, do đó ta vẽ gần đúng bằng đường thẳng có độ dốc -40dB/dec .

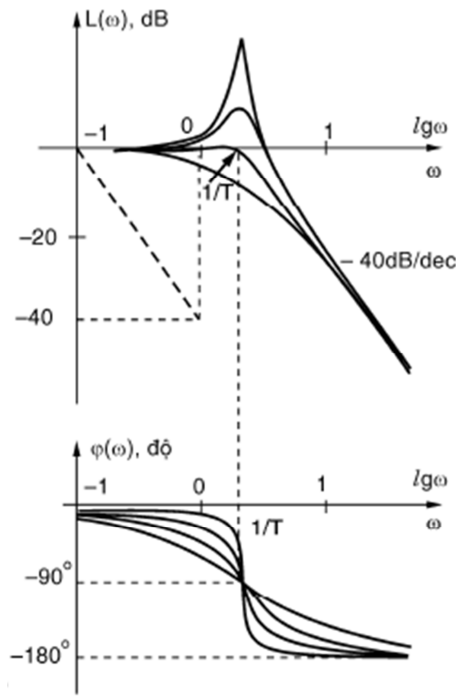
Ta thấy rằng tại tần số $1/T$ độ dốc của các đường tiệm cận thay đổi nên tần số $1/T$ gọi là tần số gãy của khâu dao động bậc hai. Biểu đồ Bode về pha của khâu dao động bậc hai là một đường cong, để ý biểu thức (3.10) ta thấy biểu đồ Bode về pha có điểm đặc biệt sau đây:

$\omega \rightarrow 0 : \varphi(\omega) \rightarrow 0$

$\omega \rightarrow 1/T : \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$

$\omega \rightarrow \infty : \varphi(\omega) \rightarrow -180^\circ$

Hình 3.13 minh họa biểu đồ Bode của khâu dao động bậc hai. Các đường cong ở biểu đồ Bode biên độ chính là đường $L(\omega)$ vẽ chính xác. Biểu đồ Bode biên độ chính xác có đỉnh cộng hưởng $M_p = 1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$ tại tần số $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$, do đó dễ thấy rằng nếu ξ càng nhỏ thì đỉnh cộng hưởng càng cao. Khi $\xi \rightarrow 0$ thì tần số cộng hưởng tiến đến tần số dao động tự nhiên $\omega_p \rightarrow \omega_n = 1/T$



Hình 3.13 Đặc tính tần số của khâu dao động bậc hai

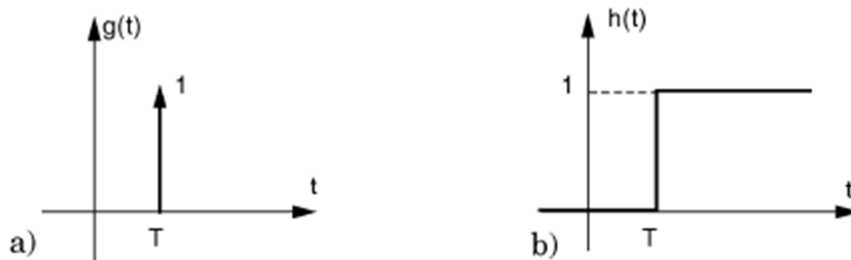
3.3.8 Khâu trì hoãn (khâu trễ)

Hàm truyền: $G(s) = e^{-Ts}$

Đặc tính thời gian: $Y(s) = R(s).G(s) = R(s)e^{-Ts}$

- Hàm trọng lượng: $g(t) = L^{-1}[e^{-Ts}] = \delta(t-T)$
- Hàm quá độ: $h(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-Ts}}{s}\right] = 1(t-T)$

Đặc điểm của khâu trễ là tín hiệu ra trễ hơn tín hiệu vào một khoảng thời gian là T .



Hình 3.14 Đặc tính thời gian của khâu trễ

a) Hàm trọng lượng b) Hàm quá độ

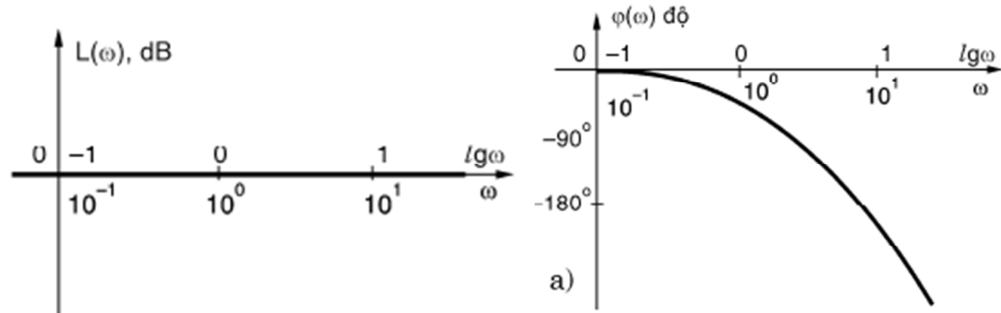
Đặc tính tần số: $G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$

- Biên độ: $M(\omega) = |G(j\omega)| = 1$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20\lg M(\omega) = -20\lg 1 = 0$$

- Pha: $\varphi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sin(T\omega)}{\cos(T\omega)}\right) = -\tan^{-1}(\text{tg}(T\omega)) = -T\omega \quad (3.11)$

Biểu đồ Bode biên độ của khâu trì hoãn là đường thẳng nằm ngang trùng với trục hoành do $L(\omega) = 0$ với mọi ω . Để ý rằng biểu thức (3.11) là phương trình của một đường thẳng nếu trục hoành ω chia theo thang tuyến tính. Tuy nhiên do trục hoành của biểu đồ Bode lại chia theo thang logarith nên biểu đồ Bode về pha của khâu trì hoãn là đường cong dạng hàm mũ, xem hình 3.16a.



Hình 3.15 Đặc tính tần số của khâu trì hoãn

Đặc tính tần số của hệ thống

Xét hệ thống tự động có hàm truyền $G(s)$. Giả sử $G(s)$ có thể phân tích thành tích của các hàm truyền cơ bản như sau:

$$G(s) = \prod_{i=1}^l G_i(s)$$

Đặc tính tần số của hệ thống là: $G(j\omega) = \prod_{i=1}^l G_i(j\omega)$

Biên độ:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \prod_{i=1}^l G_i(j\omega) \right| = \prod_{i=1}^l |G_i(j\omega)|$$

$$\Rightarrow M(\omega) = \prod_{i=1}^l M_i(\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \lg M(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^l M_i(\omega) = 20 \sum_{i=1}^l \lg M_i(\omega)$$

$$\Rightarrow L(\omega) = \sum_{i=1}^l L_i(\omega) \quad (3.12)$$

Biểu thức (3.12) cho thấy biểu đồ Bode biên độ của hệ thống bằng tổng các biểu đồ Bode biên độ của các khâu cơ bản thành phần.

Pha: $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arg \left[\prod_{i=1}^l G_i(j\omega) \right] = \sum_{i=1}^l \angle G_i(j\omega)$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\omega) \quad (3.13)$$

Biểu thức (3.13) chứng tỏ biểu đồ Bode pha của hệ thống bằng tổng các biểu đồ Bode pha của các khâu cơ bản thành phần. Từ hai nhận xét trên ta thấy rằng để vẽ được biểu đồ Bode của hệ thống, ta vẽ biểu đồ Bode của các khâu thành phần, sau đó cộng đồ thị lại. Dựa trên nguyên tắc cộng đồ thị, ta có phương pháp vẽ biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống bằng các đường tiệm cận như sau:

TÓM TẮT

Chương này trình bày khái niệm đặc tính động học của hệ thống tự động, bao gồm đặc tính thời gian và đặc tính tần số. Đặc tính động học của các khâu cơ bản được khảo sát và cách xây dựng đặc tính động học của hệ thống đã được đề cập đến. Kỹ sư điều khiển phải nắm vững đặc tính động học của các khâu cơ bản và cách xây dựng đặc tính động học của hệ thống mới có thể giải quyết tốt bài toán thiết kế hệ thống tự động sẽ trình bày trong các chương sau.

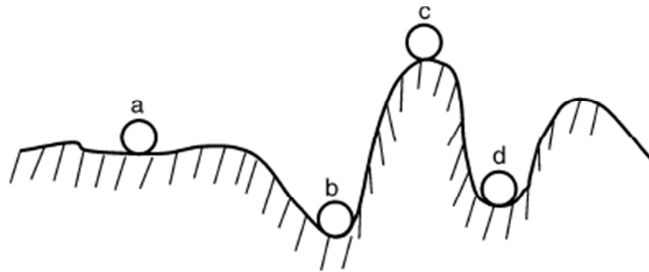
CHƯƠNG 4

KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

4.1. Khái niệm chung

Hệ thống được gọi là ở trạng thái ổn định, nếu với tín hiệu vào bị chặn thì đáp ứng của hệ cũng bị chặn (Bounded Input Bounded Output = BIBO). Yêu cầu đầu tiên đối với một hệ thống ĐKTD là hệ thống phải giữ được trạng thái ổn định khi chịu tác động của tín hiệu vào và chịu ảnh hưởng của nhiễu lên hệ thống. Hệ phi tuyến có thể ổn định trong phạm vi hẹp khi độ lệch ban đầu là nhỏ và không ổn định trong phạm vi rộng nếu độ lệch ban đầu là lớn.

Đối với hệ tuyến tính đặc tính của quá trình quá độ không phụ thuộc vào giá trị tác động kích thích. Tính ổn định của hệ tuyến tính không phụ thuộc vào thể loại và giá trị của tín hiệu vào và trong hệ tuyến tính chỉ tồn tại một trạng thái cân bằng. Phân biệt ba trạng thái cân bằng: Biên giới ổn định, ổn định và không ổn định. Trên hình 4.1 nếu thay đổi nhỏ trạng thái cân bằng của quả cầu, chẳng hạn cho nó một vận tốc ban đầu đủ bé thì quả cầu sẽ tiến tới một trạng thái cân bằng mới (Hình 4.1a), hoặc sẽ dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 4.1b và d), hoặc sẽ không trở về trạng thái ban đầu (Hình 4.1c). Trong trường hợp đầu, ta có vị trí cân bằng ở biên giới ổn định, trường hợp sau là ổn định và trường hợp thứ ba là không ổn định. Cũng ở vị trí b và d trên hình 4.1, nếu quả cầu với độ lệch ban đầu là lớn thì cũng sẽ không trở về trạng thái cân bằng ban đầu được - Hai trạng thái b và d của quả cầu chỉ ổn định trong phạm vi hẹp mà không ổn định trong phạm vi rộng.



Hình 4.1 Trạng thái ổn định của hệ thống

Trong trường hợp này việc khảo sát tính ổn định được giới hạn cho các hệ tuyến tính bất biến theo thời gian. Đó là những hệ thống được mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng và có thể áp dụng được nguyên lý xếp chồng.

-Khảo sát một hệ thống điều khiển tự động được mô tả toán học dưới dạng hàm truyền:

$$G(s) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (4.1)$$

Phương trình vi phân tương ứng của hệ thống là:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (4.2)$$

Nghiệm của phương trình vi phân 4.2 có dạng tổng quát như sau:

$$Y(t) = y_0(t) + y_{qd}(t) \quad (4.3)$$

Trong đó:

- $y_0(t)$ là nghiệm riêng của phương trình 4.2 có về phải, đặc trưng cho quá trình xác lập
- $y_{qd}(t)$ là nghiệm tổng quát của 4.2, đặc trưng cho quá trình quá độ

Tính ổn định của hệ thống chỉ phụ thuộc vào quá trình quá độ, còn quá trình xác lập là một quá trình ổn định.

Định nghĩa

- a) Một hệ thống ĐKTD ổn định nếu quá trình quá độ tắt dần theo thời gian

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd}(t) = 0$$

- b) Một hệ thống ĐKTD không ổn định nếu quá trình quá độ tăng dần theo thời gian

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd}(t) = \infty$$

- c) Một hệ thống ĐKTD ở biên giới ổn định nếu quá trình quá độ không thay đổi hay dao động không tắt dần

Xét nghiệm $y_{qd}(t)$ trong 4.3 dạng tổng quát của nghiệm quá độ như sau:

$$y_{qd}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n y_{qd,i}$$

Với n là bậc và p_i là nghiệm của phương trình đặc tính

$$N(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

C_i là các hằng số (tính theo các điều kiện đầu)

Khảo sát các trường hợp nghiệm p_i

+ p_i là nghiệm thực

$$p_i = \alpha_i \Rightarrow y_{qd,i} = C_i e^{\alpha_i t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{qd,i} = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{\alpha_i t} = \begin{cases} 0, & \alpha_i < 0 \\ C_i, & \alpha_i = 0 \\ \infty, & \alpha_i > 0 \end{cases}$$

+ p_i là cặp nghiệm phức liên hợp

$$P_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i \Rightarrow y_{qd,i} + y_{qd,i+1} = 2A_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \varphi_i)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_{qd,i} + y_{qd,i+1}) = \begin{cases} 0, \alpha_i < 0 \\ \text{dao động}, \alpha_i = 0 \\ \infty, \alpha_i > 0 \end{cases}$$

Kết luận

1) Hệ thống điều khiển tự động ổn định nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực âm

2) Hệ thống điều khiển tự động không ổn định nếu có ít nhất một nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực dương

3) Hệ thống điều khiển tự động ở biên giới ổn định nếu có ít nhất một nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực bằng 0, các nghiệm còn lại ở phần thực âm

4.2. Tiêu chuẩn ổn định đại số

Điều kiện cần để hệ thống ổn định

Xét một hệ thống điều khiển tự động có phương trình đặc tính tổng quát như sau:

$$N(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Phát biểu:

- Điều kiện cần để một hệ thống ĐKTD tuyến tính ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc tính dương

4.2.1 Tiêu chuẩn Routh

a. Cách thành lập bảng Routh

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}		a_0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}		(a_0)
p^{n-2}	$c_{n-2,1}$	$c_{n-2,2}$			
.....					
p^2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$			
p^1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$			
p^0	$c_{0,1}$				

Với:

$$C_{n-2,1} = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; C_{n-2,2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$C_{0,1} = -\frac{\begin{vmatrix} c_{2,1} & a_{n-2} \\ c_{1,1} & c_{2,3} \end{vmatrix}}{c_{1,1}}$$

b. Quy tắc:

Mỗi số hạng trong bảng Routh là một tỉ số, trong đó:

- Tử số là định thức bậc 2, mang dấu âm. Cột thứ nhất của định thức là cột thứ nhất của 2 hàng đứng sát bên hàng có số hạng đang tính; cột thứ hai của định thức là cột đứng sát bên phải số hạng đang tính cũng của 2 hàng trên

- Mẫu số: Tất cả các số hạng trên cùng một hàng có cùng mẫu số là số hạng ở cột thứ nhất của hàng sát trên có số hạng đang tính.

c. Phát biểu tiêu chuẩn Routh

Điều kiện cần và đủ để hệ thống tuyến tính ổn định là tất cả các số hạng trong cột thứ nhất của bảng Routh phải dương

d. Các tính chất của bảng Routh

- Có thể nhân hoặc chia tất cả các số hạng trên cùng một hàng của Routh với một số dương.

- Số lần đổi dấu của các số hạng trong cột thứ nhất của hàng Routh bằng số nghiệm của phương trình đặc tính có phần thực dương.

- Nếu trong cột thứ nhất của bảng Routh có một số hạng bằng 0 thì hệ thống cũng không ổn định. Để xác định số nghiệm âm, có thể thay số 0 bằng số $\varepsilon > 0$ rất bé để tiếp tục xác định các số hạng còn lại.

- Nếu tất cả các số hạng trên cùng 1 hàng của bảng Routh bằng 0 thì hệ thống ở biên giới ổn định.

- Trường hợp hệ thống có khâu trễ, có thể triển khai Fourier hàm mũ như sau:

$$e^{-p\tau} = 1 + \frac{(-p\tau)}{1!} + \frac{(-p\tau)^2}{2!} + \dots$$

Ví dụ 4.1: Cho phương trình đặc tính của hệ thống :

$$s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3 = 0$$

Lập bảng Routh:

1	8	3
2	4	0
6	3	
3	0	
3		

Hệ thống ổn định vì tất cả các số hạng trong cột thứ nhất dương

Trường hợp 1: Số 0 ở cột thứ nhất

Nếu có số 0 ở cột thứ nhất thì việc tạo ra hàng tiếp theo sẽ chia cho số 0. Để tránh trường hợp này ta gán một giá trị ϵ để thay thế số 0. Sau đó dùng ϵ để tính toán và xét dấu cho $\epsilon (\pm \epsilon)$.

Ví dụ 4.2: Xác định tính ổn định của hàm truyền hệ kín sau:

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Lập bảng Routh và xét dấu

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$0 = \epsilon$	$7/2$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{-6\epsilon^2 + 42\epsilon - 42\epsilon}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Nhìn bảng xét dấu cả trong hai trường hợp thì ở cột thứ nhất đổi dấu hai lần có nghĩa là phương trình đặc tính có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo. Do vậy hệ thống trên là không ổn định.

Trường hợp 2: Có một hàng toàn số không

Khi gặp trường hợp này ta đầu tiên ta quay lại hàng phía trên hàng có toàn số 0 và thành lập một đa thức phụ mà sử dụng các giá trị của hàng đó làm hệ số. Đa thức bắt đầu với lũy thừa của s ở cột kí hiệu s và bỏ biến tiếp theo và thực hiện hạ bậc đa thức phụ.

Ví dụ 4.3: Xác định số nghiệm nằm bên phải trục ảo của hệ kín sau:

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

Lập bảng Routh

s^5	1	6	8
s^4	7	42	56
s^3	1	3	0
s^2	3	8	0
s^1	1/3	0	0
s^0	8	0	0

Đa thức phụ: $P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$

Lấy vi phân đa thức phụ:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0 \quad (4.4)$$

Sử dụng các hệ số trong đa thức (4.4) để thay thế hàng có toàn số 0. Sau khi thay và tính toán ta thấy cột đầu tiên các hệ số đều dương do vậy không có điểm cực nào nằm bên phải trục ảo.

4.2.2 Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz

a/ Phát biểu

Điều kiện cần và đủ để hệ thống tuyến tính ổn định là các hệ số a_n và các định thức Hurwitz dương.

b/ Cách thành lập định thức Hurwitz

Định thức Hurwitz lập từ ma trận hệ số theo quy tắc sau:

- Theo đường chéo của ma trận, viết các hệ số từ a_1 đến a_n .
- Phía trên đường chéo, các hệ số tăng dần, phía dưới giảm dần.
- Các hệ số nhỏ hơn a_0 và lớn hơn a_n đều bằng 0.

Ma trận có dạng như sau:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \dots & \Delta_n \\ \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array} \right| \end{array}$$

Các định thức Hurwitz tương ứng với :

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_3^2 a_0 + a_5 a_1 a_0 > 0$$

.....

$$\Delta_{n-1} > 0$$

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0$$

Lưu ý: Khi khảo sát tính ổn định với $a_0 > 0$, nếu có hệ số bất kỳ nào âm ($a_i < 0$) thì đủ để kết luận là hệ không ổn định.

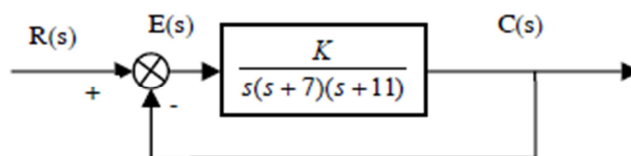
Với điều kiện $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) thì chỉ cần xét $\Delta_i > 0$ với $i = 2, \dots, n-1$ là được, vì $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$

- Tiêu chuẩn ổn định Hurwitz chỉ là một dạng biểu diễn khác của tiêu chuẩn Routh. Nó chỉ dùng với hệ thống có phương trình đặc tính bậc thấp (dưới bậc 4).

4.3 Sử dụng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz để thiết kế sự ổn định

Ví dụ 4.5

Cho hệ thống sau



Với hệ số khuếch đại chưa biết, tìm phạm vi của hệ số khuếch đại K để hệ thống ổn định, không ổn định và ở biên giới ổn định

Giải:

Hàm truyền của hệ kín là :

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

Thành lập bảng Routh

S^3	1	77
S^2	18	K
S^1	$\frac{1386-K}{18}$	
S^0	K	

Giả thiết $K > 0$. Các phần tử trong cột đầu tiên đều dương ngoại trừ ở hàng s^1 . Giá trị có thể dương, âm hay bằng không tùy thuộc vào giá trị của K.

Nếu $K < 1386$ thì tất cả các phần tử của cột đầu tiên đều dương, không có sự đổi dấu do vậy các điểm cực nằm bên trái trục ảo. Vậy hệ thống ổn định với $K < 1386$.

Nếu $K > 1386$ thì phần tử ở hàng s^1 âm và trong cột đầu tiên có sự đổi dấu hai lần do vậy có hai nghiệm nằm bên phải trục ảo và một nghiệm nằm bên trái trục ảo. Điều này có nghĩa là hệ thống không ổn định khi $K > 1386$.

Nếu $K = 1386$ thì sẽ xuất hiện số 0 ở hàng s^1 quay lại hàng s^2 và thay $K = 1386$.

Sau đó lập đa thức phụ

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

Lấy vi phân

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0 \quad (4.5)$$

Thay các hệ số trong đa thức (4.5) vào bảng Routh

S^3	1	77
S^2	18	1386
S^1	36	
S^0	1386	

Nhận xét:

- Các phần tử trong cột thứ nhất đều dương và không có sự đổi dấu.
- Đa thức có bậc chẵn (s^2) có hai nghiệm nằm trên trục ảo và nghiệm còn lại nằm bên trái trục ảo.
- Do vậy hệ thống ở biên giới ổn định khi $K = 1386$.

4.4 Tiêu chuẩn ổn định tần số

Tiêu chuẩn ổn định tần số dựa trên các biểu đồ đặc tính tần số để xét tính ổn định của hệ thống.

4.4.1 Nguyên lý góc quay

Xét phương trình đặc tính bậc n có các nghiệm s_i ($i=1,2,\dots,n$) :

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

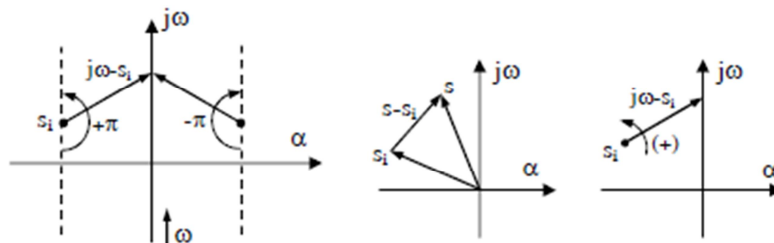
Đa thức đặc tính $A(s)$ ở vế trái có thể viết dưới dạng:

$$A(s) = a_n (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)$$

Thay $s=j\omega$ ta được đa thức đặc tính tần số:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n)$$

Mỗi số phức có thể biểu diễn trên mặt phẳng phức bằng một điểm hoặc một vectơ. Ví dụ nghiệm $s_i = a_i + j\omega_i$ có thể biểu diễn bằng điểm s_i có tọa độ $(a_i, j\omega_i)$ hoặc vectơ s_i có gốc trùng với gốc tọa độ, thành phần $(j\omega - s_i)$ biểu diễn bằng vectơ có gốc ở điểm s_i và ngọn nằm trên trục ảo (xem hình 4.2). Khi ω thay đổi, độ dài và góc của vectơ $(j\omega - s_i)$ cũng thay đổi theo. Nếu quy ước chiều quay dương là chiều ngược kim đồng hồ thì khi ω thay đổi từ $-\infty$ đến $+\infty$, mỗi vectơ thành phần $(j\omega - s_i)$ sẽ quay một góc là $+\pi$ nếu nghiệm tương ứng nằm bên trái trục ảo, là $-\pi$ nếu nghiệm tương ứng nằm bên phải trục ảo, là 0 nếu nghiệm tương ứng nằm trên trục ảo.



Hình 4.2 Biểu diễn số phức trên mặt phẳng phức

Dùng ký hiệu Darg để chỉ góc quay, ta có :

$$\Delta \arg (j\omega - s_i) = \begin{cases} +\pi & \text{nếu } s_i \text{ nằm bên trái trục ảo} \\ -\pi & \text{nếu } s_i \text{ nằm bên phải trục ảo} \\ 0 & \text{nếu } s_i \text{ nằm trên trục ảo} \end{cases}$$

Giả sử phương trình đặc tính có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và (n-m) nghiệm nằm bên trái trục ảo. Khi đó :

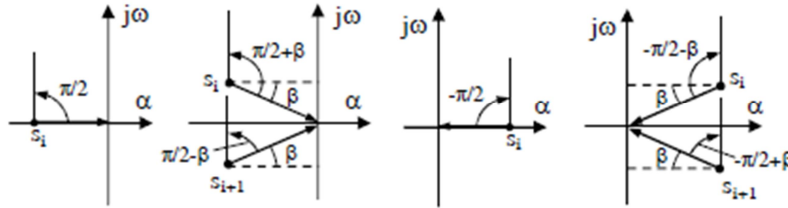
$$\sum_{i=1}^m \Delta \arg (j\omega - s_i) = -m\pi, \text{ với } -\infty < \omega < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \Delta \arg (j\omega - s_i) = (n-m)\pi, \text{ với } -\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg A(j\omega - s_i) = \sum_{i=1}^{n-m} \Delta \arg (j\omega - s_i) + \sum_{i=1}^m \Delta \arg (j\omega - s_i) = (n-2m)\pi$$

Trong thực tế ta chỉ cần xét ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$. Theo hình (4.5) ta thấy:

- Nếu s_i là nghiệm thực nằm bên trái trục ảo thì $(j\omega - s_i)$ quay một góc $+p/2$
- Nếu s_i và s_{i+1} là cặp nghiệm phức liên hợp nằm bên trái trục ảo thì tổng hai góc quay của $(j\omega - s_i)$ và $(j\omega - s_{i+1})$ là $+2p/2$ vì :
 - Ứng với s_i ta có $(j\omega - s_i)$ quay một góc $p/2+b$
 - Ứng với s_{i+1} ta có $(j\omega - s_{i+1})$ quay một góc $p/2-b$
- Nếu s_i là nghiệm thực nằm bên phải trục ảo thì $(j\omega - s_i)$ quay một góc $-p/2$
- Nếu s_i và s_{i+1} là cặp nghiệm phức liên hợp nằm bên phải trục ảo thì tổng hai góc quay là $-2p/2$.



Hình 4.3. Góc quay của các vector khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$

Do đó nếu phương trình đặc tính có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và (n-m) nghiệm nằm bên trái trục ảo thì khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$:

$$\sum_{i=1}^m \Delta \arg (j\omega - s_i) = -m \frac{\pi}{2}, \text{ với } -\infty < \omega < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \Delta \arg (j\omega - s_i) = (n-m) \frac{\pi}{2}, \text{ với } -\infty < \omega < \infty$$

$$\Delta \arg A(j\omega - s_i) = \sum_{i=1}^{n-m} \Delta \arg (j\omega - s_i) + \sum_{i=1}^m \Delta \arg (j\omega - s_i) = (n-2m) \frac{\pi}{2}$$

4.4.2 Tiêu chuẩn Mikhailov

Phát biểu:

Điều kiện cần và đủ để hệ tuyến tính bậc n ổn định là đường đặc tính $A(j\omega)$ xuất phát từ trục thực dương và quay n góc phần tư (nói cách khác là bao góc tọa độ một góc bằng $n(p/2)$) theo chiều ngược kim đồng hồ khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$.

Chứng minh:

Xét hệ thống bậc n có phương trình đặc tính :

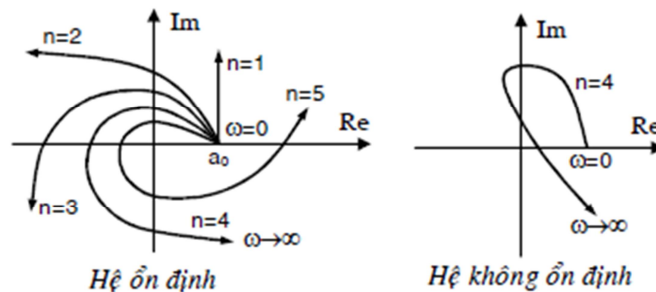
$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Đa thức đặc tính tần số:

$$A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0$$

Điều kiện cần để hệ ổn định là các hệ số của phương trình đặc tính phải dương. Do đó khi $\omega = 0$ thì $A(j\omega) = a_0 > 0$, tức là đường đặc tính $A(j\omega)$ phải xuất phát từ điểm $(a_0, j0)$ nằm ở nửa trục thực dương.

Hệ thống bậc n ổn định nếu tất cả n nghiệm đều nằm bên trái trục ảo. Theo nguyên lý góc quay ta có điều phải chứng minh: $\Delta \arg A(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$



Hình 4.4 Minh họa tiêu chuẩn Mikhailov.

Nhận xét:

- Tiêu chuẩn Mikhailov có thể dùng để xét ổn định cho cả hệ hở và hệ kín.
- Để xây dựng đường đặc tính $A(j\omega)$ ta thay $s = j\omega$ vào phương trình đặc tính rồi tách riêng phần thực và phần ảo:

$$A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = P(\omega) + jQ(\omega)$$

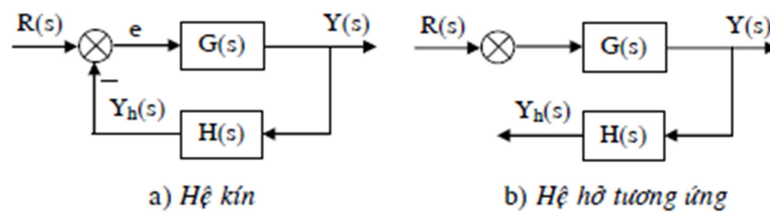
Sau đó cho ω biến thiên từ 0 đến $+\infty$, tính các giá trị $P(\omega)$ và $Q(\omega)$ tương ứng rồi thể hiện trên đồ thị.

Việc xây dựng đường đặc tính $A(j\omega)$ của các đa thức $A(s)$ có bậc cao là phức tạp hơn nhiều so với các tính toán đại số ở tiêu chuẩn Routh- Hurwitz. Chính vì hạn chế này mà tiêu chuẩn Mikhailov ít được dùng trong thực tế.

4.4.3 Tiêu chuẩn Nyquist

Tiêu chuẩn Nyquist xét tính ổn định của hệ thống kín thông qua biểu đồ Nyquist của hệ thống hở. Tiêu chuẩn này rất hữu dụng vì trong nhiều trường hợp thực tế việc tìm hàm truyền của hệ kín bằng giải tích rất phức tạp, trong khi đặc tính tần số hệ hở thì có thể xác định được từ thực nghiệm. Một ưu điểm khác là tiêu chuẩn Nyquist có thể áp dụng cho cả hệ thống có khâu trễ.

Xét hệ thống kín hồi tiếp âm như trên hình 4.5a. Nếu ngắt mạch phản hồi ở ngay trước bộ so ta có hệ hở (hay hệ vòng hở) như hình 4.5b.

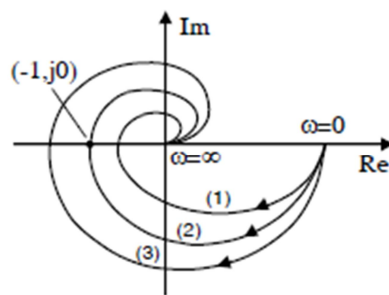


Hình 4.5 Hệ kín và hệ hở tương ứng

Phát biểu:

a) Hệ kín ổn định khi hệ hở ổn định và đường Nyquist của hệ hở không bao điểm $(-1, j_0)$.

b) Hệ kín ổn định khi hệ hở không ổn định và đường Nyquist của hệ hở bao điểm $(-1, j_0)$ một góc bằng $m\pi$ theo chiều ngược kim đồng hồ khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$; với m là số nghiệm có phần thực dương của phương trình đặc tính hệ hở. Điểm $(-1, j_0)$ gọi là điểm tới hạn, nếu đường Nyquist hệ hở đi qua điểm này thì hệ kín ở giới hạn ổn định



Hình 4.6 Minh họa tiêu chuẩn Nyquist cho ba trường hợp hệ hở ổn định và kết quả:

(1) Hệ kín ổn định

(2) Hệ kín ở giới hạn ổn định

(3) Hệ kín không ổn định

Chứng minh:

a) Khi hệ hở ổn định

Hàm truyền của hệ hở có thể biểu diễn dưới dạng :

$$G_h(s) = G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Trong đó $A(s)$ và $B(s)$ là các đa thức theo s . Để hệ thống tồn tại và khả thi trong thực tế thì bậc của $B(s)$ nhỏ hơn bậc của $A(s)$.

Hàm truyền của hệ kín :

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1+G_h(s)}$$

Phương trình đặc tính của hệ hở : $A(s) = 0$

Phương trình đặc tính của hệ kín :

$$1 + G_h(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{A_k(s)}{A(s)} = 0$$

Nghiệm của phương trình đặc tính hệ kín sẽ là nghiệm của:

$$A_k(s) = A(s) + B(s) = 0$$

Do bậc của $B(s)$ nhỏ hơn bậc của $A(s)$ nên nếu phương trình đặc tính hệ hở có bao nhiêu nghiệm thì phương trình đặc tính hệ kín cũng có bấy nhiêu nghiệm. Gọi s_i là nghiệm của phương trình đặc tính hệ hở và s'_i là nghiệm của phương trình đặc tính hệ kín với $i=1,2,\dots,n$. Ta được:

$$1 + G_h(s) = \frac{A_k(s)}{A(s)} = k \frac{(s-s'_1)(s-s'_2)\dots(s-s'_n)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \frac{\text{đa thức đặc tính hệ kín}}{\text{đa thức đặc tính hệ hở}}$$

Trong đó k là hằng số.

Thay $s = j\omega$ ta có dạng tần số:

$$1 + G_h(j\omega) = \frac{A_k(j\omega)}{A(j\omega)} = k \frac{(j\omega-s'_1)(j\omega-s'_2)\dots(s-s'_n)}{(j\omega-s_1)(j\omega-s_2)\dots(s-s_n)}$$

Từ biểu thức trên ta thấy vector $1+G(j\omega)$ đặc trưng cho mối quan hệ giữa hệ hở và hệ kín. Hàm $G(j\omega)$ là hàm truyền tần số của hệ hở. Đường cong $G(j\omega)$ chính là đường Nyquist của hệ hở. Vector $1+G(j\omega)$ nối từ điểm $(-1, j_0)$ tới đường cong $G(j\omega)$. Góc bao điểm $(-1, j_0)$ của đường $G(j\omega)$ cũng chính là góc quay của vector $1+G(j\omega)$. Khi hệ hở ổn định, phương trình đặc tính $A(s) = 0$ có n nghiệm đều ở bên trái trục ảo nên theo nguyên lý góc quay:

$$\Delta \arg A(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$$

Khi đó góc quay của vector $1+G(j\omega)$:

$$\Delta \arg[1 + G(j\omega)] = \Delta \arg A_k(j\omega) - \Delta \arg A(j\omega) = \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} = 0$$

Điều này đồng nghĩa với đường Nyquist $G(j\omega)$ của hệ hở phải không bao điểm $(-1, j_0)$.

b) Khi hệ hở không ổn định

Hệ hở không ổn định nên phương trình đặc tính hệ hở $A(s) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm bên phải trục ảo. Giả sử có m nghiệm nằm bên phải trục ảo và $(n-m)$ nghiệm nằm bên trái trục ảo. Theo nguyên lý góc quay ta có:

$$\Delta \arg A(j\omega) = -m \frac{\pi}{2} + (n-m) \frac{\pi}{2} = (n-2m) \frac{\pi}{2}$$

Hệ kín muốn ổn định thì:

$$\Delta \arg A_k(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$$

Khi đó góc quay của vector $1+G(j\omega)$:

$$\Delta \arg[1 + G(j\omega)] = \Delta \arg A_k(j\omega) - \Delta \arg A(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2} = n\pi$$

Điều này đồng nghĩa với đường Nyquist $G(j\omega)$ phải bao điểm $(-1, j_0)$ một góc đúng bằng $m\pi$ khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$.

Chú ý:

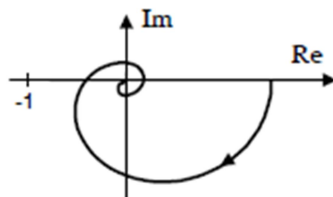
- Trước khi áp dụng tiêu chuẩn Nyquist phải xét xem hệ hở có ổn định hay không. Có thể giải phương trình đặc tính hệ hở hoặc áp dụng các tiêu chuẩn ổn định đại số để xét hệ hở.

- Đối với các hệ thống có khâu tích phân lý tưởng thì hệ hở có nghiệm cực bằng 0 (nằm trên trục ảo). Để áp dụng tiêu chuẩn Nyquist, ta vẽ thêm một cung tròn $-\gamma \frac{\pi}{2}$ có bán kính vô cùng lớn, với γ là số khâu tích phân lý tưởng trong hàm truyền hệ hở.

Ví dụ 4.6. Cho hệ hở có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{10}{(s+3)(s+1.24)^5}$$

Và biểu đồ Nyquist hệ hở như hình bên cạnh. Hãy dùng tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của hệ kín tương ứng.



Giải

Phương trình đặc tính hệ hở :

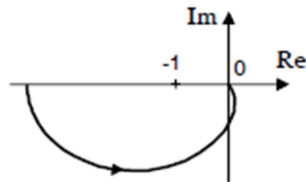
$$(s + 3)(s + 1, 24)^5 = 0$$

Phương trình có một nghiệm $s = -3$ và năm nghiệm $s = -1,24$. Các nghiệm này đều âm nên hệ hở ổn định. Hệ hở ổn định và đường Nyquist hệ hở không bao điểm $(-1; j_0)$ nên theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ kín tương ứng cũng ổn định.

Ví dụ 4.7: Cho hệ hở có hàm truyền:

$$G(s) = \frac{4}{(0,8s+1)(s-1)^3}$$

Và biểu đồ Nyquist hệ hở như hình bên cạnh. Hãy dùng tiêu chuẩn Nyquist để xét tính ổn định của hệ kín tương ứng.

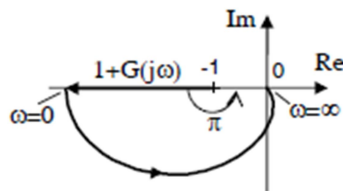


Giải

Phương trình đặc tính của hệ :

$$(0,8s + 1)(s + 1)^3 = 0$$

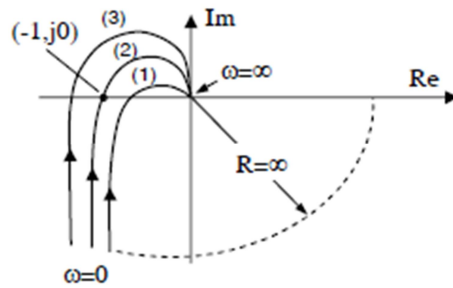
Phương trình này có : một nghiệm thực âm $s = -1,25$ và ba nghiệm thực dương $s = 1$ nên hệ hở không ổn định. Hệ hở không ổn định và đường Nyquist hệ hở bao điểm $(-1; j_0)$ một góc là $p (\neq 3\pi)$ theo chiều ngược kim đồng hồ khi ω thay đổi từ 0 đến ∞ nên theo tiêu chuẩn Nyquist, hệ kín tương ứng không ổn định.



Ví dụ 4.8. Xét tính ổn định của hệ hồi tiếp âm có hàm truyền của hệ hở là:

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

Với giá trị T_1, T_2 cố định, tùy theo giá trị của tham số K mà biểu đồ Nyquist hệ hở có thể có một trong ba dạng sau:



Trường hợp này hệ ở giới hạn ổn định (có 1 cực bằng 0, các cực còn lại là nghiệm thực âm). Tương ứng với khâu tích phân, ta vẽ thêm cung tròn 90° bán kính vô cùng lớn rồi áp dụng tiêu chuẩn Nyquist tương tự trường hợp hệ ở ổn định.

- Trường hợp (1): K nhỏ, $G(j\omega)$ không bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ổn định.
- Trường hợp (2): $K=K_{gh}$, $G(j\omega)$ đi qua điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín ở giới hạn ổn định.
- Trường hợp (3): K lớn, $G(j\omega)$ bao điểm $(-1, j0) \Rightarrow$ hệ kín không ổn định.

4.4.4 Độ dự trữ ổn định

Trong thực tế hệ thống không những cần phải ổn định mà còn phải đạt mức độ ổn định cần thiết. Để đánh giá mức độ ổn định của hệ thống người ta đưa ra khái niệm độ dự trữ biên độ và độ dự trữ pha.

- Tần số tại đó biên độ $A(\omega)=1$, tức $L(\omega)=0$ dB gọi là tần số cắt biên ω_c
- Tần số tại đó góc pha $\varphi(\omega)=-\pi=-180^\circ$ gọi là tần số cắt pha $\omega_{-\pi}$
- Độ dự trữ biên độ GM (Gain Margin) đặc trưng cho mức độ tiếp cận giới hạn ổn định về phương diện biên độ.

$$GM = \frac{1}{A(\omega_{-\pi})} \text{ (không đơn vị)} \quad \rightarrow \text{ dùng với biểu đồ Nyquist}$$

Hay $GM = -L(\omega_{-\pi})$ (đơn vị là dB) $\rightarrow$ dùng với biểu đồ Bode

Nhận xét: Khi $A(\omega_{-\pi})$ tăng thì GM giảm. Giá trị $GM=1$ (không đơn vị) hoặc 0 (đơn vị dB) đặc trưng cho giới hạn ổn định. Biên độ $A(\omega)$ chính là tỉ số giữa biên độ của tín hiệu ra và tín hiệu vào sin, do đó độ dự trữ biên độ cũng biểu thị mức cho phép tăng hệ số khuếch đại K mà vẫn giữ được hệ thống ổn định.

- Độ dự trữ pha PM (Phase Margin) đặc trưng cho mức độ tiếp cận giới hạn ổn định về phương diện góc pha.

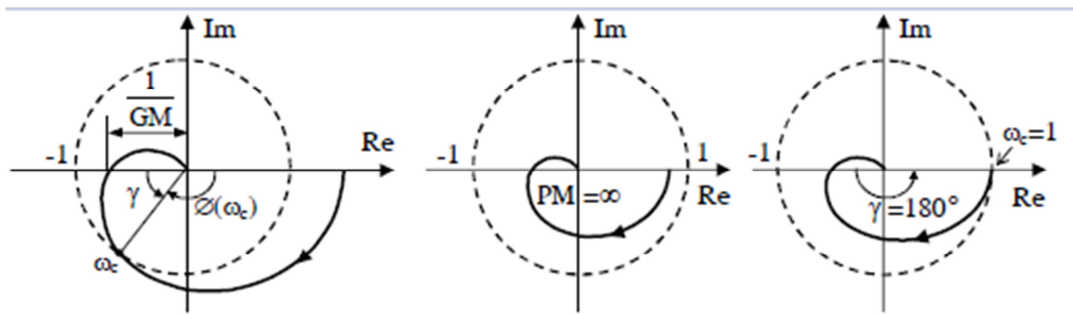
$$PM = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

Độ dự trữ ổn định biên độ và pha có thể xác định từ biểu đồ Nyquist hay biểu đồ Bode.

Dựa vào biểu đồ Nyquist:

Từ giao điểm giữa đường Nyquist và trục thực âm ta xác định được biên độ

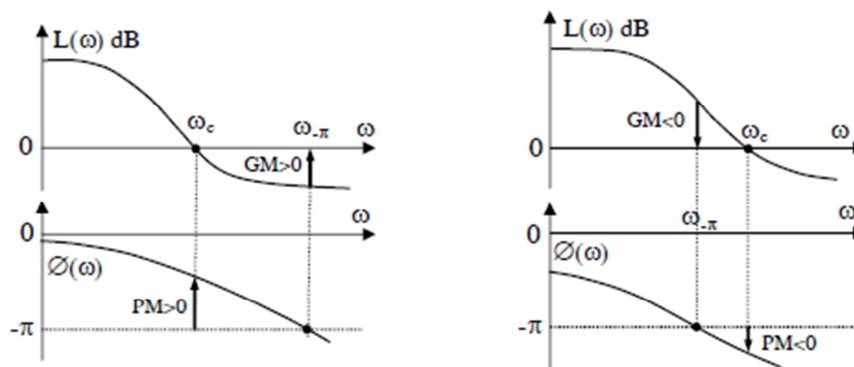
$A(\omega-p) = 1/GM$. Từ giao điểm giữa đường Nyquist và đường tròn đơn vị ta xác định được góc $\gamma = PM$. Nếu đường Nyquist hoàn toàn nằm bên trong đường tròn đơn vị thì $PM = \infty$.



Hình 4.7 xác định độ dự trữ biên và pha từ biểu đồ Nyquist

Dựa vào biểu đồ Bode:

Độ dự trữ biên GM tính từ đường $L(\omega)$ đến trục ω . Độ dự trữ pha PM tính từ đường thẳng $-p$ ($=-180^\circ$) đến đường cong $\angle(\omega)$.



Hình 4.8 xác định độ dự trữ biên và pha trên biểu đồ Bode

Sau khi xác định được độ dự trữ biên độ GM và độ dự trữ pha PM của hệ hở ta có thể xét ổn định hệ kín như sau:

Hệ kín ổn định nếu hệ hở có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha đều dương. (Hệ kín ổn định hệ hở có $GM > 0$ dB và $PM > 0^\circ$)

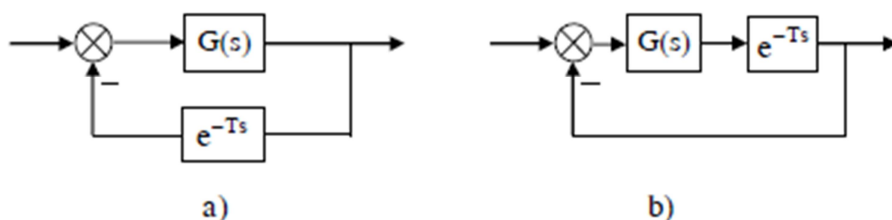
Trong thực tế, để đảm bảo hệ thống hoạt động ổn định thì :

Độ dự trữ biên $GM = 10, 15$ dB

Độ dự trữ pha $PM = 30, 60^\circ$

4.4.5 Ổn định của hệ thống có khâu trễ

Xét các hệ thống có khâu trễ như hình vẽ :



Hình 4.9 sơ đồ khối của khâu trễ

Hàm truyền hệ hở trong cả hai trường hợp a) và b):

$$G_{ka}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)e^{-Ts}} ; \quad G_{kb}(s) = \frac{G(s)e^{-Ts}}{1+G(s)e^{-Ts}}$$

Phương trình đặc tính hệ kín trong cả hai trường hợp:

$$1+G(s)e^{-Ts} = 0$$

Khai triển Taylor: $e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2!} - \frac{T^3 s^3}{3!} + \dots$

Nếu dùng tiêu chuẩn ổn định đại số cho hệ thống có khâu trễ thì ta phải thay gần đúng e^{-Ts} bằng tổng hữu hạn (ví dụ thay $e^{-Ts} = 1 - Ts$), như vậy việc tính toán phức tạp mà kết quả xét ổn định có thể không chính xác. Để tiện lợi hơn, người ta thường dùng tiêu chuẩn Nyquist.

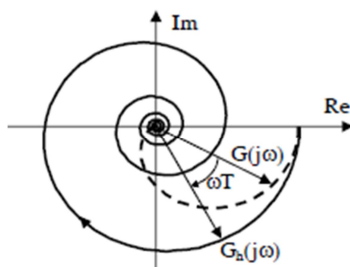
Hàm truyền tần số hệ hở :

$$G_h(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega T} = A(\omega)e^{j\omega} e^{-j\omega T}$$

Biên độ: $A_h(\omega) = A(\omega) = |G(j\omega)|$

Góc pha: $\phi_h(\omega) = \phi(\omega) - \omega T$

Như vậy, khâu trễ không ảnh hưởng tới biên độ mà chỉ tạo thêm góc lệch pha $-\omega T$. Dựa vào biểu đồ Nyquist của phần không trễ ta có thể xây dựng được biểu đồ Nyquist của hệ thống có trễ. Để làm điều đó ta chỉ việc quay vector $G(j\omega_i)$ đi một góc $\omega_i T$ theo chiều kim đồng hồ. Lấy nhiều điểm ω_i ta sẽ vẽ được toàn bộ đường $G_h(j\omega)$. Khi tần số tăng lên thì góc $\omega_i T$ cũng tăng trong khi biên độ ở tần số cao lại giảm về 0 nên biểu đồ Nyquist có dạng đường xoắn ốc.



Hình 4.10 Khâu trễ biểu diễn dưới dạng biểu đồ Nyquist

Từ biểu đồ ta thấy khi có thêm khâu chậm trễ thì độ dự trữ ổn định của hệ thống sẽ giảm đi.

Ví dụ 4.9. Cho hàm truyền của hệ hở là:

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{T_1s+1}$$

Hãy tìm giá trị T giới hạn để hệ kín hồi tiếp âm luôn ổn định.

Giải.

Xét trường hợp giới hạn ổn định, đường Nyquist đi qua điểm $(-1, j_0)$, khi đó tần số giới hạn $\omega_{gh} = \omega_c = \omega_p$. Tức là tại tần số giới hạn ω_{gh} thì biên độ $A(\omega)=1$ và góc pha

$$\phi(\omega) = -\pi$$

Biên độ $A(\omega)$ không bị ảnh hưởng bởi khâu trễ. Do đó:

$$A(\omega_{gh}) = |G(j\omega_{gh})| = \left| \frac{K}{T_1j\omega_{gh}+1} \right| = \frac{K}{\sqrt{T_1^2\omega_{gh}^2+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_{gh} = \frac{\sqrt{K^2-1}}{T_1}, \quad K > 1$$

Góc pha của hệ thống khi chưa có khâu trễ e^{-Ts}

$$\phi(\omega_{gh}) = -\arctg(T_1\omega_{GH}) = -\arctg\sqrt{K^2-1}$$

Góc pha của hệ thống bao gồm cả khâu trễ:

$$\phi(\omega_{gh}) = \phi(\omega_{gh}) - T_{gh}\omega_{gh} = -\arctg\sqrt{K^2-1} - T_{gh}\omega_{kgh} = -\pi$$

Suy ra giá trị giới hạn của thời gian trễ T :

$$T_{gh} = \frac{\pi - \arctg\sqrt{K^2-1}}{\omega_{gh}} = \frac{T_1}{\sqrt{K^2-1}} (\pi - \arctg\sqrt{K^2-1})$$

Để hệ kín luôn ổn định thì: $T \leq T_{gh}$

4.5 Bài tập

1. xét tính ổn định của hệ có PTĐT như sau

a, $2s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s^1 + 1 = 0$

b, $3s^4 + 7s^3 - 3s^2 + 2s + 1$

c, $2s^4 + 8s^3 + 2s^2 + 4s + 1 = 0$

d, $5s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$

2 Xác định tính ổn định của hệ thống bằng tiêu chuẩn Hurwitz có phương trình đặc trưng sau

a, $s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s^1 + 1 = 0$

b, $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2 + k}$

CHƯƠNG 5

PHÂN TÍCH HỆ THỐNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BIỂU ĐỒ BODE

5.1 Phương pháp vẽ biểu đồ Bode biên độ bằng các đường tiệm cận

5.1.1 Một số đặc tính của biểu đồ bode

- Biểu đồ Bode là phương pháp biểu diễn ĐTTS của hệ thống dưới dạng biên độ và pha

- Biểu đồ Bode biểu diễn ĐTTS của hệ thống một cách gần đúng

- Vẽ biểu đồ Bode là vẽ các khâu cơ bản trong hệ thống

Tần số cắt: Là tần số mà tại đó biên độ của ĐTTS bằng 1 hay

$$M(\omega_c) = |G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow L(\omega_c) = 0$$

Tần số cắt pha ($\omega_{-\pi}$): Là tần số mà tại đó pha của ĐTTS bằng -180°

$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^\circ \Leftrightarrow \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi \text{ rad}$$

Độ dự trữ biên GM (Gain Margin): Là biên độ theo tần số mà tại đó pha của ĐTTS bằng -180° hay

$$GM = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \Rightarrow GM = -L(\omega_{-\pi})$$

Độ dự trữ pha PM (Phase Margin):

$$PM = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

Điều kiện để hệ thống ổn định

$$+ PM > 0$$

$$+ GM = -L(\omega_{-\pi}) > 0$$

5.2 Các bước để vẽ biểu đồ Bode

Giả sử hàm truyền của hệ thống có dạng:

$$G(s) = K \prod G_i(s)$$

Bước 1: Xác định tất cả các tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$, và sắp xếp theo thứ tự tăng dần: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots$

Bước 2: Nếu tất cả các tần số $\omega_i \geq 1$ thì biểu đồ Bode gần đúng phải qua điểm A có tọa độ:

$$\begin{cases} \omega = 1 \\ L(\omega) = 20\lg K \end{cases}$$

Bước 3: Qua điểm A, vẽ đường thẳng có độ dốc:

(- 20 dB/dec x a) nếu $G(s)$ có a khâu tích phân lý tưởng

(+ 20 dB/dec x b) nếu $G(s)$ có b khâu vi phân lý tưởng

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp

Bước 4: Tại tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$ độ dốc của đường tiệm cận được cộng thêm:

(- 20 dB/dec x β) nếu ω_i là tần số gãy của khâu quán tính bậc một.

(+ 20 dB/dec x β) nếu ω_i là tần số gãy của khâu vi phân bậc một.

(-40 dB/dec x β) nếu ω_i là tần số gãy của khâu dao động bậc hai.

(+40 dB/dec x β) nếu ω_i là tần số gãy của khâu vi phân bậc hai, $(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)$.

(β là số nghiệm bội tại ω_i)

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.

Bước 5: Lặp lại bước 4 cho đến khi vẽ xong đường tiệm cận tại tần số gãy cuối cùng.

Ví dụ 5.1: Vẽ biểu đồ Bode của hệ thống có hàm truyền sau:

$$G(s) = \frac{100(0.1s+1)}{s(0.01s+1)}$$

Xác định độ dự trữ biên GM và độ dự trữ pha PM

Giải:

Hàm truyền hệ thống có thể được viết lại như sau

$$G(s) = 100 \frac{1}{s} (0.1s+1) \frac{1}{(0.01s+1)}$$

Phương trình có dạng sau

$$G(s) = K \frac{1}{s} (T_1s+1) \frac{1}{T_2s+1}$$

Trong đó $K=100$, $T_1=0.1$, $T_2=0.01$

Các tần số gãy

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ rad/s}$$

Biểu đồ Bode biên đi qua điểm A

$$\begin{cases} \omega = 1 \text{ rad/s} \\ L(\omega) = 20 \lg(K) = 20 \lg(100) = 40 \text{ dB/s} \end{cases}$$

Xác định thêm điểm xuất phát chính xác tại $\omega = 10^{-1}$

$$L(\omega) = 20 \lg|G(0.1j)| = 20 \lg \left| \frac{100(0.1 \times 0.1j+1)}{j0.1(0.01 \times 0.1j+1)} \right|$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{100+j}{-0.0001+0.1j} \right| = 20 \lg \left| \frac{\sqrt{100^2+1}}{\sqrt{0.0001^2+0.1^2}} \right|$$

Suy ra

$$L(\omega) = 60 \text{ dB/dec}$$

Góc pha của Bode pha

$$\varphi(\omega) = -90^0 + \tan^{-1}(T_1\omega) - \tan^{-1}(T_2\omega)$$

$$\varphi(0.1) = -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 0.1) - \tan^{-1}(0.01 \times 0.1) = -89.4844^0$$

$$\varphi(1) = -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 1) - \tan^{-1}(0.01 \times 1) = -84.8623^0$$

$$\varphi(10) = -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 10) - \tan^{-1}(0.01 \times 10) = -50.7106^0$$

$$\varphi(100) = -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 100) - \tan^{-1}(0.01 \times 100) = -50.7106^0$$

$$\varphi(1000) = -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 1000) - \tan^{-1}(0.01 \times 1000) = -84.8623^0$$

Tần số cắt

$$|G(j\omega_c)| = \left| \frac{100(0.1 \times j\omega_c + 1)}{j\omega_c(0.01 \times j\omega_c + 1)} \right| = \left| \frac{10j\omega_c + 100}{-0.01\omega_c^2 - j\omega_c} \right| = \frac{\sqrt{10^2\omega_c^2 + 10^4}}{\sqrt{10^{-4}\omega_c^4 + \omega_c^2}} = 1$$

Hay

$$10^{-4}\omega_c^4 + (1-10^2)\omega_c^2 - 10^4 = 0$$

Giải phương trình trùng phương, tần số cắt được xác định $\omega_c = 995.0377 \text{ rad}$

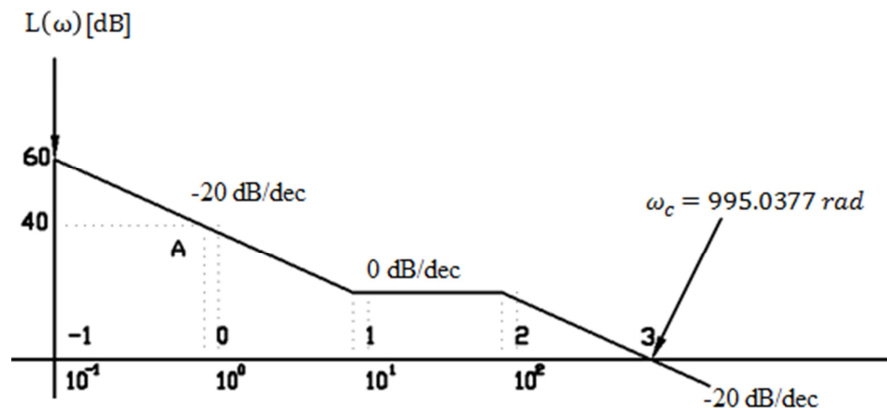
Hay $\lg\omega_c = 3$

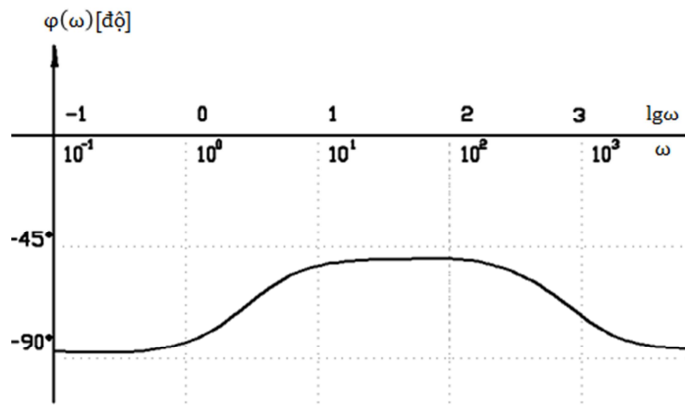
Pha tại tần số cắt

$$\varphi(\omega_c) = -90^0 + \tan^{-1}(T_1\omega_c) - \tan^{-1}(T_2\omega_c)$$

$$= -90^0 + \tan^{-1}(0.1 \times 995.0377) - \tan^{-1}(0.01 \times 995.0377) = -84.8369^0$$

Từ các kết quả tính toán trên, biểu đồ Bode được vẽ như hình 5.1





Hình 5.1 Biểu đồ Bode biên và Bode pha của hệ thống

Biểu đồ Bode biên

Do biểu đồ Bode biên đã đi qua điểm A nên cần xác định thêm 1 điểm thứ hai để kẻ được đường tiệm cận đầu tiên. Thông thường người ta sẽ xác định điểm xuất phát có giá trị ω nhỏ hơn giá trị ω ở điểm A. Trong bài toán này giá trị xuất phát được chọn tại $\omega = 10^{-1}$ rad/s. Qua hai điểm $L(10^{-1}) = 60\text{dB}$ và $L(10^0) = 40\text{dB}$ đường tiệm cận đầu tiên được xác định bằng cách vẽ một đoạn thẳng từ 60dB trên trục tung đi qua điểm A và dừng lại ở tần số gãy đầu tiên ở $\omega_1 = 10^1$ rad/s. Độ dốc lên trên đường tiệm cận là -20dB (do khâu đầu tiên là khâu tích phân lý tưởng). Khâu tiếp theo cần vẽ là khâu sớm pha bậc 1 có độ dốc +20dB nên tổng Bode biên hiện tại là 0dB. Do đó kẻ một đường thẳng xuất phát tại ω_1 song song với trục hoành và dừng lại ở tần số gãy thứ hai ω_2 . Sau đó điền giá trị 0dB lên đường tiệm cận thứ hai. Khâu cuối cùng trong hàm truyền là khâu dao động bậc nhất nên Bode biên sẽ dốc xuống -20dB. Hơn nữa tần số cắt biên đã tìm được tại $\omega_c = 997.04$ rad/s. Do đó tại ω_2 kẻ một đoạn thẳng cắt trục hoành tại ω_c . Sau đó điền giá trị -20dB lên đường tiệm cận cuối cùng này. Để vẽ Bode biên chỉ cần vẽ đường cong liên tục dọc theo các đường tiệm cận vừa xác định ở trên.

Biểu đồ Bode pha

Cách vẽ biểu đồ Bode pha đơn giản hơn Bode biên. Đối với đồ thị này chỉ cần xác định được góc pha theo tần số. Sau đó nối những điểm tại góc pha tìm được lại với nhau sẽ xác định được biểu đồ Bode pha. Chú ý rằng nếu cho càng nhiều tần số thì biểu đồ Bode pha càng chính xác

Dựa trên biểu đồ Bode biên và pha, độ dự trữ biên và pha được xác định như sau:

Độ dự trữ pha

$$PM = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 84.8369^\circ = 95.1631^\circ$$

Độ dự trữ biên

$$GM = -L(\omega_{-\pi}) > 0$$

5.3 Thiết kế bộ điều khiển dùng phương pháp đáp ứng tần số

Đối với bất kỳ bài toán thiết kế hệ thống, người thiết kế có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau miễn sao tìm ra được đáp ứng của hệ thống mong muốn

Trong thiết kế hệ thống, chất lượng của đáp ứng là rất quan trọng. Các yêu cầu về chất lượng của đáp ứng như độ dự trữ biên, độ dự trữ pha, hệ số khuếch đại, tần số cắt, tần số cộng hưởng, băng thông (ước lượng tốc độ của đáp ứng) và sai số xác lập phải có. Sau khi hệ hờ được thiết kế, các cực và zero của hệ kín sẽ được xác định. Các đặc tính của đáp ứng quá độ phải được kiểm tra để hệ sau khi thiết kế phải thỏa mãn các yêu cầu trong miền thời gian. Nếu thiết kế chưa thỏa mãn thì phải phân tích và thiết kế lại cho đến khi đạt yêu cầu.

Có hai cách thiết kế trong miền tần số là đồ thị cực và biểu đồ Bode. Khi thêm một khâu bù vào hệ thống, đồ thị cực sẽ không giữ được dạng đồ thị ban đầu. Do đó người thiết kế phải vẽ lại một đồ thị mới. Điều này sẽ mất nhiều thời gian và không thuận lợi. Ngược lại, khâu bù có thể được thêm vào biểu đồ Bode ban đầu một cách dễ dàng mà không cần vẽ lại. Nếu độ lợi của hệ thống vòng hở thay đổi thì đường cong của Bode biên chỉ dời lên hoặc xuống mà không làm thay đổi độ dốc của đường cong. Tương tự như thế, đường cong của Bode pha cũng vẫn giữ được dạng ban đầu.

Phương pháp tổng quát cho việc thiết kế hệ thống dựa vào biểu đồ Bode: Đầu tiên phải hiệu chỉnh độ lợi hệ hờ để đạt được sai số xác lập như yêu cầu. Sau đó vẽ đường cong của Bode biên và Bode pha của hệ hờ chưa có khâu bù.

5.3.1 Phương pháp bù sớm pha

$$G_c(s) = k_c \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}, (\alpha > 1)$$

Đặc tính của khâu bù sớm pha: Băng thông của hệ sau khi thiết kế sẽ rộng hơn

Bước 1: xác định độ lợi khuếch đại k_c để thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập của bài toán.

Bước 2: Vẽ biểu đồ Bode cho hàm truyền $k_c G(s)$ với $G(s)$ là hệ hờ

Bước 3: Xác định tần số cắt biên của $k_c G(s)$ với điều kiện

$$|k_c G(j\omega_c)| = 1$$

Bước 4: Xác định độ dự trữ pha của hệ trước khi hiệu chỉnh $k_c G(s)$ như sau

$$PM = 180 + \varphi(\omega_c)$$

Bước 5: Xác định độ dự trữ pha cần bù

$$\varphi_{\max} = PM^* - PM + \theta$$

Với PM^* là độ dự trữ pha mong muốn và θ là độ bù sai số từ 5° đến 20° (người thiết kế sẽ lựa chọn một giá trị nằm trong dãy này).

Chú ý: Nếu góc pha cần bù lớn hơn 70° thì không thể thiết kế được khâu bù này

Bước 6: Xác định giá trị α của Zero trong khâu bù

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})}$$

Bước 7: Xác định tần số cắt mới của hệ sau khi hiệu chỉnh ω_{c1}

$$L(\omega_{c1}) = -10\lg(\alpha) \text{ hay } |k_c G(j\omega_{c1})| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Bước 8: Xác định hằng số T trong khâu bù

$$T = \frac{1}{\omega_{c1}\sqrt{\alpha}}$$

Bước 9: Kiểm tra lại hệ thống có thỏa mãn điều kiện về độ dự trữ biên hay chưa. Nếu thỏa mãn thì dừng lại và ngược lại thì quay về bước 5 để chọn lại độ bù sai số và tiêu tục tính toán.

Do đặc tính của biểu đồ Bode cho phép tính gần đúng nên người thiết kế có thể tìm ra góc pha tại tần số cắt hệ hở, độ dự trữ pha hay tần số cắt mới của khâu bù từ biểu đồ này

Ví dụ 5.2: Thiết kế khâu bù sớm pha sao cho hệ thống được mô tả ở hình 5.2 thỏa mãn $k_v^* = 50$, $PM^* \geq 40^\circ$, $GM^* \geq 15\text{dB}$



Hình 5.2 hệ kín với hồi tiếp đơn vị

Giải

Khâu bù trễ pha có dạng $G_c(s) = k_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$, ($\alpha > 1$)

Bước 1: Theo đề bài cho $k_v^* = 50$ nên tính hiệu ngõ vào được hiểu là hàm dốc

$$K_v^* = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \frac{5}{s(s+5)} = 10$$

Hay $k_c = 10$

Bước 2: Vẽ biểu đồ Bode có hàm truyền

$$k_c G(s) = \frac{50}{s(s+5)}$$

Hàm truyền trên có thể được viết lại như sau

$$K_c G(s) = 10 \frac{1}{s \left(\frac{1}{5}s + 1 \right)} = k \frac{1}{s T_1 s + 1}, \text{ với } k=10, T_2 = 1/5$$

Tần số gãy

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 5 \text{ rad/s}$$

Điểm mà Bode biên sẽ đi qua

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = 1 \\ L(\omega) = 20 \lg(k) + 20(-1) \lg(\omega) = 20 \lg(10) + 20(-1) \lg(1) = 20 \text{dB} \end{array} \right.$$

Xác định điểm xuất phát của Bode biên tại $\omega = 10^{-1}$

$$L(\omega) = 20 \lg |G(0.1j)| = 20 \lg \left| \frac{50}{0.1j(0.1j+5)} \right| = 40 \text{dB}$$

Bode pha được xác định như sau:

$$\varphi(\omega) = -90 - \tan^{-1}(T_1 \omega)$$

Suy ra

$$\varphi(0.1) = -90 - \tan^{-1} \left(\frac{0.1}{5} \right) = -91.15^\circ$$

$$\varphi(1) = -90 - \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) = -101.31^\circ$$

$$\varphi(10) = -90 - \tan^{-1} \left(\frac{10}{5} \right) = -153.43^\circ$$

$$\varphi(100) = -90 - \tan^{-1} \left(\frac{100}{5} \right) = -177.14^\circ$$

Tần số cắt biên trước khi bù

$$|G(\omega_c j)| = \left| \frac{50}{\omega_c j(\omega_c j + 5)} \right| = 1$$

Hay

$$\left| \frac{50}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 25}} \right| = 1$$

Hay

$$\omega_c^4 + 25\omega_c^2 + 50^2 = 0$$

Đặt $x = \omega_c^2$, với $x > 0$

Giải ra được

$$x_1 = -64 \text{ (loại)}$$

$$x_2 = 39$$

Suy ra $\omega_c = \sqrt{39} = 6.25 \text{ rad/s}$

Bước 3: Xác định tần số cắt biên của $k_c G(s)$ với điều kiện $|k_c G(j\omega_c)| = 1$

ở bước 2 đã tìm được tần số cắt của $K_c G(s)$ là $\omega_c = \sqrt{39} = 6.25 \text{ rad/s}$

Bước 4: Xác định độ dự trữ pha của hệ trước khi bù $k_c G(s)$ như sau

$$PM = 180 + \varphi(\omega_c) = 180 - 90 - \tan^{-1}(T_1 \omega_c) = 180 - 90 - \tan^{-1}\left(\frac{1}{5} 6.25\right) = 38.7^0$$

Bước 5: Xác định góc pha cần bù

$$\varphi_{\max} = PM^* - PM + \theta = 40 - 38.7 + 10.7 = 12^0, \text{ chọn } \theta = 10.7^0$$

Bước 6: Xác định giá trị α của zero trong khâu bù

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})} = \frac{1 + \sin(12^0)}{1 - \sin(12^0)} = 1.5$$

Bước 7: Xác định tần số cắt mới của hệ sau khi bù ω_{c1}

$$|k_c G(j\omega_{c1})| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \left| \frac{50}{\omega_{c1} j(\omega_{c1} j + 5)} \right| = \left| \frac{50}{\omega_{c1} \sqrt{\omega_{c1}^2 + 25}} \right| = 0.8$$

$$\Rightarrow 0.67\omega_{c1}^4 + 16.75\omega_{c1}^2 - 2500 = 0$$

Giải ra được $\omega_{c1} = 7 \text{ rad/s}$

Bước 8: Xác định hằng số T trong khâu bù

$$T = \frac{1}{\omega_{c1} \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{7 \sqrt{1.5}} = 0.12$$

Vậy khâu bù sớm pha được thiết kế như sau

$$G_c(s) = k_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} = 10 \frac{1 + 1.5 \times 0.12s}{1 + 0.12s} = 10 \frac{1 + 0.18s}{1 + 0.12s}$$

5.3.2 Phương pháp bù trễ pha

Khâu bù sớm pha có dạng như sau

$$G_c(s) = k_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 - \alpha Ts}, (\alpha < 1)$$

Đặc tính của khâu trễ pha: làm giảm biên độ ở vùng tần số cao, bằng thông của hệ sau khi thiết kế sẽ hẹp hơn

Bước 1: xác định độ lợi khuếch đại k_c để thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập của bài toán.

Bước 2: Vẽ biểu đồ Bode cho hàm truyền $k_c G(s)$ với $G(s)$ là hệ hở

Bước 3: Xác định tần số cắt biên của hệ sau khi bù ω_{c1}

$$\varphi(\omega_{c1}) = -180^0 + PM^* + \theta$$

Với PM^* là độ dự trữ pha mong muốn và θ là độ bù sai số từ 5^0 đến 20^0 (người thiết kế sẽ lựa chọn một giá trị nằm trong dãy này).

Bước 4: Xác định giá trị α của zero trong khâu bù

$$L(\omega_{c1}) = -20 \lg(\alpha) \text{ hay } |k_c G(j\omega_{c1})| = \frac{1}{\alpha}$$

Bước 5: chọn zero của khâu bù thỏa mãn

$$\frac{1}{\alpha T} \ll \omega_{cl}$$

Từ đây người thiết kế sẽ tìm ra được giá trị αT

Bước 6: Xác định hằng số T trong khâu bù

$$\frac{1}{T} = \alpha \frac{1}{\alpha T}$$

Từ đây người thiết kế sẽ tìm ra được giá trị T

Bước 7: Kiểm tra lại hệ thống có thỏa mãn điều kiện về độ dự trữ biên hay chưa. Nếu thỏa mãn thì dừng lại và ngược lại thì quay về bước 3 để chọn lại độ bù sai số và tiếp tục tính toán

Do đặc tính của biểu đồ Bode cho phép tính gần đúng nên người thiết kế có thể tìm ra tần số cắt mới, góc pha tại tần số cắt mới, độ lớn của Bode biên tại tần số cắt mới từ biểu đồ này.

Ví dụ 5.3: Thiết kế khâu trễ pha sao cho hệ thống được mô tả ở hình 5.3 thỏa mãn

$$k_v^* = 10, PM^* \geq 40^\circ, GM^* \geq 10\text{dB}$$



Hình 5.3 Hệ kín với hồi tiếp đơn vị

Giải

Khâu bù trễ pha có dạng $G_c(s) = k_c \frac{1+\alpha Ts}{1-\alpha Ts}$, ($\alpha < 1$)

Bước 1: Theo đề bài cho $k_v^* = 50$ nên tính hiệu ngõ vào được hiểu là hàm dốc

$$K_v^* = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_c \frac{1+\alpha Ts}{1-\alpha Ts} \frac{10}{s(s+1)(s+3)} = 10$$

Hay $k_c = 3$

Bước 2: Vẽ biểu đồ Bode có hàm truyền

$$k_c G(s) = \frac{30}{s(s+1)(s+3)}$$

Hàm truyền trên có thể được viết lại như sau

$$K_c G(s) = 10 \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} \frac{1}{(\frac{1}{3}s+1)} = k \frac{1}{s} \frac{1}{T_1 s+1} \frac{1}{T_2 s+1}, \text{ với } k=10, T_1 = 1 \text{ và } T_2 = 1/3$$

Tần số gãy

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 3 \text{ rad/s}$$

Điểm mà Bode biên sẽ đi qua

$$\begin{cases} \omega = 1/10 \\ L(\omega) = 20 \lg(k) + 20(-1) \lg(\omega) = 20 \lg(10) + 20(-1) \lg(1/10) = 40\text{dB} \end{cases}$$

Xác định điểm xuất phát của Bode biên tại $\omega = 10^{-2}$

$$L(\omega) = 20 \lg|G(0.1j)| = 20 \lg \left| \frac{30}{0.01j(0.01j+1)(0.01j+3)} \right| = 60\text{dB}$$

Bode pha được xác định như sau:

$$\varphi(\omega) = -90 - \tan^{-1}(T_1\omega) - \tan^{-1}(T_2\omega)$$

Suy ra

$$\varphi(0.01) = -90 - \tan^{-1}(0.01) - \tan^{-1}\left(\frac{0.01}{3}\right) = -90.76^0$$

$$\varphi(0.1) = -90 - \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}\left(\frac{0.1}{3}\right) = -97.620$$

$$\varphi(1) = -90 - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -151.70$$

$$\varphi(10) = -90 - \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}\left(\frac{10}{3}\right) = -247.590$$

$$\varphi(100) = -90 - \tan^{-1}(100) - \tan^{-1}\left(\frac{100}{3}\right) = -267.710$$

Tần số cắt biên trước khi bù

$$|G(\omega_c j)| = \left| \frac{30}{\omega_c j(\omega_c j+1)(\omega_c j+3)} \right| = 1$$

Hay

$$\left| \frac{30}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2+1} \sqrt{\omega_c^2+9}} \right| = 1$$

Hay

$$\omega_c^6 + 4\omega_c^4 + 3\omega_c^2 - 900 = 0$$

Đặt $x = \omega^2$, với $x > 0$

Giải ra được

$$x_1 = -6.1997 + 8.2893j \text{ (loại)}$$

$$x_2 = -6.1997 - 8.2893j \text{ (loại)}$$

$$x_3 = 8.3995$$

Suy ra $\omega_c = 3\text{rad/s}$

Bước 3: Xác định tần số cắt biên của hệ sau khi bù ω_c

$$\varphi(\omega_{cl}) = -180^0 + PM^* + \theta = -180^0 + 40^0 + 5^0 = -135^0$$

$$\varphi(\omega_{cl}) = -90 - \tan^{-1}(T_1\omega) - \tan^{-1}(T_2\omega) = \varphi(\omega) = -90 - \tan^{-1}(\omega_{cl}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\omega_{cl}\right)$$

Do đó

$$\tan^{-1}(\omega_{cl}) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\omega_{cl}\right) = 45$$

lấy tg hai vế ở phương trình trên được

$$\text{tg}\left(\tan^{-1}(\omega_{cl}) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\omega_{cl}\right)\right) = \text{tg}(45^0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\left(\tan^{-1}(\omega_{cl})\right) + \text{tg}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{cl}}{3}\right)\right)}{1 - \text{tg}\left(\tan^{-1}(\omega_{cl})\right) \cdot \text{tg}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{cl}}{3}\right)\right)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{cl} + \frac{\omega_{cl}}{3}}{1 - \omega_{cl} \cdot \frac{\omega_{cl}}{3}} = 1$$

$$\omega_{cl}^2 + 4\omega_{cl} - 3 = 0$$

Suy ra

$$\omega_{cl} = -4.65 \text{ rad/s (loại)} \text{ hoặc } \omega_{cl} = 0.65 \text{ rad/s}$$

Bước 4: Xác định giá trị α của zero trong khâu bù

$$|k_c G(j\omega_{cl})| = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left| \frac{30}{\omega_{cl}j(\omega_{cl}j+1)(\omega_{cl}j+3)} \right| = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{\omega_{cl}\sqrt{\omega_{cl}^2+1}\sqrt{\omega_{cl}^2+9}} = \frac{1}{\alpha}$$

Thay $\omega_{cl} = 0.65 \text{ rad/s}$ vào biểu thức trên ta được

$$\frac{30}{0.65\sqrt{0.65^2+9}\sqrt{0.65^2+1}} = \frac{1}{\alpha}$$

Suy ra $\alpha = 0.08$

Bước 5: Chọn zero của khâu bù thỏa mãn

$$\frac{1}{\alpha T} \ll \omega_{cl} = 0.65$$

Chọn $\frac{1}{\alpha T} = 0.06$, $\alpha T = 16.67$

Bước 6: Xác định hằng số T trong khâu bù

$$\frac{1}{T} = \alpha \frac{1}{\alpha T} = 0.08 \times 0.06 = 0.0048$$

Suy ra $T = 208$

Vậy khâu bù trễ pha được thiết kế như sau

$$G_c(s) = k_c \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} = 3 \frac{1+16.67s}{1+208s}$$

5.3.3 Phương pháp bù sớm trễ pha



Hình 5.4 sơ đồ khối của khâu bù sớm trễ pha

Nếu bài toán yêu cầu thiết kế cả khâu bù sớm pha và trễ pha (hình 5.4) thì trình tự thiết kế được thực hiện như sau:

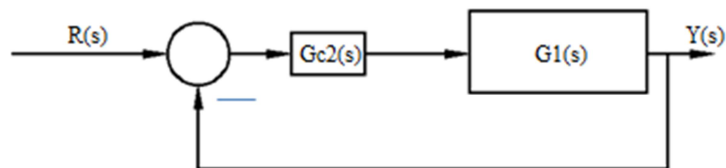
$G_c(s) = G_{c1}(s).G_{c2}(s)$, trong đó $G_{c1}(s)$ là khâu bù sớm pha và $G_{c2}(s)$ là khâu bù trễ pha

Bước 1: thiết kế khâu bù sớm pha $G_{c1}(s)$ thỏa mãn yêu cầu về độ dự trữ biên, độ dự trữ pha như hình 5.5



Hình 5.5 sơ đồ khối của khâu bù sớm pha

Bước 2: thiết kế khâu bù trễ pha $G_{c2}(s)$ trong hình 5.6 thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập bằng cách đặt $G(s) = G_{c1}(s).G_1(s)$

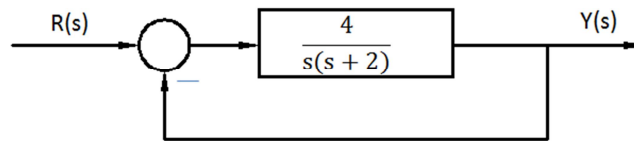


Hình 5.6 sơ đồ khối của khâu bù trễ pha

5.4 Bài tập

1. Vẽ biểu đồ Bode biên có hàm truyền $G(s) = 100 \frac{s+10}{s(s+100)}$

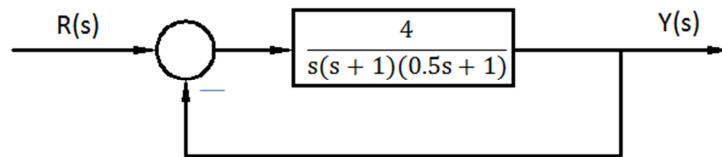
2. Cho hệ thống có sơ đồ như hình 5.38 sau với hàm truyền hệ hở là $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$



a. Vẽ biểu đồ Bode cho hệ trên

b. Nếu thêm một khâu bù có sơ đồ như hình trên, sao cho hệ có độ dự trữ pha lớn hơn 50° , độ dự trữ biên độ là 10dB và $k_v = 20s^{-1}$. Hãy xác định khâu bù đã cho.

3. Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình 5.39 với hệ hở là $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$



a. Vẽ biểu đồ Bode cho hệ trên

b. Nếu thêm một khâu bù ở sơ đồ hình trên sao cho hệ có độ dự trữ pha lớn hơn 40° , độ dự trữ biên độ là 10dB và $k_v = 5s^{-1}$. Hãy xác định khâu bù đã cho.

4. Cho hệ thống có hồi tiếp đơn vị với hệ hở là $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

a. Vẽ biểu đồ Bode cho hệ trên

b. Thiết kế khâu bù sớm trễ pha cho hệ trên sao cho hệ có độ dự trữ pha lớn hơn 50° , độ dự trữ biên độ là 10dB và $k_v = 10s^{-1}$

CHƯƠNG 6

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ HỆ THỐNG THEO PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO NGHIỆM SỐ

6.1 Giới thiệu

Đặc tính của đáp ứng quá độ đối với hệ thống vòng kín có liên quan đến các cực của hệ vòng kín. Nếu hệ thống có độ lợi hồi tiếp thì vị trí của các cực vòng kín sẽ phụ thuộc vào độ lợi này. Do đó, đối với các hệ thống đơn giản thì việc điều chỉnh độ lợi có thể di chuyển các cực vòng đến các vị trí tham khảo. Và lúc này bài toán thiết kế trở thành bài toán chọn các giá trị độ lợi thích hợp

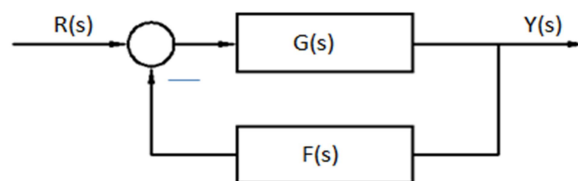
Các cực vòng kín là nghiệm của phương trình đặc trưng. Tuy nhiên nếu hệ thống có phương trình đặc trưng với bậc lớn hơn 3 thì việc tìm nghiệm sẽ rất khó khăn và thường phải sử dụng trợ giúp của các công cụ trên máy tính. Một phương pháp đơn giản hơn để có thể tìm được nghiệm của phương trình đặc trưng là quỹ đạo nghiệm số. Với phương pháp này, nghiệm của phương trình đặc trưng được vẽ dựa vào tất cả các tham số của hệ thống. Và nghiệm tương ứng với các giá trị cụ thể của tham số này xác định bằng đồ hình.

Bằng cách sử dụng phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS), người thiết kế có thể tiên đoán được ảnh hưởng của các cực khi độ lợi thay đổi hoặc thêm các cực vòng hở và Zero vòng hở. Trong thiết kế hệ điều khiển liên tục, QĐNS tỏ ra rất hiệu quả vì nó chỉ ra được các cực và zero của hệ vòng hở. Do đó đây là phương pháp xấp xỉ và cho kết quả nhanh

6.2 Vẽ Quỹ đạo nghiệm số đối với hệ thống có hồi tiếp âm đơn vị

QĐNS là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng (PTĐT) khi $k \in (0 \rightarrow \infty)$

Cho hệ thống hồi tiếp âm như hình 6.1



Hình 6.1 hệ kín với hồi tiếp đơn vị âm

Hàm truyền của hệ kín được thiết lập như sau

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

PTĐT của hệ thống $1 + G(s)F(s) = 0$. Hay PTĐT có dạng

$$1 + k \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

Trong đó $N(s)$ là đa thức tử số theo s , $D(s)$ là đa thức mẫu số theo s , k là hằng số

$$\text{Điều kiện biên độ } \left| k \frac{N(s)}{D(s)} \right| = 1$$

$$\text{Điều kiện về pha } \tan^{-1} \left(k \frac{N(s)}{D(s)} \right) = \pm 180^\circ (2l+1), \text{ trong đó } l=0, 1, 2, \dots$$

❖ Các bước vẽ QĐNS đối với hệ thống có hồi tiếp âm đơn vị

Qui tắc 1: Xác định số nhánh QĐNS = bậc của PTĐT = số cực của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

Qui tắc 2:

+ $k = 0$ các nhánh QĐNS xuất phát từ cực của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

+ $k = \infty$, m nhánh QĐNS tiến đến n zero của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

+ $n-m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo tiệm cận (xem qui tắc 5,6)

Qui tắc 3: QĐNS đối xứng qua trục thực

Qui tắc 4: $k > 0$, điểm thuộc QĐNS nằm bên trái các số lẻ của cực và zero

Qui tắc 5: Góc tạo bởi trục thực và đường tiệm cận của QĐNS được xác định

$$\beta = \pm \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, l=0, 1, 2, \dots$$

Trong đó n là số cực và m là số zero

Qui tắc 6: Tâm của tiệm cận hay giao giữa trục thực với đường tiệm cận tại A được xác định bởi

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

Trong đó p_i là cực thứ i và z_j là zero thứ j

Qui tắc 7: Điểm tách nhập của QĐNS (nếu có) nằm trên trục thực là nghiệm phương trình

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

Qui tắc 8: Giao điểm giữa QĐNS với trục ảo được xác định bằng cách thay $s = j\omega$ vào PTĐT. Sau đó cho phần thực bằng 0 và phần số ảo bằng 0 để xác định giá trị của ω và k . Hoặc cũng có thể xác định giao điểm giữa QĐNS với trục ảo được xác định bằng cách lập bảng Routh

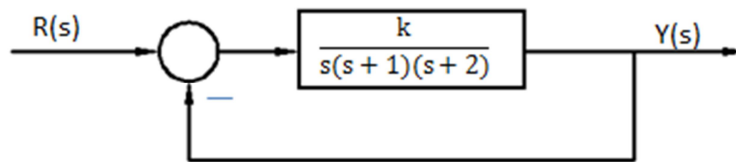
S^n	a_0	a_2	a_4		a_{n-2}	a_n
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5		a_{n-3}	a_{n-1}
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3		b_m	0
.....		...		...	0	
S^2	c_1	c_2	c_3	0		
S^1	d_1	d_2	0			
S^0	e_1	0				

Cho giá trị tại dòng s^1 và cột 1 của bảng Routh bằng không sẽ tìm được giá trị của k . Cho dòng s^2 với phương trình $c_1 s^2 + c_2 = 0$ sẽ tìm được giá trị giao giữa QĐNS với trục ảo.

Qui tắc 9: Đối với $k \frac{N(s)}{D(s)}$ có cực phức thì cần phải xác định góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_j . Góc này được xác định bởi

$$\theta_j = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - \sum_{i \neq j}^n \arg(p_j - z_i)$$

Ví dụ 6.1: Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình bên dưới



Vẽ QĐNS cho hệ thống trên trong trường hợp $k > 0$

Giải

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)}} \quad (6.1)$$

Từ phương trình (6.1), PTĐT được xác định như sau:

$$\frac{k}{1+s(s+1)(s+2)} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{k}{s(s+1)(s+2)} \text{ có các cực và zero như sau:}$$

+ Các cực: $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$

+ Các zero: không có

Biểu diễn các cực và zero lên trên mặt phẳng phức như hình

+ Tâm tiệm cận tại A

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{0+(-1)+(-2)-0}{3-0} = -1$$

Trên mặt phẳng phức biểu diễn tâm tiệm cận tại giá trị -1 trên trục thực (xem hình 6.3)

+ Góc tiệm cận

$$\beta = \pm \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, \text{ với } l = 0, 1$$

$$\beta_1 = \pm \frac{(2 \times 0 + 1)\pi}{3-0} = \frac{\pi}{3}$$

$$\beta_2 = \pm \frac{(2 \times 1 + 1)\pi}{3-0} = \pi$$

$$\beta_3 = \pm \frac{(2 \times (-1) + 1)\pi}{3-0} = -\frac{\pi}{3}$$

Từ tâm tiệm cận vừa tìm được, dùng thước đo xác định góc tiệm cận (góc hợp bởi trục hoành và tâm tiệm cận) và vẽ đường tiệm cận tương ứng với góc tính được ở trên và biểu diễn lên trên mặt phẳng phức như hình 6.3

+ Điểm tách nhập:

Từ phương trình (6.2), chuyển k sang về trái và các giá trị còn lại sang về phải được

$$k = -s(s+1)(s+2) = -s^3 - 3s^2 - 2s \quad (6.3)$$

sau đó lấy đạo hàm của k theo s của phương trình (6.3) được

$$\frac{dk}{ds} = -3s^2 - 6s - 2 = 0$$

Giải phương trình $3s^2 + 6s + 2 = 0$ được điểm tách nhập

$$S_1 = -1.5774 \quad (k < 0, \text{ vì điểm tách này nằm bên trái số chẵn của các cực và zero})$$

$$S_2 = -0.4226 \quad (k > 0, \text{ vì điểm tách này nằm bên trái số lẻ của các cực và zero})$$

Do yêu cầu của bài toán là vẽ QĐNS trong trường hợp $k > 0$ nên điểm tách nhập tại s_1 bị loại. Tiếp theo là biểu diễn điểm tách s_2 lên trên mặt phẳng phức như hình 6.3. Đây là một điểm tách vì giữa 2 cực $s = 0$ và $s = -2$ không có zero nào. Mà đối với QĐNS thì nhánh của nó phải xuất phát từ một cực và kết thúc ở zero. Tuy nhiên do bài toán này không có zero nên không thể kết thúc được. vậy nhánh của QĐNS sẽ tách và tiến ra vô cùng dọc theo đường tiệm cận

+ Giao điểm giữa QĐNS với trục ảo

Cách 1

Phương trình 6.2 có thể viết tương đương như sau:

$$\frac{k}{1+s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$\Rightarrow s(s+1)(s+2) + k = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

Thay $s = j\omega$ vào PTĐT vừa triển khai ở trên được

$$-j\omega^3 - 3\omega^3 + 2j\omega + k = 0$$

$$\Rightarrow k - 3\omega^2 + (2\omega - \omega^3)j = 0$$

Cho phần thực và phần ảo của phương trình 4.4 bằng 0 được:

$$\begin{cases} \omega(2 - \omega^2) = 0 \\ k - 3\omega^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ k = 6 \end{cases}$$

Cách 2

Từ PTĐT có

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

dựng trên PTĐT thành lập bảng Routh

S^3	3	k	0
S^2	1	2	0
S^1	k-6	0	
S^0	2		

Giao điểm giữa trục ảo là nghiệm của phương trình tại dòng 2 của bảng

$$S^2 + 2 = 0$$

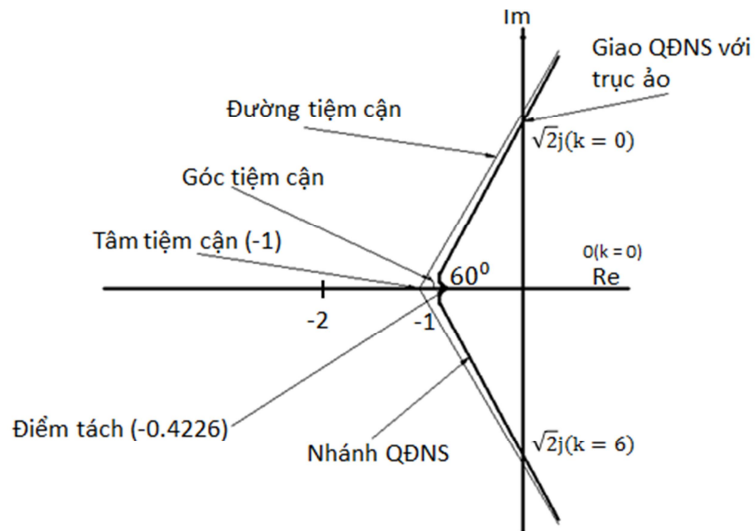
$$\Rightarrow -\omega^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}$$

Giá trị của k tại dòng $s_1 = 0 \Leftrightarrow k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

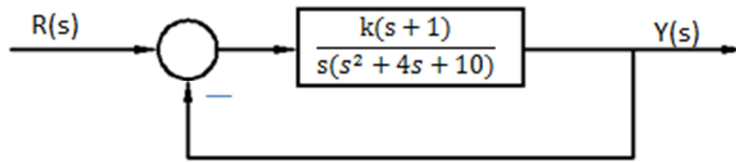
Biểu diễn giá trị $s = \pm\sqrt{2}j$ lên trên mặt phẳng phức mà tại đó nhánh của QĐNS giao với trục ảo (xem hình 4.3)

Do hệ đã cho không có zero nên giữa hai cực $s=0$ và $s=-1$ có một điểm tách và hai nhánh của QĐNS sẽ đi ra từ điểm này. Nhánh thứ nhất của QĐNS sẽ xuất phát từ cực $s=0$ qua điểm tách và tiến ra vô cùng dọc theo đường tiệm cận (cắt trục ảo tại $s = \sqrt{2}j$). Nhánh thứ hai của QĐNS sẽ xuất phát từ cực $s = -1$ qua điểm tách và tiến ra vô cùng dọc theo đường tiệm cận (cắt trục ảo tại $s = -\sqrt{2}j$). Nhánh thứ ba của QĐNS xuất phát từ cực $s = -2$ và tiến ra $-\infty$ dọc theo trục hoành (có một đường tiệm cận nằm trùng với trục hoành).



Hình 6.3 QĐNS của hệ có sơ đồ ở hình 6.2

Ví dụ 6.2 Cho hệ thống như hình bên dưới



Vẽ QĐNS của hệ thống trên với $k > 0$

Từ hình, PTĐT được xác định như sau

$$1 + \frac{k(s+1)}{s^3+4s^2+10s} = 0 \quad (6.4)$$

Từ phương trình (6.4), các cực và zero được xác định như sau

+ Các cực $p_1 = 0$; $p_2 = -2+2.4495j$; $p_3 = -2-2.4495j$

+ Các zero $z_1 = -1$

Biểu diễn các cực và zero lên trên mặt phẳng phức như hình 6.4

+ Tâm tiệm cận tại A

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{0 + (-2+2.4495j) + (-2-2.4495j) - (-1)}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

Trên mặt phẳng phức biểu diễn tâm tiệm cận tại giá trị $-3/2$ trên trục thực

+ Góc tiệm cận

$$\beta = \pm \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, \text{ với } l = 0, 1$$

$$\beta_1 = \frac{(2 \times 0 + 1)\pi}{3-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{(2 \times 1 + 1)\pi}{3-1} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{(2x(-1)+1)\pi}{3-1} = -\frac{\pi}{2}$$

Từ tâm tiệm cận vừa tìm được, dùng thước đo xác định góc tiệm cận (góc hợp bởi trục hoành và tâm tiệm cận) và vẽ đường tiệm cận tương ứng với góc tính được ở trên và biểu diễn lên trên mặt phẳng phức như hình 6.4

+ Điểm tách nhập

Từ phương trình 6.4, xác định hàm k theo s như sau

$$\begin{aligned} 1 + \frac{k(s+1)}{s^3+4s^2+10s} &= 0 \\ k &= -\frac{s^3+4s^2+10s}{s+1} \\ \frac{dk}{ds} &= -\left(\frac{(3s^2+8s+10)(s+1)-s^3-4s^2-10s}{(s+1)^2}\right) = 0 \\ &= -\frac{2s^3+7s^2+8s+10}{(s+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

Giải phương trình trên có nghiệm

$s_1 = -2.7046$ (loại, vì điểm này nằm bên trái số chặn các cực và zero, $k < 0$)

$s_2 = -0.3977 + 1.3002j$; $s_3 = 0.3977 - 1.3002j$ (loại, vì điểm này nằm bên trái số chặn các cực và zero, $k < 0$).

Vậy không có điểm tách nhập đối với QĐNS

+ Giao điểm giữa QĐNS với trục ảo

Từ phương trình 6.4, hệ có PTĐT

$$s^3 + 4s^2 + 10s + k(s+1) = 0$$

Thay $s = j\omega$ vào phương trình đặc trưng trên được

$$\begin{aligned} -j\omega^3 - 4\omega^2 + 10j\omega + k(j\omega+1) &= 0 \\ \Rightarrow -4\omega^2 + k + j\omega(-\omega^2 + 10 + k) &= 0 \end{aligned}$$

Hay

$$-4\omega^2 + k + j\omega(-\omega^2 + 10 + k) = 0 \quad (6.5)$$

Cho phần thực và phần ảo của phương trình (6.5) bằng 0 ta được

$$\begin{cases} -4\omega^2 + k = 0 \\ \omega(-\omega^2 + 10 + k) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega = 0 \\ k = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega = 0 \\ k = 10 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega = \pm\sqrt{10} \\ k = -10 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

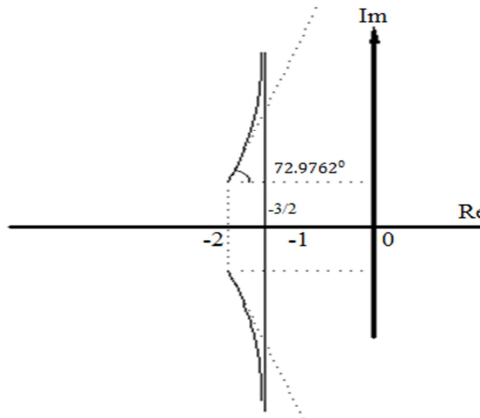
Do k tìm được đều âm nên không thỏa mãn yêu cầu của bài toán (vẽ QĐNS cho trường hợp $k>0$). Do đó QĐNS không giao với trục ảo.

+ Góc xuất phát

Do hệ có cực phức nên cần xác định góc xuất phát tại cực $p_{1,2} = -2 \pm 2.4495j$. Tuy nhiên trong bài toán này cực phức được chọn để tính góc xuất phát là $p_2 = -2 + 2.4495j$. Góc xuất phát được tính như sau

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 180^\circ + \arg(p_2 - z_1) - \arg(p_2 - p_1) - \arg(p_2 - p_3) \\ &= 180^\circ + \arg(-2 + 2.4495j + 1) - \arg(-2 + 2.4495j - 0) - \arg(-2 + 2.4495j + 2 + 2.4495j) \\ &= 180^\circ + \arg(-1 + 2.4495j) - \arg(-2 + 2.4495j) - \arg(4.899j) \\ &= 180^\circ + 112.2076^\circ - 129.2314^\circ - 90^\circ = 72.9762^\circ\end{aligned}$$

Biểu diễn góc xuất phát lên trên mặt phẳng phức tại điểm p_2 , kẻ một tia song song với trục thực và dùng thước đo góc hợp bởi tia vừa vẽ và điểm p_2 để xác định đường tiệm cận. Do QĐNS có tính chất đối xứng qua trục thực nên việc vẽ góc xuất phát tại p_1 bằng cách lấy đối xứng qua trục thực của điểm p_2 (xem hình 6.4). Giữa cực tại $s=0$ và zero tại $s=-1$ không có điểm tách vì QĐNS sẽ xuất phát từ cực $s=0$ và kết thúc ở zero $s=-1$ (nhánh QĐNS thứ nhất). Hai nhánh còn lại xuất phát từ cực p_1 và p_2 tiến ra vô cùng dọc theo đường tiệm cận. Nhánh của QĐNS không cắt trục thực (xem hình 6.4).

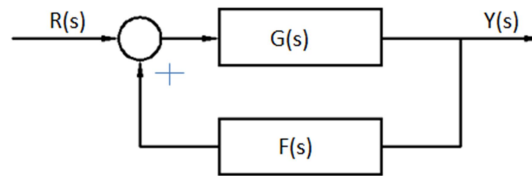


Hình 6.4 Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống

6.3 Vẽ QĐNS đối với hệ hồi tiếp dương

QĐNS của hệ có hồi tiếp dương là tập hợp tất cả các nghiệm của PTĐT khi $k \in (0 \rightarrow \infty)$

Cho hệ hồi tiếp dương như hình 6.5



Hình 6.5 hệ thống hồi tiếp dương

Từ hình 6.5, hàm truyền hệ kín được thiết lập như sau

Hàm truyền của hệ kín được thiết lập như sau

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)F(s)}$$

PTĐT của hệ thống $1 - G(s)F(s) = 0$. Hay PTĐT có dạng

$$1 - k \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

Trong đó $N(s)$ là đa thức tử số theo s , $D(s)$ là đa thức mẫu số theo s , k là hằng số

Điều kiện biên độ $\left| k \frac{N(s)}{D(s)} \right| = 1$

Điều kiện về pha $\tan^{-1} \left(k \frac{N(s)}{D(s)} \right) = \pm 180^\circ (2l)$, trong đó $l = 0, 1, 2, \dots$

❖ **Các bước vẽ QĐNS đối với hệ thống có hồi tiếp dương đơn vị (trường hợp $k < 0$)**

Qui tắc 1: Xác định số nhánh QĐNS = bậc của PTĐT = số cực của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

Qui tắc 2:

+ $k = 0$ các nhánh QĐNS xuất phát từ cực của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

+ $k = \infty$, m nhánh QĐNS tiến đến n zero của $k \frac{N(s)}{D(s)}$

+ $n - m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo tiệm cận (xem qui tắc 5,6)

Qui tắc 3: QĐNS đối xứng qua trục thực

Qui tắc 4: $k > 0$, điểm thuộc QĐNS nằm bên trái các số lẻ của cực và zero

Qui tắc 5: Góc tạo bởi trục thực và đường tiệm cận của QĐNS được xác định

$$\beta = \pm \frac{2l\pi}{n-m}, l = 0, 1, 2, \dots$$

Trong đó n là số cực và m là số zero

Qui tắc 6: Tâm của tiệm cận hay giao giữa trục thực với đường tiệm cận tại A được xác định bởi

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

Trong đó p_i là cực thứ i và z_j là zero thứ j

Qui tắc 7: Điểm tách nhập của QĐNS (nếu có) nằm trên trục thực là nghiệm phương trình

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

Qui tắc 8: Giao điểm giữa QĐNS với trục ảo được xác định bằng cách thay $s = j\omega$ vào PTĐT. Sau đó cho phần thực bằng 0 và phần số ảo bằng 0 để xác định giá trị của ω và k . Hoặc cũng có thể xác định giao điểm giữa QĐNS với trục ảo được xác định bằng cách lập bảng Routh

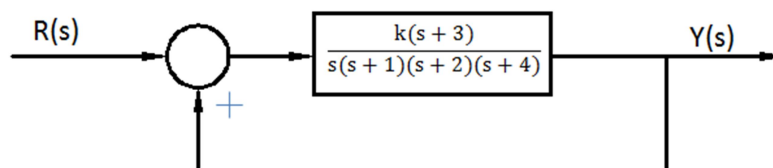
S^n	a_0	a_2	a_4		a_{n-2}	a_n
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5		a_{n-3}	a_{n-1}
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3		b_m	0
.....		...		...	0	
S^2	c_1	c_2	c_3	0		
S^1	d_1	d_2	0			
S^0	e_1	0				

Cho giá trị tại dòng s^1 và cột 1 của bảng Routh bằng không sẽ tìm được giá trị của k . Cho dòng s^2 với phương trình $c_1 s^2 + c_2 = 0$ sẽ tìm được giá trị giao giữa QĐNS với trục ảo.

Qui tắc 9: Đối với $k \frac{N(s)}{D(s)}$ có cực phức thì cần phải xác định góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_j . Góc này được xác định bởi

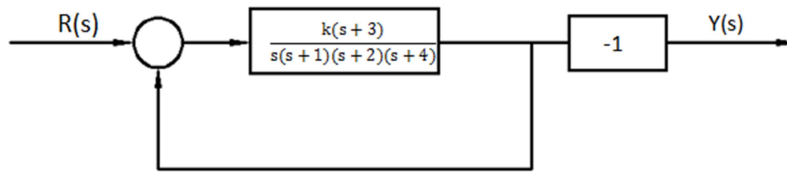
$$\theta_j = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \arg(p_j - z_i) - \sum_{i \neq j}^n \arg(p_j - z_i)$$

Ví dụ 6.3: Cho hệ thống có sơ đồ khối với hồi tiếp dương (trường hợp $k > 0$) như hình 6.6



hình 6.6 Hệ thống hồi tiếp dương

hệ thống trên có thể chuyển thành hệ thống với trường hợp $k > 0$ như hình 6.7



Hình 6.7 chuyển hệ thống từ trường hợp $k < 0$ sang trường hợp $k > 0$

Giải

Bước 1: Có 4 nhánh QĐNS

+ Có 4 cực tại $p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = -2$; $p_4 = -4$

+ Có 1 zero tại $z_1 = -3$

Bước 2: Góc tạo bởi trục thực và đường tiệm cận của QĐNS được xác định như sau:

$$\beta = \pm \frac{2l\pi}{n-m}, l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\beta_1 = \pm \frac{2 \times 0 \times \pi}{4-1} = 0$$

$$\beta_2 = \pm \frac{2 \times 1 \times \pi}{4-1} = \pm \frac{2}{3} \pi$$

Bước 3: Tâm của tiệm cận hay giao giữa trục thực với đường tiệm cận tại A được xác định bởi

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{0-1-2-4-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

Bước 4: Điểm tách nhập của QĐNS (nếu có) nằm trên trục thực là nghiệm của phương trình

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

Phương trình đặc trưng

$$1 - \frac{k(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)} = 0$$

$$k = \frac{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}{(s+3)^2}$$

suy ra

$$\frac{dk}{ds} = \frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 84s + 24}{(s+3)^2} = 0$$

Giải ra được

$$S1 = -3.3110 + 0.6812j \quad (k < 0)$$

$$S2 = -3.3110 - 0.6812j \quad (k < 0)$$

$$S3 = -1.6097 \quad (k < 0)$$

$$S4 = -0.4349 \quad (k > 0)$$

Bước 5: giao điểm QĐNS với trục ảo

Từ hình 4.9, PTĐT được xác định

$$s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8-k)s - 3k = 0$$

thay $s=j\omega$ vào PTĐT được

$$\omega^3 - 3k + (8-k-7\omega^2)\omega j = 0$$

hay

$$\begin{cases} \omega^3 - 3k = 0 \\ (8 - k - 7\omega^2)\omega = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \omega^2 - 3k = 0 \\ \omega = 0, k = 0 \\ \omega = \sqrt{\frac{8-k}{7}}, k = -318.39, k = -1.61, k = 1 \end{cases}$$

Từ yêu cầu của bài toán là vẽ QĐNS trong trường hợp $k < 0$ nên k chỉ nhận 2 giá trị là $k = -318.39$ ($\omega = 6.8$) và $k = -1.61$ ($\omega = 1.2$)

QĐNS bao gồm 4 nhánh. Giữa hai cực liên tiếp tại $s=0$ và $s=-1$ có một điểm tách vì không có zero để kết thúc. Do đó sẽ có hai nhánh của QĐNS đi qua điểm tách này. Nhánh thứ nhất xuất phát từ cực $s=0$ qua điểm tách và tiến ra vô cùng dọc theo đường tiệm cận. Nhánh thứ hai xuất phát từ cực $s=-2$ và kết thúc ở zero $s=-3$. Nhánh QĐNS thứ tư xuất phát từ cực $s = -4$ và tiến ra âm vô cùng dọc theo đường tiệm cận (có một đường tiệm cận nằm trùng với trục hoành).

6.4 Thiết kế bộ điều khiển dùng QĐNS

- Thiết kế bộ điều khiển: là bổ sung vào hệ thống một vài thành phần để hệ thống thỏa mãn một số yêu cầu về chất lượng như độ ổn định, độ vọt lố, sai số xác lập của đáp ứng...

- Các thành phần được dùng để bổ sung: sớm pha, trễ pha, trễ pha sớm, tỉ lệ, tích phân tỉ lệ, vi phân tỉ lệ, vi tích phân tỉ lệ

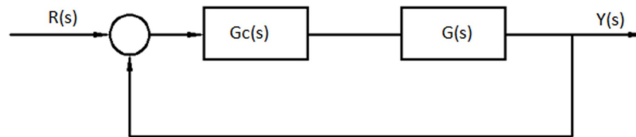
- Phương pháp thiết kế: tùy theo đặc thù của hệ thống, người thiết kế có thể dùng QĐNS, giản đồ Bode hay phương pháp gán cực, LQR....

Giả sử cho hệ thống trước khi thiết kế như hình 6.8



Hình 6.8 Hệ thống trước khi thiết kế

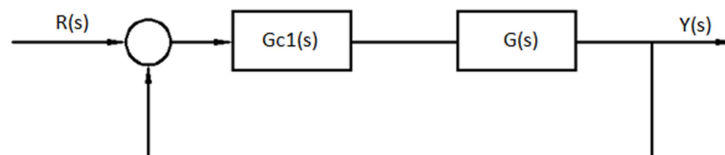
Hệ thống sau khi thiết kế được thêm vào một khâu $G_c(s)$ nối tiếp với hàm truyền hệ hở $G(s)$ được trình bày ở hình 6.9. Khâu bù này phải được thiết kế dựa trên tiêu chuẩn về chất lượng.



Hình 6.9 Hệ thống sau khi thiết kế

6.5. Phương pháp bù sớm pha

Cho hệ thống được thiết kế bằng phương pháp bù sớm pha như hình 6.10



Hình 6.10 Hệ thống trước khi thiết kế

Trong đó khâu bù sớm pha có dạng:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (\alpha > 1)$$

Yêu cầu thiết kế: cải thiện đáp ứng

Các bước thiết kế khâu bù sớm pha

Bước 1: Xác định cặp nghiệm cực trội quyết định dực vào biểu thức

$$S_{1,2} = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Các công thức liên quan để xác định hệ số dao động tắt dần ε và tần số dao động tự nhiên ω_n

Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 5%

$$T_{qd} = \frac{3}{\varepsilon\omega_n}$$

Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 2%

$$T_{qd} = \frac{4}{\varepsilon\omega_n}$$

Hay thời gian quá độ dựa vào chu kì T

$$T_{qd} = t \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Độ vọt lố POT

$$POT = \exp\left(-\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

Bước 2: xác định góc pha cần bù để cặp cực trội quyết định nằm trên QĐNS

$$\phi = -180^\circ + \sum_{i=1}^n \arg(s_1 - z_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s_1 - p_i)$$

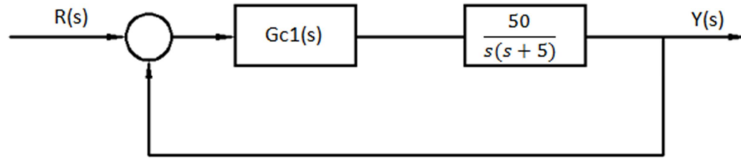
Trong đó p_i và z_i lần lượt là cực thứ i và zero thứ i của $G(s)$ trước khi thiết kế khâu bù

Bước 3: xác định vị trí cực và zero của khâu bù dựa trên QĐNS

Bước 4: Xác định hệ số khuếch đại k_c

$$|G_c(s)G(s)|_{s=s_1} = 1$$

Ví dụ 6.4: thiết kế khâu bù $G_c(s)$ của hệ thống được cho ở hình 6.11 để đáp ứng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh thỏa độ vọt lố dưới 20%, thời gian quá độ dưới 0.5s (theo tiêu chuẩn 2%).



Hình 6.11 Sơ đồ khối hệ thống

Do yêu cầu của bài toán là cải thiện đáp ứng nên khâu bù $G_c(s)$ có dạng

$$G_c(s) = G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (\alpha > 1)$$

Bước 1: Xác định cặp nghiệm cực trội quyết định

Theo yêu cầu của bài toán là $POT < 20\%$ nên

$$POT = \exp\left(-\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) < 20\%$$

$$\text{Hay } -\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < \ln(0.2)$$

$$-\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < 1.6$$

$$\varepsilon > 0.45$$

Vì $\varepsilon > 0.45$ nên ε được chọn là 0.707

Hơn nữa bài toán yêu cầu thời gian quá độ $< 0.5s$ theo tiêu chuẩn 2% nên

$$T_{qd} = \frac{4}{\varepsilon\omega_n} < 0.5$$

$$\omega_n > \frac{4}{\varepsilon 0.5} \Rightarrow \omega_n > 11.4$$

Do $\omega_n > 11.4$ nên chọn ω_n là 15 rad/s

Do đó cặp nghiệm cực trội quyết định được xác định

$$s_{1,2} = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$\text{Hay } s_{1,2} = -0.707 \times 15 \pm 15j\sqrt{1-(0.707)^2} = -10.5 \pm 10.5j$$

Bước 2: xác định góc pha cần bù để cặp cực trội quyết định nằm trên QĐNS

$$\phi = -180^\circ + \sum_{i=1}^n \arg(s_1 - z_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s_1 - p_i)$$

$$= -180^\circ + \sum_{i=1}^2 \arg(s_1 - p_i)$$

$$= -180^\circ + \arg(-10.5 + 10.5j - 0) + \arg(-10.5 + 10.5j - (-5))$$

Vậy

$$\phi = -180^0 + \tan^{-1}\left(\frac{10.5}{-10.5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{10.5}{-5.5}\right) = 72.6^0$$

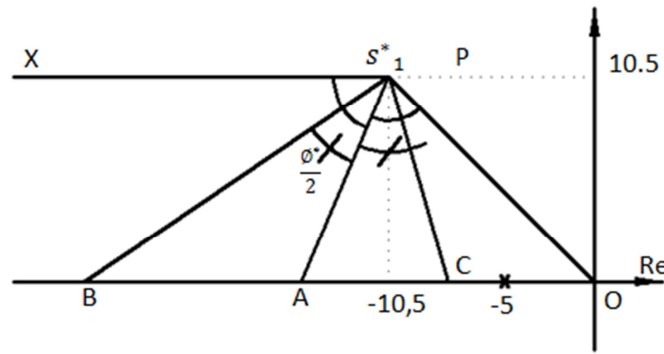
Hoặc cũng có thể xác định góc pha cần bù theo cặp nghiệm cực trội như sau

$$\begin{aligned}\phi &= -180^0 + (\beta_1 + \beta_2) \\ &= -180^0 + (135^0 + 117.6^0) \\ &= 72.6^0\end{aligned}$$

Trong đó các góc β_1 và β_2 được xác định như hình 6.12

Hình 6.12 xác định góc pha cần bù bằng cách đo các góc hợp bởi trục thực và tia xuất phát từ cực trội đến các cực hệ hở

Bước 3: xác định vị trí cực và zero của khâu cần bù



Hình 6.12 xác định cực và zero của khâu bù sớm pha

Biểu diễn cặp nghiệm cực trội lên mặt phẳng phức, xác định được đỉnh P là điểm s_1 với biên độ $\overline{OP}$ như hình 6.12. Từ đỉnh P kẻ một tia Px song song với trục thực. Từ đỉnh P kẻ một tia phân giác PA của góc OpX, cắt trục thực tại A. Từ đỉnh P kẻ một tia PB nằm bên trái so với tia PA, cắt trục thực tại B và tạo với tia PA một góc $\phi/2$. Và $\overline{OB}$ chính là cực của khâu bù.

Từ đỉnh P vẽ một tia PC về bên phải so với tia PA, cắt trục thực tại C và tạo với tia PA một góc $\phi/2$. Và $\overline{OC}$ chính là zero của khâu bù. Do đó chỉ cần xác định hai giá trị $\overline{OB}$ từ hình 6.12, xác định được $\overline{OB}$ và $\overline{OC}$ như sau

$$\overline{OB} = \overline{OP} \frac{\sin\left(\frac{\overline{OPx} + \phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overline{OPx} - \phi}{2}\right)} = 10.5\sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{135^0}{2} + \frac{72.6^0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{135^0}{2} - \frac{72.6^0}{2}\right)} = 10.5\sqrt{2} \frac{\sin(103.8^0)}{\sin(31.2^0)} \approx 28$$

$$\overline{OC} = \overline{OP} \frac{\sin\left(\frac{\overline{OPx} - \phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overline{OPx} + \phi}{2}\right)} = 10.5\sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{135^0}{2} - \frac{72.6^0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{135^0}{2} + \frac{72.6^0}{2}\right)}$$

Do đó khâu bù được thiết kế như sau

$$G_c(s) = k_c \frac{s+8}{s+28}$$

Bước 4: xác định hệ số khuếch đại k_c dựa vào biểu thức $|G_c(s)G(s)|_{s=s_1} = 1$

Hay

$$\left| k_c \frac{-10.5+10.5j+8}{-10.5+10.5j+28} \times \frac{50}{(-10.5+10.5j)(-10.5+10.5j+5)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow k_c \frac{10.8 \times 50}{20.4 \times 15 \times 11.9} = 1$$

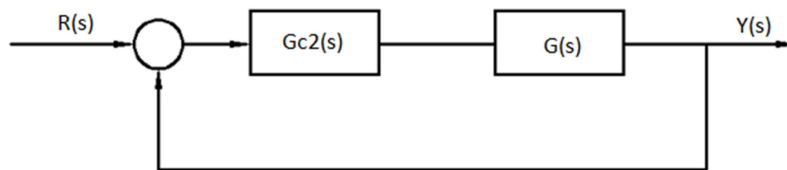
$$\Rightarrow k_c = 6.7$$

Vậy khâu bù sớm pha được thiết kế như sau

$$G_c(s) = 6.7 \frac{s+8}{s+28}$$

6.6 Phương pháp bù trễ pha

Cho hệ thống được thiết kế bằng phương pháp bù trễ pha như hình 6.13



Hình 6.13 Sơ đồ khối hệ thống

Trong đó khâu bù trễ pha có dạng

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}}, \beta < 1$$

Yêu cầu của bài toán: cải thiện sai số xác lập

Các bước xác định khâu hiệu chỉnh trễ pha

Bước 1: Xác định β dựa vào các yêu cầu về sai số xác lập

$$\beta = \frac{k_p}{k_p^*} \text{ hoặc } \beta = \frac{k_v}{k_v^*} \text{ hoặc } \beta = \frac{k_a}{k_a^*}$$

Trong đó

- Nếu tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị $R(s) = 1/s$

$$E_{xl} = \frac{1}{1+k_p} \text{ với } k_p \text{ là hệ số sai số vị trí}$$

Và k_p được xác định như sau

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s)$$

Nếu tín hiệu vào là hàm dốc $R(s) = 1/s^2$

$$E_{xl} = \frac{1}{k_v}, \text{ với } k_v \text{ là hệ số sai số vận tốc}$$

K_v được xác định như sau

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)F(s)$$

Nếu tín hiệu vào là hàm parabol $R(s) = 1/s^3$

$$E_{xl} = \frac{1}{k_a}, \text{ với } k_a \text{ là hệ số sai số gia tốc}$$

K_a được xác định như sau

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s)$$

Bước 2: Chọn zero của khâu bù sao cho nhỏ hơn rất nhiều so với trị tuyệt đối của cặp nghiệm cực trội quyết định như sau

$$\frac{1}{\beta T} \ll |Re(s_{1,2}^*)|$$

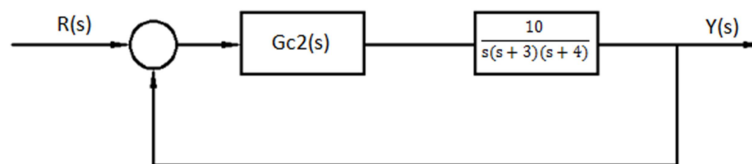
Bước 3: Tính cực của khâu bù

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{1}{\beta T}$$

Bước 4: Tính k_c thỏa mãn về điều kiện biên độ

$$|Gc(s)G(s)|_{s=s_{1,2}^*} = 1$$

Ví dụ 6.5: Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình 6.14



Hình 6.14 Sơ đồ khối của hệ thống

Xác định $G_c(s)$ sao cho hệ thống sau khi bù có sai số đối với tín hiệu vào là hàm dốc là 0.02 và đáp ứng quá độ thay đổi không đáng kể

Giải

Do yêu cầu của bài toán liên quan đến sai số xác lập nên $G_c(s)$ là khâu bù trễ pha có dạng

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}}, \beta < 1$$

Bước 1: Xác định β dựa vào các yêu cầu về sai số xác lập

$$e_{xl}^* = \frac{1}{k_v^*}, \text{ với } k_v \text{ là hệ số sai số vận tốc}$$

$$\Rightarrow k_v^* = 1/e_{xl}^* = 1/0.02 = 50$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) F(s) = K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{s(s+3)(s+4)} = \frac{10}{12}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{k_v}{k_v^*} = \frac{10/12}{50} = \frac{1}{60}$$

Bước 2: Chọn zero của khâu bù

PTĐT trước khi bù

$$1 + \frac{10}{s(s+3)(s+4)} = 0$$

Giải phương trình trên tìm được nghiệm

$$s_1 = -5$$

$$s_2 = -1 + 1j$$

$$s_3 = -1 - 1j$$

Trong đó s_2 và s_3 là cặp nghiệm cực trội quyết định

Chọn $1/\beta T \ll |Re(s_{1,2}^*)| \ll 1$ hay chọn $1/\beta T = 0.1$

Bước 3: Tính cực của khâu bù

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{1}{\beta T} = 1/60 \times 0.1 = 0.0017$$

Vậy khâu bù được thiết kế:

$$G_c(s) = k_c \frac{s+0.1}{s+0.0017}$$

Bước 4: Xác định hệ số khuếch đại

$$|G_c(s)G(s)|_{s=s^*_{1,2}} = 1$$

$$\left| k_c \frac{s+0.1}{s+0.0017} \frac{10}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=1+j} = 1$$

$$\Rightarrow k_c = -1.0042$$

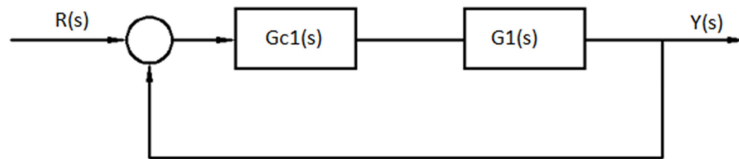
Vậy khâu bù trễ pha được thiết kế như sau

$$G_c(s) = 1.0042 \frac{s+0.1}{s+0.0017}$$

6.7 Phương pháp bù sớm trễ pha

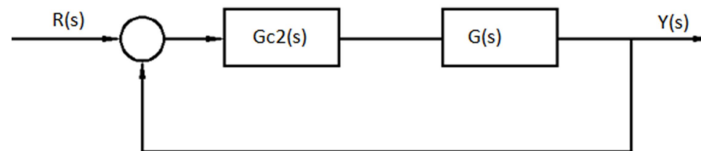
Cho khâu bù sớm trễ pha với $G_c(s) = G_{c1}(s).G_{c2}(s)$, trong đó $G_{c1}(s)$ là khâu bù sớm pha và $G_{c2}(s)$ là khâu bù trễ pha

Bước 1: Thiết kế khâu bù sớm pha $G_{c1}(s)$ thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập bằng cách đặt $G(s) = G_{c1}(s)G_1(s)$ như hình 6.15



Hình 6.15

Bước 2: Thiết kế khâu bù trễ pha $G_{c2}(s)$ thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập bằng cách đặt $G(s) = G_{c1}(s)G_1(s)$ như hình 6.16



Hình 6.16

Ví dụ 6.6: Xác định $G_c(s)$ trong hệ thống như hình 6.17 sao cho hệ thống sau khi thiết kế sẽ có cặp nghiệm cực trội với hệ số dao động tắt dần $\varepsilon = 0.5$, tần số dao động tự nhiên $\omega_n = 7\text{rad/s}$ và hệ số vận tốc $k_v = 100$

Từ đỉnh P vẽ tia PC về bên phải so với tia PA, cắt trục thực tại C và tạo với tia PA một góc $\phi^*/2$. Và $\overline{OC}$ chính là zero của khâu bù. Do đó chỉ cần xác định hai giá trị $\overline{OB}$ và $\overline{OC}$ là có thể xác định được cực và zero của khâu bù.

Từ hình vẽ xác định được $\overline{OB}$ và $\overline{OC}$ như sau

$$\overline{OB} = \overline{OP} \frac{\sin\left(\frac{\overline{OPx}}{2} + \frac{\phi^*}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overline{OPx}}{2} - \frac{\phi^*}{2}\right)} = 6 \frac{\sin\left(\frac{125^0}{2} + \frac{17.6^0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{125^0}{2} - \frac{17.6^0}{2}\right)} = 7$$

$$\overline{OC} = \overline{OP} \frac{\sin\left(\frac{\overline{OPx}}{2} - \frac{\phi^*}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\overline{OPx}}{2} + \frac{\phi^*}{2}\right)} = 6 \frac{\sin\left(\frac{125^0}{2} - \frac{17.6^0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{125^0}{2} + \frac{17.6^0}{2}\right)} = 5$$

Do đó khâu bù được thiết kế như sau

$$G_{cl}(s) = k_c \frac{s+5}{s+7}$$

Bước 3: xác định hệ số khuếch đại k_c dựa vào biểu thức $|G_c(s)G(s)|_{s=s^{*1,2}} = 1$

Hay

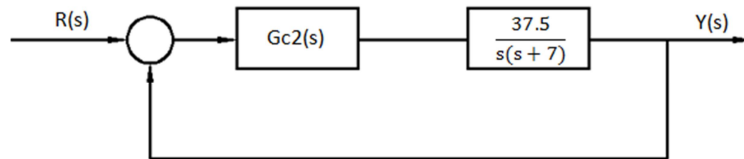
$$\left| k_c \frac{-3.5+5j+5}{-3.5+5j+7} \cdot \frac{5}{(-3.5+5j)(-3.5+5j+5)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow k_c = 7.5$$

Vậy khâu bù sớm pha được thiết kế như sau

$$G_{cl}(s) = 7.5 \frac{s+5}{s+7}$$

Thiết kế khâu bù trễ pha, hình 6.19



Hình 6.19 Khâu bù trễ pha

Trong đó $G(s) = G_{cl}(s)G_1(s) = 7.5 \frac{s+5}{s+7} \cdot \frac{5}{s(s+5)} = \frac{37.5}{s(s+7)}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)F(s) = K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{37.5}{s(s+7)} = \frac{37.5}{7}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{k_v}{k_v^*} = \frac{\frac{37.5}{7}}{100} = \frac{37.5}{700} = 0.05$$

Bước 4: chọn zero của khâu trễ pha

Phương trình DT trước khi bù

$$1 + \frac{37.5}{s(s+7)} = 0$$

Giải phương trình trên tìm được nghiệm

$$s_2 = -3.5 + 5j$$

$$s_3 = -3.5 - 5j$$

Trong đó nghiệm s_2 và s_3 là cặp nghiệm cực trội quyết định

Chọn $1/\beta T \ll |Re(s_{1,2}^*)| \ll 1$ hay chọn $1/\beta T = 0.1$

Bước 3: Tính cực của khâu bù

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{1}{\beta T} = 0.05 \times 0.1 = 0.005$$

Vậy khâu bù được thiết kế:

$$G_c(s) = k_c \frac{s+0.1}{s+0.005}$$

Bước 4: Xác định hệ số khuếch đại

$$|G_c(s)G(s)|_{s=s_{1,2}^*} = 1$$

$$\left| k_c \frac{s+0.1}{s+0.005} \cdot \frac{37.5}{s(s+7)} \right|_{s=1+j} = 1$$

$$\Rightarrow k_c = 1.002$$

Vậy khâu bù trễ pha được thiết kế như sau

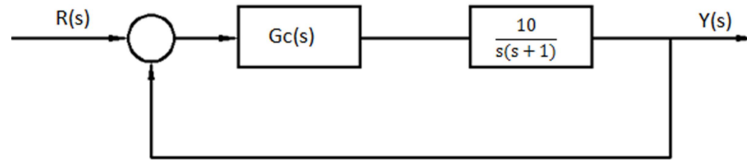
$$G_c(s) = 1.002 \frac{s+0.1}{s+0.005}$$

6.8 Bài tập

1 Vẽ QĐNS trong trường hợp $k > 0$ cho hệ thống có hồi tiếp đơn vị với hàm truyền

$$G(s) = k \frac{s+10}{s(s+3)(s+5)}$$

2. Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình 6.20

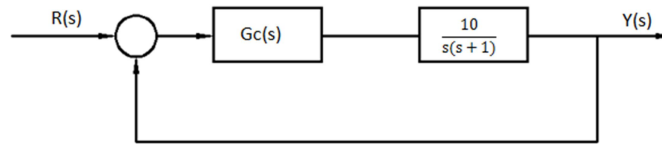


Hình 6.20 Sơ đồ khối hệ thống

a, với $G_c(s) = 1$, vẽ QĐNS cho hệ thống trên trong trường hợp $k > 0$

b, Tìm $G_c(s)$ sao cho hệ thống có sai số đối với tín hiệu vào là hàm bậc là 0.05 và đáp ứng quá độ thay đổi không đáng kể

3 Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình sau



Hình 6.21

a, với $G_c(s) = 1$, vẽ QĐNS cho hệ thống trên trong trường hợp $k > 0$

b, Tìm $G_c(s)$ sao cho đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là hàm dốc có độ vọt lố là 20% và thời gian trễ $t=2s$

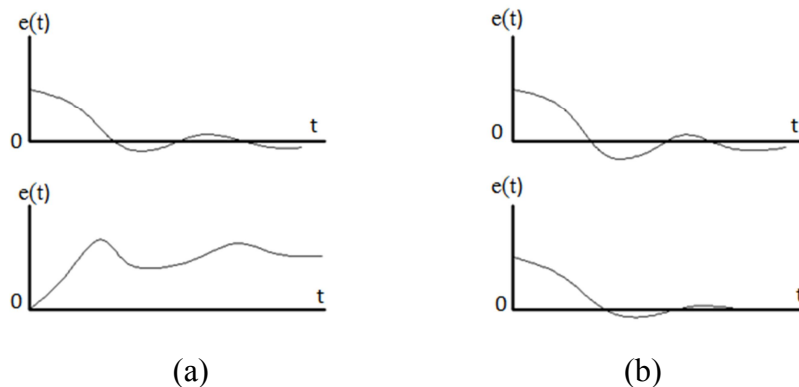
CHƯƠNG 7

ẢNH HƯỞNG CỦA BỘ ĐIỀU KHIỂN PID LÊN CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG

7.1 Ảnh hưởng của bộ điều khiển PID lên chất lượng hệ thống

Khi sử dụng bộ điều khiển tỉ lệ để điều khiển đối tượng thì hàm truyền của bộ điều khiển này không có khâu tích phân $1/s$. Do đó đáp ứng nấc của hệ sẽ tồn tại sai số xác lập. Sai số này sẽ bị triệt tiêu nếu sử dụng thêm bộ điều khiển có khâu tích phân.

Khi dùng bộ điều khiển tích phân để điều khiển đối tượng thì ngõ ra của tín hiệu điều khiển $u(t)$ khác 0 trong khi sai số $e(t)$ bằng không (*hình 7.1a*). Nếu dùng bộ điều khiển tỉ lệ thì ngõ ra tín hiệu điều khiển $u(t)$ bằng 0 trong khi sai số $e(t)$ bằng không (*hình 7.1b*). Chú ý rằng nếu sử dụng bộ điều khiển tích phân để điều khiển đối tượng nhằm loại bỏ sai số xác lập thì đáp ứng của hệ thống có thể dẫn đến dao động với biên độ giảm dần hoặc thậm chí biên độ tăng lên không mon muốn.



Hình 7.1 Tín hiệu trước (a) và sau (b) khi dùng bộ điều khiển

7.1.1 Bộ điều khiển tỉ lệ

Xem hệ thống được trình bày trong hình 7.2. Sai số xác lập trong đáp ứng nấc của hệ được xác định như sau.

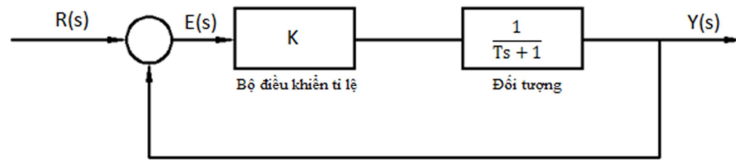
$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

$$\text{Vì } \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-Y(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \text{ nên sai số}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s) = \frac{1}{1+\frac{k}{Ts+1}}$$

Nếu tín hiệu ngõ vào là hàm nấc thì $R(s) = 1/s$ và sai số sẽ là

$$E(s) = \frac{Ts+1}{Ts+1+k} \cdot \frac{1}{s}$$

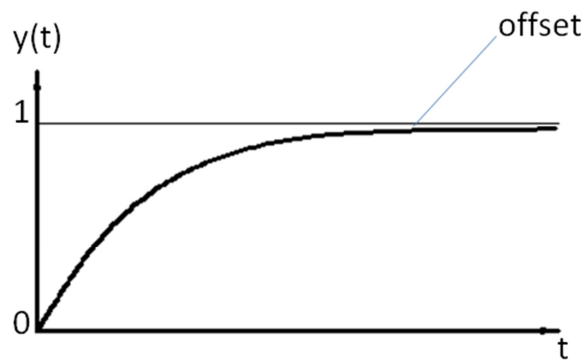


Hình 7.2 Hệ thống với bộ điều khiển tỉ lệ

Sai số xác lập được xác định như sau:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts+1}{Ts+1+k} = \frac{1}{k+1}$$

Nếu hệ thống không sử dụng bộ điều khiển tích phân thì đáp ứng nấc luôn có sai số xác lập. Sai số này được gọi là "offset". Hình 7.3 trình bày đáp ứng nấc với sai số xác lập



Hình 7.3 Đáp ứng nấc của hệ thống

7.1.2 Bộ điều khiển tích phân

Cho hệ thống được trình bày ở hình 7.4. Hàm truyền của hệ kín khi sử dụng bộ điều khiển tích phân được xác định như sau

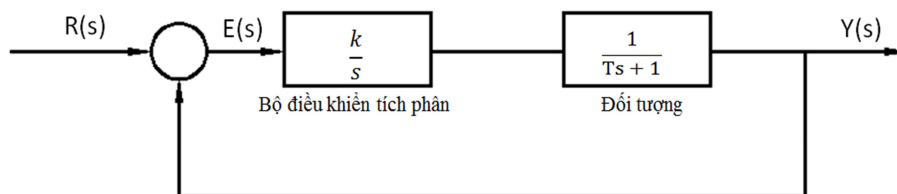
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s(Ts+1)+k}$$

Hơn nữa

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-Y(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+k}$$

Nếu tín hiệu vào là hàm nấc thì $R(s) = 1/s$ và sai số xác lập được xác định

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Ts+1)}{Ts^2+1+k} \frac{1}{s} = 0$$



hình 7.4 Hệ thống với bộ điều khiển tích phân

7.1.3 Bộ điều khiển vi phân

Một thuận lợi khi sử dụng bộ điều khiển vi phân là nó sẽ chống lại sự thay đổi quá lớn của sai số. Điều này có nghĩa là nó có những điều chỉnh đúng đắn cần thiết trước khi bên độ sai số trở nên quá lớn. Điều này giúp cho hệ thống trở nên ổn định. Mặc dù bộ điều khiển không ảnh hưởng trực tiếp đến sai số xác lập nhưng nó góp phần làm cho đáp ứng hệ thống tắt dần.

Bộ điều khiển vi phân không được sử dụng độc lập mà thường kết hợp với bộ điều khiển tỉ lệ hay tỉ lệ kết hợp với tích phân.

7.2 Chất lượng hệ thống

Bước đầu tiên trong phân tích hệ thống điều khiển là tìm ra mô hình toán của hệ thống. Một khi mô hình toán đã tìm được thì có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau để phân tích chất lượng hệ thống.

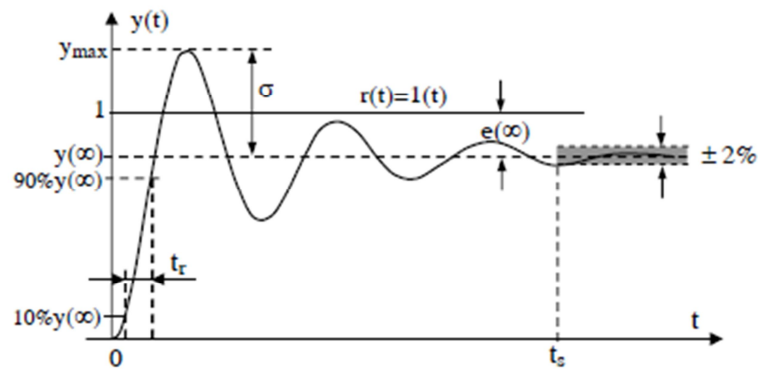
Trong phân tích và thiết kế hệ điều khiển, cần phải có sự so sánh về chất lượng đáp ứng của hệ điều khiển đối với các tín hiệu ngõ vào khác nhau.

Nhiều tiêu chuẩn thiết kế dựa trên đáp ứng khi dùng tín hiệu thử hay dựa trên đáp ứng của hệ khi điều kiện đầu thay đổi (không dùng tín hiệu thử). Sử dụng tín hiệu thử có thể được minh chứng sự tương quan của đặc tính đáp ứng của hệ thống đối với đối với tín hiệu thử ngõ vào và khả năng đương đầu với tín hiệu vào thực tế. Trong thực tế thì tín hiệu ngõ vào đối với phần lớn hệ điều khiển là không biết trước.

Các tín hiệu thử thường được sử dụng là hàm nấc, hàm dốc, hàm parabol, hàm xung, hàm sin và nhiễu trắng. Trong chương này tín hiệu thử là hàm nấc, hàm dốc, hàm parabol, và hàm xung. Bằng cách sử dụng các tín hiệu thử trên thì việc phân tích mô hình toán và đối tượng thực của của hệ điều khiển được thực hiện dễ dàng vì các tín hiệu này là các hàm đơn giản. Nếu ngõ vào đối với hệ điều khiển là một hàm thay đổi theo thời gian thì hàm dốc có thể là tín hiệu thử tốt. Tương tự như thế, nếu hệ thống có ngõ vào thay đổi đột ngột thì hàm nấc là tín hiệu thử tốt cho trường hợp này. Nếu ngõ vào của hệ thống chỉ tác động 1 lần thì tín hiệu thử tốt cho trường hợp này là hàm xung. Một khi hệ điều khiển được thiết kế dựa trên tín hiệu thử thì chất lượng đáp ứng của hệ thống khi áp vào tín hiệu ngõ vào thực cũng thỏa mãn.

7.2.1 Các chỉ tiêu chất lượng

Yêu cầu đầu tiên của một hệ thống điều khiển là ổn định. Tuy nhiên, yêu cầu này chưa đủ để đảm bảo hệ thống hoạt động tốt. Trong thực tế, hệ thống còn phải đồng thời thỏa mãn nhiều yêu cầu khác, bao gồm các chỉ tiêu chất lượng của đáp ứng quá độ (chất lượng động học) và sai số xác lập (chất lượng tĩnh học), khả năng chống nhiễu,... Thông thường, chất lượng động và tĩnh học của các hệ thống điều khiển được đánh giá thông qua đáp ứng quá độ đối với tín hiệu vào bậc thang đơn vị vì dễ thực hiện và đủ chính xác (Nếu biết được đáp ứng với tín hiệu vào bậc thang đơn vị thì có thể tính được đáp ứng của tín hiệu vào bất kỳ). Khi tác động vào hệ thống một tín hiệu bậc thang đơn vị $1(t)$ thì đáp ứng đầu ra sẽ có dạng điển hình là dao động tắt dần như trên hình 7.5.



Hình 7.5 Đáp ứng của hệ thống

Chất lượng của hệ thống được đánh giá qua các thông số (chỉ tiêu) sau:

- **Thời gian quá độ t_s hay t_{set} (settling time)** : là thời gian cần thiết để tín hiệu ra đạt và duy trì được giá trị xác lập $y(\infty)$ với sai số cho phép $\pm 2\%$ (hoặc $\pm 5\%$).
- **Độ vọt lố $\sigma\%$ hay POT** (độ quá điều chỉnh, Percent Overshoot): là sai lệch giữa giá trị cực đại và giá trị xác lập của đáp ứng, tính theo phần trăm :

$$POT = \sigma\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100$$

Hai chỉ tiêu độ vọt lố và thời gian quá độ thường trái ngược nhau: để có độ vọt lố nhỏ thì thời gian quá độ sẽ lớn và ngược lại.

- **Sai số xác lập $e(\infty)$ hay ess** (steady-state error): là sai lệch giữa tín hiệu vào và tín hiệu hồi tiếp ở trạng thái xác lập. Sai số xác lập đặc trưng cho độ chính xác của hệ thống điều khiển

$$\text{Tổng quát : } e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Với hệ hồi tiếp âm đơn vị và tín hiệu vào là hàm $1(t)$ thì :

$$e(\infty) = 1 - y(\infty) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Ngoài các thông số trên, người ta còn xét đến các thông số phụ là:

- Thời gian tăng trưởng **t_r (rise time)** : Là thời gian cần thiết để đáp ứng tăng từ 10% đến 90% giá trị xác lập $y(\infty)$.
- Thời gian để $y(t)$ đạt 50% giá trị xác lập **t_d (delay time)**.
- Thời gian lên đỉnh **t_p hay t_{peak}** : thời gian cần để đáp ứng đạt giá trị cực đại.
- Số lần dao động trước khi đáp ứng đạt giá trị xác lập.

7.3 Phân tích đáp ứng quá độ

7.3.1 Hệ bậc 1

Xem hệ bậc nhất được trình bày ở hình 7.6. Trong thực tế hệ này có thể được xem như một mạch RC và giống như một hệ nhiệt. Sơ đồ khối rút gọn của hình 7.6a được trình bày ở hình 7.6b. Hàm truyền kín được xác định như sau

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (7.1)$$

Và đáp ứng của hệ thống được phân tích tương ứng khi tín hiệu vào lần lượt là hàm nấc, hàm dốc, và hàm xung với điều kiện đầu bằng 0.

Đáp ứng nấc của hệ

Nếu tín hiệu ngõ vào là hàm nấc $r(t) = 1$ thì lấy biến đổi Laplace $r(t)$ được $R(s) = 1/s$. Thay giá trị này vào phương trình 7.1, ngõ ra sẽ là

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s}$$

Phân tích $Y(s)$ thành từng phân số được

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \quad (7.2)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của 7.2 được phương trình ngõ ra theo thời gian

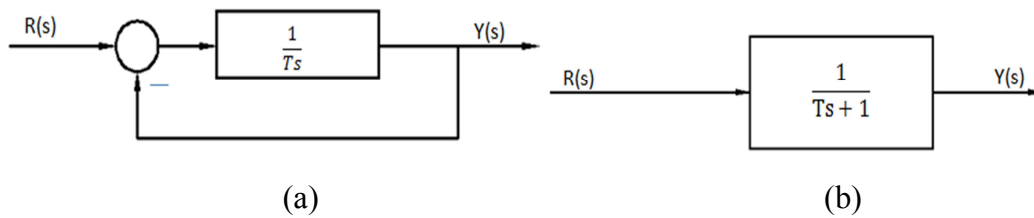
$$y(t) = 1 - e^{-t/T}, \text{ với } t \geq 0 \quad (7.3)$$

Từ phương trình 7.3 cho thấy

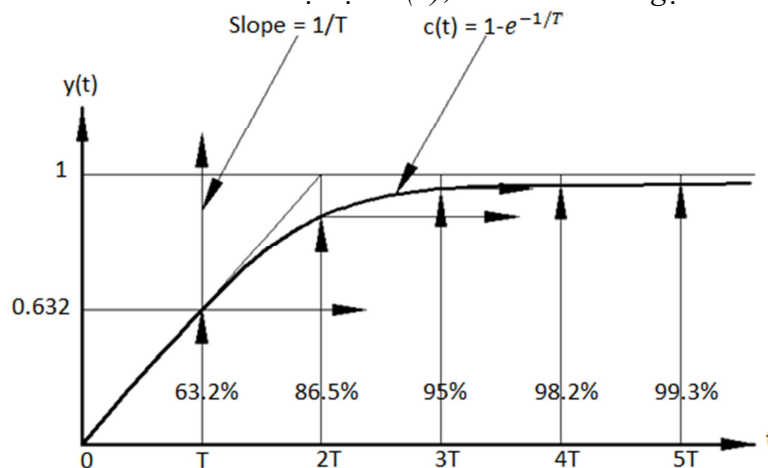
Nếu $t=0$ thì $y(t)=0$

Nếu $t = \infty$ thì $y(t) = 1$

Một đặc tính quan trọng khác của đáp ứng ngõ ra $y(t)$ là khi $t = T$ thì $y(t) = 0.632$ hay đáp ứng đạt 63.2% thay đổi so với tín hiệu tham khảo



Hình 7.6 sơ đồ khối của hệ bậc 1 (a); sơ đồ khối rút gọn của a (b)



Hình 7.7 Đáp ứng của ngõ ra $y(t)$ khi tín hiệu ngõ vào là hàm nấc

Ngõ ra sẽ đạt đến tín hiệu tham khảo $r(t)$ khi $t=T$ nếu duy trì tốc độ của đáp ứng. Từ phương trình 3.4 cho thấy độ dốc của $y(t)$ giảm từ $1/T$ tại $t=0$ đến 0 tại $t = \infty$

Đáp ứng $y(t)$ trong phương trình 3.3 được trình bày ở hình 7.7. Nếu thay đổi thời gian từ $t = T$ đến $t = \infty$ thì đáp ứng $y(t)$ thay đổi từ 63.2% đến giá trị cuối $y(t) = 1$. Nếu $t = 3T, 4T, 5T$ thì đáp ứng đạt giá trị tương ứng là 95%, 98.2%, 99.3%. Do đó nếu $t \geq 4T$ thì đáp ứng sẽ duy trì sự thay đổi xung quanh 2%. Và trạng thái xác lập chỉ đạt được khi t tiến đến vô cùng. Tuy nhiên trong thực tế chỉ cần ước lượng thời gian của đáp ứng thay đổi xung quanh 2% thì được xem là trạng thái xác lập.

7.3.2 Đáp ứng dốc của hệ

Nếu tín hiệu ngõ vào là hàm dốc $r(t) = t$, lấy biến đổi Laplace của $r(t)$ được $R(s) = 1/s^2$. Thay $R(s)$ vào phương trình được

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s^2}$$

Phân tích đáp ứng trên thành từng phân số được

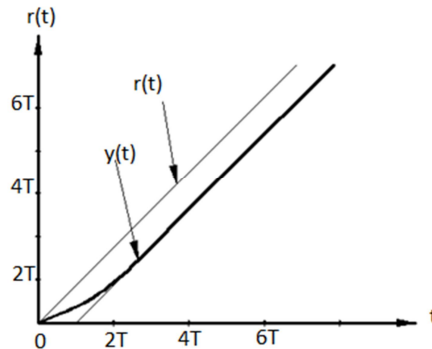
$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad (7.4)$$

Lấy biến đổi ngược của phương trình 7.4 được

$$y(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

Tín hiệu sai số được thiết lập

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$$



Hình 7.8 đáp ứng dốc của hệ được trình bày ở hình 7.6(a)

Khi t tiến đến vô cùng thì $e^{-t/T}$ sẽ bằng 0 và tín hiệu sai số $e(t) = T$ hay $e(\infty) = T$

Đáp ứng dốc của hệ được trình bày ở hình 7.8. Tín hiệu sai số sẽ bằng T khi thời gian t đủ lớn

7.3.3 Đáp ứng xung của hệ

Nếu tín hiệu ra là hàm xung $r(t) = \sigma(t)$, lấy biến đổi Laplace của $r(t)$ được $R(s) = 1$.

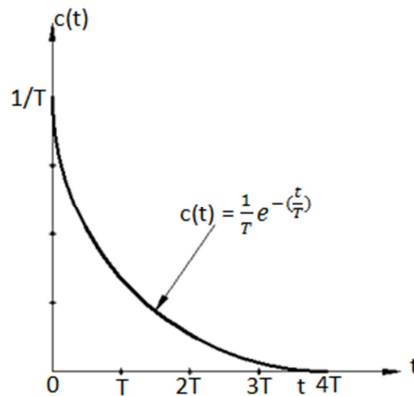
Thay $R(s)$ vào phương trình ta được

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của phương trình

$$y(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}, \text{ với } t \geq 0$$

Đáp ứng ở phương trình được trình bày ở hình 7.9



Hình 7.9 Đáp ứng xung của hệ

Một số đặc tính quan trọng đối với hệ LTI (hệ bất biến theo thời gian). Dựa vào các phân tích ở trên, đáp ứng của hệ sẽ là

$$y(t) = t \cdot T + Te^{-t/T} \text{ (với } t \geq 0) \text{ Nếu tín hiệu ngõ ra là hàm bậc}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} \text{ (với } t \geq 0) \text{ Nếu tín hiệu ngõ ra là hàm dốc}$$

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \text{ (với } t \geq 0) \text{ Nếu tín hiệu ngõ ra là hàm xung}$$

7.4 Hệ bậc hai

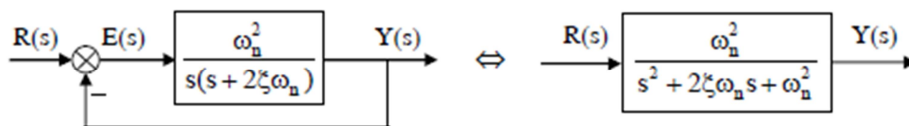
Việc khảo sát đáp ứng của hệ bậc hai rất được quan tâm vì:

- Nhiều hệ thống trong thực tế có hàm truyền bậc hai, như mạch RLC, động cơ DC điều khiển tốc độ bằng điện áp phản ứng, các hệ cơ khí mbk ,...

- Các hệ thống bậc cao có thể được xấp xỉ về hệ bậc hai để tiến hành phân tích và thiết kế sơ bộ với một độ chính xác hợp lý.

Xét hệ bậc hai có hàm truyền dạng:

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\varepsilon Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varepsilon \omega_n s + \omega_n^2}$$



Tín hiệu vào là hàm bậc thang đơn vị $r(t)=1(t)$.

Khi $\varepsilon > 1$, hệ có hai cực thực riêng biệt: $s_1 = -(1/T_1)$ và $s_2 = -(1/T_2)$

Với $T_1.T_2 = T^2$ và $T_1 + T_2 = 2\varepsilon T$

Đáp ứng quá độ không dao động

$$y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}$$

khi $\varepsilon = 1$, hệ có cặp thực, bội: $s_1 = s_2 = -(1/T) = -\omega_n$

Đáp ứng quá độ không dao động

$$y(t) = 1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T} = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n e^{-\omega_n t}$$

khi $0 < \varepsilon < 1$ hệ có cặp cực phức liên hợp $s_{1,2} = -\varepsilon\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Đáp ứng quá độ là dao động tắt dần:

$$y(t) = 1 - e^{-\varepsilon\omega_n t} \left(\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin\omega t \right) = 1 - \frac{e^{-\varepsilon\omega_n t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin(\omega t + \varnothing)$$

Trong đó

$$\Omega_n = 1/T \quad ; \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}; \quad \varnothing = \arccos\varepsilon;$$

Chúng ta sẽ phân tích trường hợp điển hình là đáp ứng dao động tắt dần.

a) Độ vọt lố POT :

Độ vọt lố xảy ra tại thời điểm tương ứng với điểm cực đại lớn nhất của $y(t)$.

Do đó cần tính đạo hàm của $y(t)$ và giải phương trình đạo hàm để tìm cực trị.

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\omega_n e^{-\varepsilon\omega_n t} \left(\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin\omega t \right) + e^{-\varepsilon\omega_n t} \left(\omega \sin\omega t - \frac{\varepsilon\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cos\omega t \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{-\varepsilon\omega_n t} \sin\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$n = 2k (k = 0, 1, 2, \dots)$: ứng với các cực tiểu

$n = 2k+1$: ứng với các cực đại

Điểm cực đại lớn nhất với $n=1$ và $t = t_{\text{peak}} = \pi/\omega$ nên

$$Y_{\text{max}} = 1 + e^{(-\pi\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2})}$$

$$\text{Độ vọt lố: POT} = \frac{Y_{\text{max}} - Y(\infty)}{Y(\infty)} = Y_{\text{max}} - 1$$

$$\Rightarrow \text{POT} = e^{(-\pi\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2})} \cdot 100$$

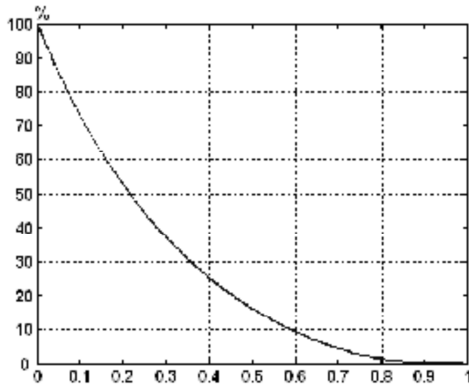
$$\text{Đặt } \beta = \sqrt{1-\varepsilon^2} \text{ thì } \text{POT} = e^{(-\pi\varepsilon/\beta)} \cdot 100$$

Ta thấy độ vọt lố POT của hệ bậc hai dao động chỉ phụ thuộc hệ số tắt dần ε .

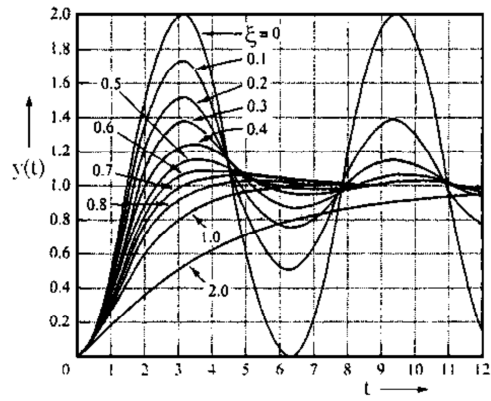
Khi ε tăng thì POT giảm và ngược lại.

Với $\varepsilon = 0,7$ thì $\text{POT} = 4,6\%$

Với $\varepsilon = 0,3$ thì $\text{POT} = 37,2\%$



(a) đường cong POT theo ε



(b) Đáp ứng quá độ hệ bậc 2

Hình 7.10

b/ Thời gian quá độ

-Theo tiêu chuẩn 2%

$$|y_{\min, \max} - y(\infty)| = 2\% \Leftrightarrow e^{(-\pi\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2})} = 0.02$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 50}{\pi\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{4}{\pi\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Do đó số lần dao động quanh giá trị xác lập trong thời gian quá độ:

$$N = \frac{n}{2} = \frac{2}{\pi\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon^2} : \text{được quy tròn về số nguyên gần nhất}$$

Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 2%:

$$t_s = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{4}{\omega_n\varepsilon} \Rightarrow t_s = \frac{4}{\varepsilon\omega_n}$$

Thời gian quá độ theo tiêu chuẩn 5%

Tính toán tương tự ta có: $t_s = \frac{3}{\varepsilon\omega_n}$

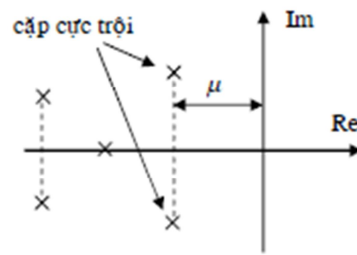
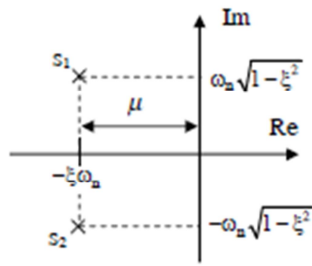
c/ Thời gian tăng trưởng

Được tính theo công thức

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} (1.589\varepsilon^2 - 0.1562\varepsilon^2 + 0.924\varepsilon + 1.0141)$$

7.5 Hệ bậc cao

Hệ bậc cao có nhiều hơn hai cực. Đáp ứng tương ứng với các cực nằm càng xa trục ảo suy giảm càng nhanh. Do đó có thể xấp xỉ hệ bậc cao về hệ bậc hai với hai cực nằm gần trục ảo nhất, gọi là cặp cực trội hay cặp cực quyết định.



Hình 7.11 Cặp cực của hệ bậc hai dao động Hình 7.12 Cặp cực trội của hệ bậc 5

Độ dự trữ ổn định : Trong miền thời gian, độ dự trữ ổn định μ được định nghĩa là khoảng cách từ trục ảo đến nghiệm cực (thực hoặc phức) gần nhất. Nói cách khác, hệ có độ dự trữ ổn định μ $\text{Re}(s_i) \leq -\mu$ với $s_i (i=1,2,...n)$ là các cực của hệ. Nếu μ càng lớn thì quá trình quá độ càng nhanh về xác lập, tính ổn định của hệ càng cao.

Ví dụ 7.1: cho hệ thống có hàm truyền $G(s) = \frac{1600}{s^2 + 20s + 1600}$

Hãy tìm POT; t_s theo tiêu chuẩn 2%

Giải

Ta có: $\omega_n = \sqrt{1600} = 40$

$$2\varepsilon\omega_n = 20 \Rightarrow \varepsilon = 0.25$$

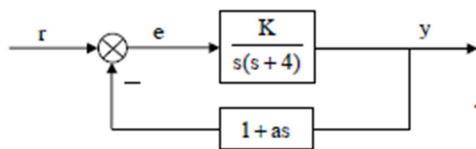
$$\beta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{1 - 0.25^2} = 0.968$$

$$\frac{\pi\varepsilon}{\beta} = \frac{0.25\pi}{0.968} = 0.81$$

Độ vọt lố: $\text{POT} = e^{(-\pi\varepsilon/\beta)} \cdot 100 = 44.43\%$

Thời gian quá độ: $t_s = \frac{4}{\varepsilon\omega_n} = \frac{5}{0.25 \times 40} = 0.4$ giây

Ví dụ 7.2: Cho hệ thống có sơ đồ như hình 7.13 xác định giá trị hệ số K và a để hệ có $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ và $\varepsilon = 0.7$



Hình 7.13

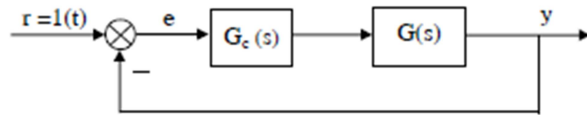
Giải

Hàm truyền của hệ thống

$$G_k(s) = \frac{\frac{k}{s(s+4)}}{1 + \frac{k(1+as)}{s(s+4)}} = \frac{k}{s^2 + (4+ka)s + k}$$

$$\text{Suy ra: } \omega_n^2 = k = 25; a = \frac{2\varepsilon\omega_n - 4}{25} = \frac{2 \times 0.7 \times 5 - 4}{25} = 0.12$$

Ví dụ 7.3: xét hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ



a/ Khảo sát đáp ứng của hệ thống với

Bộ điều khiển P : $G_c(s) = k_p = 1$

Đối tượng điều khiển PT₂: $G(s) = \frac{20}{s^2+8s+12}$

b/ Khảo sát tính ổn định và sai số xác lập của hệ với :

Bộ điều khiển P : $G_c(s) = k_p > 0$ tùy ý

Đối tượng điều khiển PT₂ : $G(s) = \frac{k}{T^2s^2+2\varepsilon Ts+1}$

Giải

a/ Khảo sát hệ thống với $k_p = 1$

Hàm truyền của hệ thống

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{\frac{20}{s^2+8s+12}}{1 + \frac{20}{s^2+8s+12}} = \frac{20}{s^2+8s+32}$$

Hàm quá độ $h(t) = y(t)$

Ảnh Laplace của hàm quá độ

$$H(s) = L[h(t)] = \frac{G_k(s)}{s} = \frac{20}{s(s^2+8s+32)} = \frac{20}{s[(s+4)^2+4^2]}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{5}{8} \left(\frac{1}{s} - \frac{(s+4)}{(s+4)^2+4^2} - \frac{4}{(s+4)^2+4^2} \right)$$

$$\Rightarrow h(t) = L^{-1}[H(s)] = \frac{5}{8} (1 - e^{-4t} \cos 4t - e^{-4t} \sin 4t)$$

$$= \frac{5}{8} - \frac{5}{8} e^{-4t} (\cos 4t + \sin 4t)$$

$$= \frac{5}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{8} e^{-4t} \sin(4t + 45^\circ)$$

Giá trị xác lập: $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5}{8}$

Sai số xác lập: $e(\infty) = 1 - h(\infty) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} > 0$

Để tính toán độ vọt lố và các chỉ tiêu thời gian, ta cần chuyển hàm truyền của hệ về dạng chuẩn của hệ bậc hai như sau:

$$G_k(s) = \frac{20}{s^2+8s+12} = \frac{k_2 \omega_n^2}{s^2+2\varepsilon \omega_n s + \omega_n^2}$$

Với $k_2 = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$: hệ số khuếch đại của hệ

Do hệ tuyến tính thỏa nguyên lý xếp chồng nên hệ số khuếch đại K 2 chỉ có tác dụng nhân tỉ lệ biên độ, hoàn toàn không làm thay đổi dạng đường đáp ứng quá độ. Do đó K2 chỉ làm thay đổi giá trị xác lập $h(\infty)$ và sai số xác lập $e(\infty)$. K2 không ảnh hưởng tới độ vọt lố POT (vì tính theo %) và các thông số thời gian của hệ thống, các thông số này được tính tương tự như khi $k_2=1$.

$$\omega_n = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 5.657$$

$$2\varepsilon\omega_n = 8 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

$$\beta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2}/2 = 0.707$$

$$\frac{\pi\varepsilon}{\beta} = \frac{0.707\pi}{0.707} = \pi = 3.14$$

$$\text{Độ vọt lố: POT} = e^{(-\pi\varepsilon/\beta)} \cdot 100 = e^{-\pi} \cdot 100 = 4.32\%$$

$$\text{Thời gian đỉnh: } t_{\text{peak}} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_n \beta} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \text{ giây}$$

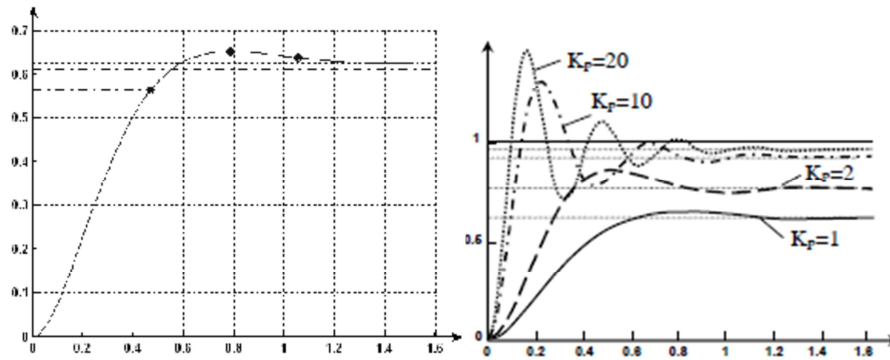
$$(\text{Nếu giải phương trình: } h(t) = \frac{5}{8} - \frac{5\sqrt{2}}{8} e^{-4t} \sin(4t + 45^\circ) = \frac{5}{8} (1 \pm 0.02))$$

Ta có giá trị chính xác $t_s = 1.05$ giây)

Thời gian tăng trưởng

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} (1.589\varepsilon^2 - 0.1562\varepsilon^2 + 0.924\varepsilon + 1.0141) = 0.38 \text{ giây}$$

Đáp ứng của hệ thống với $K_p=1$ được vẽ trên hình 7.14 (a).



Hình 7.14 đáp ứng quá độ của hệ thống cho ở ví dụ

b/ Khảo sát hệ thống khi hệ số khuếch đại $k_p > 0$ thay đổi tùy ý

Hàm truyền của hệ

$$G_k(s) = \frac{\frac{k.k_p}{T^2 s^2 + 2\varepsilon Ts + 1}}{1 + \left(\frac{k.k_p}{T^2 s^2 + 2\varepsilon Ts + 1} \right)} = \frac{k.k_p}{T^2 s^2 + 2\varepsilon Ts + 1 + k.k_p}$$

Phương trình đặc tính của hệ

$$T^2 s^2 + 2\varepsilon Ts + 1 + k.k_p = 0$$

Ta biết điều kiện cần và đủ để hệ bậc hai ổn định là các hệ số của phương trình đặc tính đều dương. Do đó hệ thống luôn ổn định với mọi giá trị $K_p > 0$ theo định lý giá trị cuối.

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{kk_p}{1+kk_p} < 1 \quad \forall k_p > 0$$

Do sai số xác lập

$$e(\infty) = 1 - h(\infty) = \frac{kk_p}{1+kk_p} > 0 \quad \forall k_p > 0$$

Đáp ứng của hệ kín khi k_p thay đổi được vẽ trên hình 5.8(b).

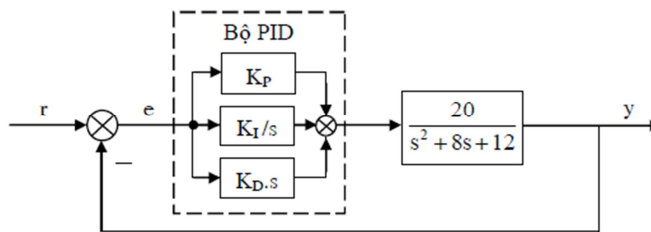
Nhận xét:

- Nếu dùng bộ P kết hợp với đối tượng điều khiển loại PT_1 , PT_2 thì hệ kín ổn định $K_p > 0$ và luôn có sai số xác lập $e(\infty) \neq 0$. Khi tăng hệ số khuếch đại K_p thì sai số xác lập sẽ giảm, rút ngắn được thời gian quá độ nhưng lại làm tăng tính dao động của đáp ứng (tức là tăng độ vọt lố).

- Nếu dùng bộ P kết hợp với đối tượng có bậc hàm truyền lớn hơn 2 (ví dụ, đối tượng gồm n_1 khâu PT_1 nối tiếp với n_2 khâu $PT_2, \dots$) thì phương trình đặc tính của hệ kín cũng có bậc lớn hơn 2, vì vậy khi tăng K_p vượt quá giá trị giới hạn, hệ thống sẽ mất ổn định.

Tóm lại, bộ điều chỉnh P với hệ số K_p chọn phù hợp cho phép đáp ứng của hệ kín nhanh chóng đạt giá trị xác lập với sai số nhất định (trừ trường hợp hàm truyền hệ hở có khâu I thì hệ kín có sai số xác lập bằng 0).

Ví dụ 7.4 Xét hệ thống có sơ đồ khối như hình vẽ



a) Khảo sát đáp ứng của hệ thống với :

Bộ điều khiển PID có thông số $k_p = 12$; $k_i = 36$; $k_d = 1$.

Đối tượng điều khiển PT_2 : $G(s) = \frac{20}{s^2 + 8s + 12}$

b) Giữ nguyên $K_p = 12$; $K_d = 1$ và thay đổi giá trị $K_i > 0$ tùy ý.

Khảo sát tính ổn định và sai số xác lập của hệ thống.

Giải

a/ Khảo sát hệ thống với $K_p = 12$; $K_i = 36$; $K_d = 1$.

Hàm truyền của bộ PID:

$$G_{PID}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s} = \frac{s^2 + 12s + 36}{s}$$

Hàm truyền mạch hở

$$\begin{aligned} G_{h(s)} = G_{PID}(s).G(s) &= \left(\frac{s^2 + 12s + 36}{s} \right) \cdot \left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12} \right) \\ &= \left(\frac{(s+6)^2}{s} \right) \left(\frac{20}{(s+2)(s+6)} \right) \\ &= \frac{20(s+6)}{s.(s+2)} \end{aligned}$$

Hàm truyền của hệ thống

$$G_k(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{PID}(s).G(s)}{1 + G_{PID}(s).G(s)} = \frac{\frac{20(s+6)}{s.(s+2)}}{1 + \frac{20(s+6)}{s.(s+2)}} = \frac{20(s+6)}{s^2 + 22s + 120}$$

Ảnh Laplace của hàm quá độ:

$$\begin{aligned} H(s) = L[h(t)] &= \frac{G_k(s)}{s} = \frac{20(s+6)}{s(s^2 + 22s + 120)} = \frac{20(s+6)}{s(s+10)(s+12)} \\ \Rightarrow h(t) = L^{-1}[H(s)] &= 1 + 4e^{-10t} - 5e^{-12t} \end{aligned}$$

Khảo sát hệ thống với $K_P = 12$; $K_D = 1$; $K_I > 0$

Hàm truyền của hệ thống :

$$G_k(s) = \frac{G_{PID}(s).G(s)}{1 + G_{PID}(s).G(s)} = \frac{\left(\frac{s^2 + 12s + k_I}{s} \right) \cdot \left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12} \right)}{1 + \left(\frac{s^2 + 12s + k_I}{s} \right) \cdot \left(\frac{20}{s^2 + 8s + 12} \right)} = \frac{20(s^2 + 12s + k_I)}{s^3 + 28s^2 + 252s + 20k_I}$$

Phương trình đặc tính của hệ:

$$s^3 + 28s^2 + 252s + 20k_I = 0$$

Lập bảng Routh

1	252
28	20k _I
$\frac{28.252 - 20k_I}{28}$	0
20k _I	0

Theo tiêu chuẩn Routh, điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là các hệ số ở cột thứ nhất của bảng Routh đều dương. Tức là:

$$\begin{cases} 28.252 - 20k_I > 0 \\ 20k_I > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k_I < 352,8$$

Với hệ thống ổn định ta có thể áp dụng định lý giá trị cuối

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \frac{20k_I}{20k_I} = 1$$

$$\Rightarrow e(\infty) = 1 - h(\infty) = 0 \quad \forall 0 < k_I < k_{Igh} = 352.8$$

Nhận xét:

- Nếu chỉ sử dụng riêng thành phần K_P thì sai số xác lập $e(\infty)$ luôn tồn tại ($\neq 0$). Tăng K_P sẽ làm tăng tốc độ đáp ứng của hệ kín, giảm thời gian quá độ và sai số xác lập nhưng lại làm tăng tính dao động của hệ (tăng độ vọt lố). Với đối tượng có bậc hàm truyền lớn hơn bậc 2 thì khi K_P tăng quá cao, hệ thống sẽ mất ổn định.

- Nếu sử dụng thêm thành phần K_I thì trong phạm vi hệ thống còn ổn định, sai số xác lập $e(\infty)$ luôn bằng 0. Tăng K_I sẽ làm tăng tốc độ đáp ứng của hệ kín, giảm thời gian quá độ nhưng lại làm tăng độ vọt lố. Khi K_I tăng quá giới hạn, hệ thống sẽ mất ổn định.

- Thành phần K_D có tác dụng làm giảm dao động, giảm độ vọt lố nhưng không ảnh hưởng đến sai số xác lập của hệ thống. Tín hiệu ra của thành phần K_D tỉ lệ với đạo hàm của $e(t)$ nên tác dụng hiệu chỉnh của nó chủ yếu là ở giai đoạn đầu của đáp ứng quá độ.

Phối hợp cả ba thành phần K_P , K_D , K_I với giá trị được lựa chọn thích hợp, ta có thể hiệu chỉnh để hệ thống kín ổn định, sai số $e(\infty)=0$, thời gian quá độ và độ vọt lố đạt yêu cầu mong muốn.

7.6 Các tiêu chuẩn tối ưu hoá đáp ứng quá độ

Bên cạnh phương pháp trực tiếp để đánh giá chất lượng quá độ là tìm và phân tích hàm quá độ bằng cách giải phương trình vi phân hay ứng dụng phép biến đổi Laplace ngược, người ta còn dùng phương pháp gián tiếp là đánh giá dựa vào các tiêu chuẩn tối ưu hoá. Các tiêu chuẩn này tìm điều kiện để đáp ứng của hệ đạt được sự dung hoà tốt nhất giữa thời gian quá độ và độ vọt lố. Hệ thống đạt chất lượng tốt nhất khi giá trị các tích phân dưới đây là cực tiểu.

7.6.1 Tiêu chuẩn IAE (Integral of the Absolute magnitude of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của trị tuyệt đối biên độ sai số)

$$S_1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_1 \rightarrow \min$ khi $\varepsilon = 0,707$

7.6.2 Tiêu chuẩn ISE (Integral of the Square of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của bình phương sai số)

$$S_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_1 \rightarrow \min$ khi $\varepsilon = 0,5$

7.6.3 Tiêu chuẩn ITAE (Integral of Time multiplied by the Absolute value of the Error criterion – Tiêu chuẩn tích phân của tích thời gian và trị tuyệt đối sai số)

$$S_3 = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt \rightarrow \min$$

Đối với hệ bậc hai: $S_3 \rightarrow \min$ khi $\varepsilon = 0,707$

Trong ba tiêu chuẩn trên, tiêu chuẩn ITAE được sử dụng nhiều nhất.

- Để đáp ứng quá độ của hệ kín bậc n là tối ưu theo tiêu chuẩn ITAE và hệ kín có sai số xác lập vị trí bằng 0 thì hàm truyền hệ kín bậc n phải có tử số là ω_n^n và đa thức mẫu số (cũng chính là đa thức đặc tính của hệ kín) có dạng như bảng sau :

Bậc	Mẫu số hàm truyền
1	$s + \omega_n$
2	$s^2 + 1,414\omega_n s + \omega_n^2$
3	$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
4	$s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
5	$s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
6	$s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,6\omega_n^2 s^4 + 8,6\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6$

Ví dụ 7.5

- Hệ kín bậc hai sẽ có sai số xác lập vị trí $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

Để đáp ứng quá độ của hệ kín bậc n là tối ưu theo tiêu chuẩn ITAE và hệ kín có sai số xác lập vận tốc bằng 0 thì hàm truyền hệ kín bậc n phải có dạng:

$$G_k(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Trong đó đa thức mẫu số của hàm truyền được lấy theo bảng sau :

Bậc	Mẫu số hàm truyền
2	$s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2$
3	$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3$
4	$s^4 + 2,41\omega_n s^3 + 4,93\omega_n^2 s^2 + 5,14\omega_n^3 s + \omega_n^4$
5	$s^5 + 2,19\omega_n s^4 + 6,5\omega_n^2 s^3 + 6,3\omega_n^3 s^2 + 5,24\omega_n^4 s + \omega_n^5$
6	$s^6 + 6,12\omega_n s^5 + 13,42\omega_n^2 s^4 + 17,16\omega_n^3 s^3 + 14,14\omega_n^4 s^2 + 6,76\omega_n^5 s + \omega_n^6$

Ví dụ 7.6

Hệ kín bậc hai sẽ có sai số xác lập vận tốc $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{3,2\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2}$$

Hệ kín bậc ba sẽ có sai số xác lập vận tốc $e(\infty)=0$ và ITAE cực tiểu nếu có hàm truyền:

$$G_k(s) = \frac{3.2\omega_n s + \omega_n^2}{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3}$$

7.7 Sai số xác lập trong hệ điều khiển hồi tiếp đơn vị

Sai số trong hệ điều khiển được cho là có nhiều yếu tố ảnh hưởng. Sự thay đổi ngõ vào tham khảo dẫn đến các sai số không tránh khỏi trong suốt thời gian quá độ và tạo ra sai số xác lập. Các thành phần thường tồn tại trong hệ thống là ma sát, quán tính và dither biên có thể làm cho đáp ứng xấu đi hay tạo sai số xác lập.

Bất kì hệ thống vật lý nào cũng đều có sai số xác lập ứng với từng ngõ vào nhất định. Một hệ thống có thể không có sai số xác lập đối với ngõ vào là hàm bậc nhất nhưng sẽ có sai số xác lập đối với ngõ vào là hàm dốc.

7.7.1 Phân loại hệ điều khiển

Hệ điều khiển có thể phân loại dựa vào đáp ứng của hệ thống tương ứng với các ngõ vào hàm bậc nhất, hàm dốc, hàm parabol... Độ lớn của sai số xác lập tùy thuộc vào các ngõ vào độ lập này và nó cũng nói lên được chất lượng của hệ thống

Xem hệ thống điều khiển hồi tiếp đơn vị với hàm truyền hệ hở sau

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^n (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

Giá trị s^n ở mẫu số thể hiện số cực nằm tại gốc tạo độ. Sơ đồ phân loại hệ thống dựa trên sự tích hợp được chỉ ra bởi hàm truyền hệ hở. Nếu $n=0$ được gọi là loại 0, $n=1$ được gọi là loại 1....chú ý rằng việc phân loại này thì không giống với bậc của hệ thống. Khi hệ thống thuộc loại càng cao cũng đồng nghĩa với việc làm tăng nguy cơ xấu về tính ổn định của hệ thống.

Nếu $G(s)$ được viết lại sao cho mỗi thành phần ở tử số và mẫu số sẽ tiến về 1 khi s tiến về 0 (ngoại trừ s^n) thì độ lợi hệ hở có liên quan trực tiếp đến sai số xác lập

7.8 Bài tập

1. tìm điều kiện của k để hệ thống có PTĐT sau ổn định

a, $s^3 + 3s^2 + (k+1)s + k = 0$

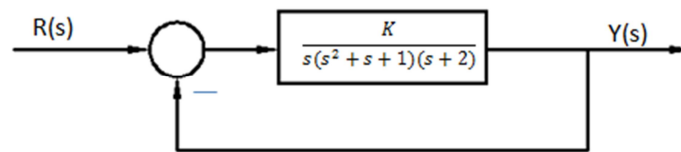
b, $s^3 + s^2 + ks + 1 = 0$

c, $s^4 + 4s^2 + 3ks + 2 = 0$

2. Cho hệ thống có sơ đồ khối như hình bên dưới.

a, Với điều kiện nào của k thì hệ đã cho ổn định.

b, Xác định sai số xác lập của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm dốc



3. Cho hệ thống điều khiển có phương trình vi phân sau

$$y''(t) + y'(t) + 3ky'(t) + 2y(t) = r(t)$$

a, Xác định phương trình biến trạng thái dưới dạng ma trận

b, Tìm k để hệ thống ổn định

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đặng Hoài Bắc (2006), *Cơ sở Điều khiển tự động*, Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông
- [2] Nguyễn Chí Ngôn (2010), *Giáo trình lý thuyết điều khiển tự động*, Đại học Cần Thơ
- [3] Katsuhiko Ogata (2002), *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall , 4th edition
- [4] Nguyễn Thị Phương Hà (2003), Huỳnh Thái Hoàng, *Lý thuyết Điều khiển tự động*, NXB Đại học Quốc gia TP.HCM
- [5] Nguyễn Thế Hùng (2008), *Điều khiển tự động*, Đại học Bách Khoa TP.HCM