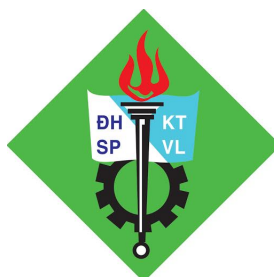


TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT VĨNH LONG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



GIÁO TRÌNH

TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

Mã số học phần: TH1203

Số tín chỉ: 02

BIÊN SOẠN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Vĩnh Long – 10/2015

LỜI NÓI ĐẦU

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu và xử lý các đối tượng rời rạc. Chúng ta sẽ sử dụng công cụ của toán rời rạc để đếm các đối tượng, nghiên cứu mối quan hệ giữa các tập rời rạc, và phân tích các quá trình hữu hạn. Một trong những nguyên nhân chủ yếu làm nâng tầm quan trọng của toán rời rạc là việc lưu trữ và xử lý thông tin trong các hệ thống máy tính về bản chất là các quá trình rời rạc. Chính vì lý do đó, toán rời rạc là một môn học bắt buộc mang tính chất kinh điển đối với các ngành Công nghệ thông tin.

Cấu trúc tài liệu này được biên soạn dựa trên đề cương chi tiết môn học Toán rời rạc, Khoa Công nghệ thông tin, trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Vĩnh Long dùng cho sinh viên chuyên ngành Khoa Công nghệ thông tin. Nội dung gồm 05 chương:

Chương 1: Cơ sở logic

Chương 2: Bài toán đếm

Chương 3: Suy luận toán học – Thuật toán

Chương 4: Đồ thị

Chương 5: Đại số Boole

Các vấn đề được trình bày trong tài liệu đều được minh họa với nhiều ví dụ, các thuật toán được mô tả trên ngôn ngữ Pascal thuận tiện cho việc cài đặt các chương trình thực hiện trên máy tính.

Tài liệu chắc chắn sẽ không tránh khỏi những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của độc giả và các bạn đồng nghiệp để nội dung của tài liệu ngày càng được hoàn thiện hơn.

Chân thành cảm ơn!

Tác giả

Chương 1**CƠ SỞ LOGIC****1.1. Đại số mệnh đề****1.1.1. Định nghĩa mệnh đề**

Mệnh đề là một câu phát biểu có tính chất đúng hoặc sai. Ký hiệu: $P, Q, R, \dots$

Giá trị đúng, sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề đó.

Nếu P là mệnh đề đúng, ta nói P nhận giá trị đúng và viết $P = 1$ hay $P = T$.

Nếu P là mệnh đề sai, ta nói P nhận giá trị sai và viết $P = 0$ hay $P = F$.

Ví dụ 1.1: Mỗi câu xác định dưới đây là một mệnh đề

- $2 + 3 = 5$
- $3 * 4 = 10$
- Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau
- Washington D.C là thủ đô của Hoa Kỳ
- Toronto là thủ đô của Canada

Các câu xác định “ $2 + 3 = 5$ ”, “*Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau*” và “*Washington D.C là thủ đô của Hoa Kỳ*” là các mệnh đề đúng. Còn các câu xác định “ $3 * 4 = 10$ ” và “*Toronto là thủ đô của Canada*” là các mệnh đề sai.

Như vậy, một mệnh đề có thể là mệnh đề đúng hoặc mệnh đề sai. Hay nói cách khác, một mệnh đề chỉ có thể lựa chọn 1 trong 2 giá trị là đúng hoặc là sai. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 1.2: Xét các câu phát biểu sau

- Hôm nay là thứ mấy?
- Một số thực âm không phải là số chính phương
- Hãy đọc kỹ đoạn này!
- $x + 1 = 2$
- $x + y = z$

Câu “*Hôm nay là thứ mấy?*” không là mệnh đề vì nó chỉ là một câu hỏi không có giá trị đúng, sai. Câu “*Một số âm không phải là số chính phương*” có chân trị là đúng nếu xét trên tập hợp số thực $\mathbf{R}$ nhưng lại có chân trị sai khi xét trên tập hợp số phức. Câu “ $x+1=2$ ” và câu “ $x+y=z$ ” không phải là mệnh đề vì chúng không đúng cũng không sai bởi các biến trong những câu đó chưa được gán cho một giá trị cụ thể nào.

Chú ý: Các câu hỏi, các khẳng định dưới dạng cảm thán hoặc mệnh lệnh không phải là mệnh đề vì nó không chứa chân trị nhất định.

Mục đích của các hoạt động khoa học là phân biệt các mệnh đề để xác định chân trị của nó. Sự xác định chân trị này dựa vào thực nghiệm và lý luận. Lý luận ở đây là xác

định chân trị của mệnh đề bằng cách kết hợp các mệnh đề mà ta đã biết chân trị. Các luật lệ chế ngự cách kết hợp mang tính chính xác của phép toán đại số. Vì thế, chúng ta cần nói đến “Đại số mệnh đề”.

1.1.2. Các phép toán trên mệnh đề

Trong phép toán mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề.

Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn được gọi là mệnh đề nguyên tử (atomic proposition). Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên tử được gọi là mệnh đề phức hợp (compound propositions). Thông thường, tất cả mệnh đề phức hợp là mệnh đề liên kết (có chứa phép tính mệnh đề).

Các phép toán mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Các phép toán mệnh đề được trình bày trong chương này bao gồm: phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép XOR, phép kéo theo, phép tương đương.

1.1.2.1. Phép phủ định (NEGATION)

Phủ định của mệnh đề P được ký hiệu bởi $\neg P$ hay $\bar{P}$ (đọc là: “không P ” hay “không phải P ”), là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng chân trị sau:

P	$\neg P$
0	1
1	0

Ví dụ 1.3:

P : “Trái đất quay” $\Rightarrow \neg P$: ”Không phải trái đất quay”, “Trái đất không quay”.

Khi đó, $P = 1$, do đó $\neg P = 0$.

1.1.2.2. Phép hội (CONJUNCTION)

Hội của hai mệnh đề P, Q được ký hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là: “ P và Q ”) là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề $P \wedge Q$ chỉ đúng khi cả P và Q đều đúng, sai trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 1.4:

P : “2 là số nguyên tố”. Q : “2 là số chẵn”.

$P \wedge Q$: “2 là số nguyên tố và 2 là số chẵn”.

Ta có $P = Q = 1$, do đó $P \wedge Q = 1$.

Ví dụ 1.5:

P: “Hôm nay là thứ Hai”.

Q: “Hôm nay trời mưa”.

Mệnh đề $P \wedge Q$ là đúng vào hôm thứ Hai trời mưa, và sai vào bất kỳ ngày nào không phải ngày thứ Hai và vào ngày thứ Hai nhưng trời lại không mưa.

Chú ý:

♦ Khi nối hai mệnh đề bởi từ **và** để diễn đạt phép hội, thường ta bỏ bớt một số từ trùng lặp hoặc sửa đổi chút ít câu văn. Chẳng hạn, trong các mệnh đề sau đây, các từ trong dấu ngoặc được loại bỏ:

“Dây đồng (dẫn điện) và dây chì dẫn điện”.

“An rất say mê toán và (An rất say mê) văn học”.

♦ Trong những điều kiện nhất định, phép hội còn được biểu diễn bởi những liên từ khác nhau như: **đồng thời, nhưng...** hoặc chỉ bằng một dấu phẩy. Ví dụ:

“Hùng rất thích Anh văn nhưng giỏi Toán”.

“Lan vừa yêu Toán vừa yêu Anh Văn”.

“Chồng cày, vợ cấy, con trâu đi bừa”.

♦ Mặt khác, không phải bao giờ từ **và** cũng có nghĩa của phép hội.

“Nói và làm đi đôi với nhau”.

“Hùng có 12 cây bút màu xanh và màu vàng”.

1.1.2.3. Phép tuyển (DISJUNCTION)

Tuyển của hai mệnh đề P, Q được ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là: “P hoặc Q”) là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Mệnh đề $P \vee Q$ sai khi cả hai P và Q đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Ví dụ 1.6:

P: “Hùng đang đọc sách”.

Q: “Hùng đang xem tivi”.

Ta có tuyển của P và Q là $P \vee Q$: “Hùng đang đọc báo hoặc xem tivi”. $P \vee Q$ là mệnh đề đúng nếu lúc này Hùng đọc báo, xem tivi hay vừa đọc báo vừa xem tivi. Ngược lại, nếu cả hai việc trên đều không xảy ra, chẳng hạn như Hùng đang làm việc thì mệnh đề $P \vee Q$ là sai.

1.1.2.4. Phép suy diễn (phép kéo theo) (IMPLICATION)

Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q được ký hiệu bởi $P \rightarrow Q$ là một mệnh đề có giá trị được xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Mệnh đề $P \rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai, đúng trong mọi trường hợp còn lại. Khi đó, P được gọi là **giả thiết (nguyên nhân)**, còn Q được gọi là **kết luận (kết quả)**.

Thông thường, ta có những cách đọc mệnh đề $P \rightarrow Q$ như sau:

- “ P kéo theo Q ”
- “Nếu P thì Q ”
- “ Q chỉ nếu P ”

Kết luận Q biểu thị điều kiện cần của P , còn giả thiết P biểu thị điều kiện đủ của Q .

Ví dụ 1.7:

♦ $a/b = c \rightarrow a = bc$ (ngược lại chưa chắc đúng).

Vậy $a/b = c$ là điều kiện đủ của $a = bc$.

♦ **Khỏe mạnh** là điều kiện cần nhưng không đủ để *giỏi các môn thể thao*.

Từ mệnh đề $P \rightarrow Q$, chúng ta có thể tạo ra các mệnh đề kéo theo khác như là mệnh đề $Q \rightarrow P$ và $\neg Q \rightarrow \neg P$ được gọi là mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề $P \rightarrow Q$.

Ví dụ 1.8: Tìm mệnh đề đảo và phản đảo của mệnh đề sau

“Nếu tôi có nhiều tiền thì tôi mua xe hơi”

Mệnh đề đảo là: “Nếu tôi mua xe hơi thì tôi có nhiều tiền”

Mệnh đề phản đảo là: “Nếu tôi không mua xe hơi thì tôi không có nhiều tiền”

1.1.2.5. Phép tương đương (BICONDITIONAL)

Mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q , được ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ là một mệnh đề xác định bởi $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. Từ đó ta có bảng chân trị sau:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Chú ý: Thông thường, ta có những cách đọc mệnh đề $P \leftrightarrow Q$ như sau:

- “P khi và chỉ khi Q”
- “P nếu và chỉ nếu Q”
- “P là cần và đủ đối với Q”
- “Nếu P và Q và ngược lại”

Ví dụ 1.9: “Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi nó có tổng các chữ số chia hết cho 3”.

1.1.2.6. Phép XOR

Cho hai mệnh đề P và Q. Câu xác định “loại trừ P hoặc loại trừ Q”, nghĩa là “hoặc là P đúng hoặc Q đúng nhưng không đồng thời cả hai là đúng” là một mệnh đề mới được gọi là P XOR Q. Ký hiệu $P \oplus Q$. Từ đó ta có bảng chân trị sau:

P	Q	$P \oplus Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.1.3. Mệnh đề hệ quả và tương đương logic

1.1.3.1. Định nghĩa hằng đúng

Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là đúng.

Một hằng đúng cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là đúng bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ 1.10: Biểu thức mệnh đề $\neg P \vee P$ là một hằng đúng

P	$\neg P$	$\neg P \vee P$
1	0	1
0	1	1

Ví dụ 1.11: Biểu thức mệnh đề $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ là một hằng đúng

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

1.1.3.2. Định nghĩa hằng sai

Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là sai.

Một hằng sai cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là sai bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ 1.12: Biểu thức mệnh đề $\neg P \wedge P$ là một hằng sai

P	$\neg P$	$\neg P \wedge P$
1	0	0
0	1	0

Ví dụ 1.13: Biểu thức mệnh đề $(P \oplus Q) \wedge (P \oplus \neg Q)$ là một hằng sai

P	Q	$\neg Q$	$P \oplus Q$	$P \oplus \neg Q$	$(P \oplus Q) \wedge (P \oplus \neg Q)$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

1.1.3.3. Định nghĩa tiếp liên

Một tiếp liên là một biểu thức mệnh đề không phải là hằng đúng cũng không phải là hằng sai.

Ví dụ 1.14: Biểu thức mệnh đề $(P \wedge Q) \vee \neg Q$ là một tiếp liên

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee \neg Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	1

Ví dụ 1.15: Biểu thức mệnh đề $\neg P \vee (Q \wedge R)$ là một tiếp liên

P	Q	R	$\neg P$	$Q \wedge R$	$\neg P \vee (Q \wedge R)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

1.1.3.4. Mệnh đề hệ quả

Cho F và G là hai biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu $F \rightarrow G$ là hằng đúng.

Ký hiệu: $F \mapsto G$

Ví dụ: Cho $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ và $G = P \rightarrow R$

Xét bảng chân trị sau:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	F	G	$F \rightarrow G$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\Rightarrow G$ là mệnh đề hệ quả của F .

Nhận xét: Nếu G là hệ quả của F thì khi F là đúng thì bắt buộc G phải đúng. Ngược lại, nếu G là đúng thì chưa có kết luận gì về chân trị của F .

1.1.3.5. Tương đương logic

1.1.3.5.1. Định nghĩa

a. Hai mệnh đề E và F được gọi là **tương đương logic** nếu $E \leftrightarrow F$ là hằng đúng.

b. Hai mệnh đề E và F gọi là **tương đương logic** nếu chúng có cùng chân trị. Khi đó, ta viết $E \equiv F$ hay $E = F$.

Ví dụ 1.16: Cho $E = P \rightarrow Q$ và $F = \neg P \vee Q$

Xét xem hai mệnh đề trên có tương đương logic không?

Lập bảng chân trị như sau:

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Vậy, E và F tương đương logic hay $E = F$

Ví dụ 1.17: Cho $E = P \vee (Q \wedge R)$ và $F = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Xét xem hai mệnh đề trên có tương đương logic không?

Lập bảng chân trị như sau:

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$Q \wedge R$	E	F	$E \leftrightarrow F$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$Q \wedge R$	E	F	$E \leftrightarrow F$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

1.1.3.5.2. Các luật tương đương logic

Định lí: Với P, Q, R là các mệnh đề bất kỳ. Khi đó, ta có:

TT	Tên luật	Nội dung
1	Luật đồng nhất	$P \wedge 1 = P$ $P \vee 0 = P$
2	Luật thống trị	$P \vee 1 = 1$ $P \wedge 0 = 0$
3	Luật lũy đẳng	$P \wedge P = P$ $P \vee P = P$
4	Luật phủ định kép	$\neg(\neg P) = P$
5	Luật giao hoán	$P \wedge Q = Q \wedge P$ $P \vee Q = Q \vee P$
6	Luật kết hợp	$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$ $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$
7	Luật phân phối	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
8	Luật De Morgan	$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$
9	Luật về phần tử bù	$P \wedge \neg P = 0$ $P \vee \neg P = 1$
10	Luật CM phản chứng	$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

Ví dụ 1.18: Chứng minh $((P \wedge Q) \rightarrow R) = (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } (P \wedge Q) \rightarrow R &= \neg(P \wedge Q) \vee R \\
 &= (\neg P \vee \neg Q) \vee R \\
 &= \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\
 &= \neg P \vee (\neg Q \rightarrow R) \\
 &= P \rightarrow (Q \rightarrow R)
 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.19: Chứng minh mệnh đề sau là một hằng đúng:

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } ((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q &= \neg((P \rightarrow Q) \wedge P) \vee Q \\
 &= (\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg P) \vee Q \\
 &= (\neg(P \rightarrow Q)) \vee (\neg P \vee Q) \\
 &= (\neg(P \rightarrow Q)) \vee (P \rightarrow Q) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

1.1.4. Biểu diễn các câu thông thường thành biểu thức logic

Ví dụ 1.20: Biểu diễn câu: “Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 40km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép”.

Đặt: p: “Bạn không lái xe với tốc độ trên 40km/h”.

q: “Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép”.

Biểu thức logic: $\neg p \rightarrow \neg q$

Ví dụ 1.21: Biểu diễn câu: “Bạn không được lái xe nếu bạn cao dưới 1.5m trừ phi bạn trên 18 tuổi”.

Đặt: P: “Bạn được lái xe”.

Q: “Bạn cao dưới 1.5m”.

R: “Bạn trên 18 tuổi”.

Biểu thức logic: $(Q \wedge \neg R) \rightarrow \neg P$

Mặt khác, do biểu thức mệnh đề là sự liên kết của nhiều mệnh đề bằng các phép toán nên chúng ta có thể phân tích để biểu diễn các biểu thức mệnh đề này bằng một cây mệnh đề.

Ví dụ 1.22: Xét câu phát biểu sau:

“Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả.”

Có thể định nghĩa các biến mệnh đề như sau:

P: Michelle thắng trong kỳ thi Olympic

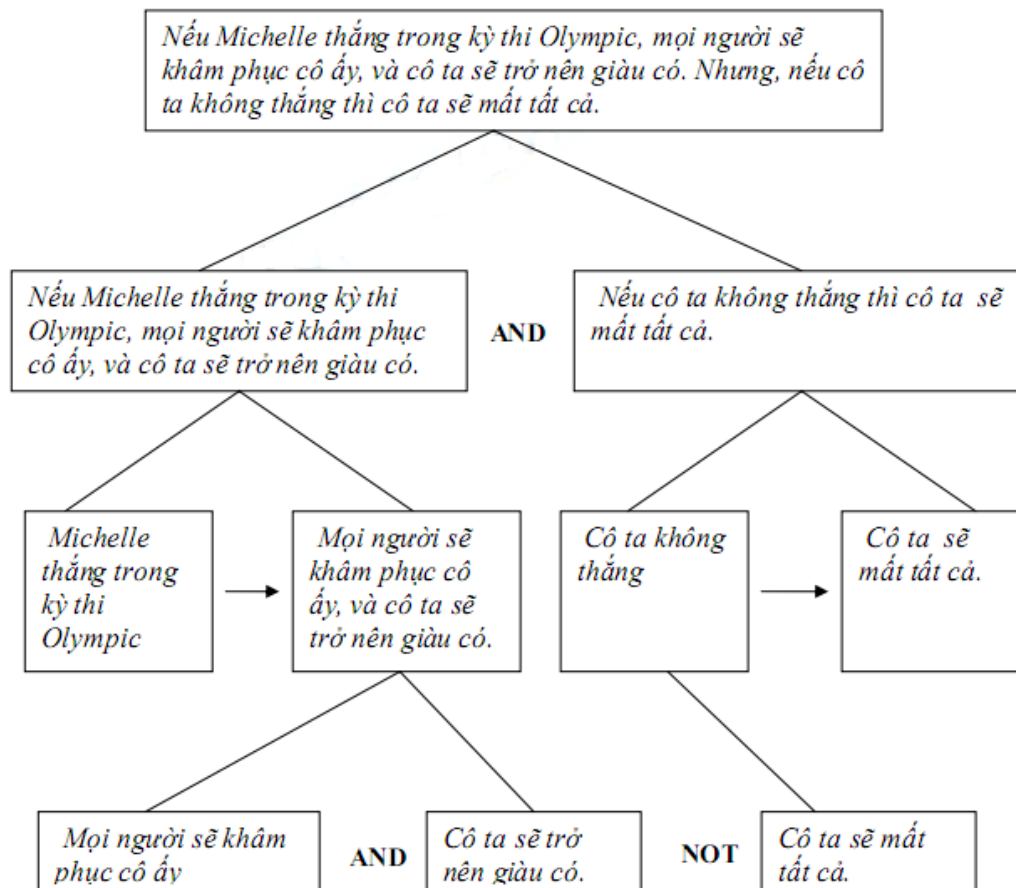
Q: Mọi người sẽ khâm phục cô ấy

R: Cô ta sẽ trở nên giàu có

S: Cô ta sẽ mất tất cả

Biểu diễn câu phát biểu trên bằng các mệnh đề và các phép toán, ta có biểu thức mệnh đề sau: $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow S)$

Biểu diễn câu phát biểu trên thành một cây ngữ nghĩa như sau:



1.2. Vị từ và lượng từ

1.2.1. Các định nghĩa

1.2.1.1. Định nghĩa vị từ (Prédicat)

Một vị từ là một khẳng định $P(x,y,...)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, ...$ lấy giá trị trong những tập hợp $A, B, ...$ cho trước, sao cho:

- Bản thân $P(x,y,...)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, ...$ bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp $A, B, ...$ cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(x,y,...)$, nghĩa là khi đó chân trị của $P(x,y,...)$ hoàn toàn xác định. Các biến $x, y, ...$ được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1.23: Các câu có liên quan đến các biến như: " $x > 3$ ", " $x + y = 5$ " rất thường gặp trong toán học và trong các chương trình của máy tính. Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được cho những giá trị xác định.

Nói cách khác, vị từ có thể xem là một hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, nó có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của biến và lập luận của vị từ.

Ví dụ 1.24: Câu $\{n \text{ là chẵn}\}$ là một vị từ. Nhưng, khi cho n là một số cụ thể là chẵn hay là lẻ ta được một mệnh đề:

$n = 2 : \{2 \text{ là chẵn}\} : \text{mệnh đề đúng.}$

$n = 5 : \{5 \text{ là chẵn}\} : \text{mệnh đề sai.}$

Vị từ $\{n \text{ là chẵn}\}$ có 2 phần. Phần thứ nhất là biến n là chủ ngữ của câu. Phần thứ hai “là chẵn” cũng được gọi là vị từ, nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có.

Ký hiệu: $P(n) = \{n \text{ là chẵn}\}$

Tổng quát, người ta nói $P(n)$ là giá trị của hàm mệnh đề P tại n . Một khi biến n được gán trị thì $P(n)$ là một mệnh đề.

Ví dụ 1.25: Cho vị từ $P(x) = \{x > 3\}$. Xác định chân trị của $P(4)$ và $P(2)$.

$P(4) = \{4 > 3\}$: mệnh đề đúng.

$P(2) = \{2 > 3\}$: mệnh đề sai.

1.2.1.2. Không gian của vị từ

Người ta có thể xem vị từ như là một ánh xạ P . Với mỗi phần tử x thuộc tập hợp E , ta được một ảnh $P(x) \in \{0,1\}$. Tập hợp E này được gọi là không gian của vị từ. Không gian này sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến x làm cho $P(x)$ trở thành mệnh đề đúng hoặc sai.

1.2.1.3. Trọng lượng của vị từ

Chúng ta cũng thường gặp những câu có nhiều biến hơn. Vị từ xuất hiện cũng như một hàm nhiều biến, khi đó số biến được gọi là trọng lượng của vị từ.

Ví dụ 1.26: Vị từ $P(a,b) = \{a + b = 5\}$ là một vị từ 2 biến trên không gian N . Ta nói P có trọng lượng 2.

Trong một vị từ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là n . Nếu gán giá trị xác định cho một biến trong nhiều biến thì ta được một vị từ mới $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là $(n-1)$. Quy luật này được áp dụng cho đến khi $n=1$ thì ta có một mệnh đề. Vậy, thực chất mệnh đề là một vị từ có trọng lượng là 0.

Ví dụ 1.27: Cho vị từ $P(x, y, z) = \{x + y = z\}$.

Cho $x = 0$: $Q(y,z) = P(0, y, z) = \{0 + y = z\}$

$y = 0$: $R(z) = Q(0, z) = P(0, 0, z) = \{0 + 0 = z\}$

$z = 0$: $T = P(0, 0, 0) = \{0 + 0 = 0\}$

là mệnh đề sai.

Câu có dạng $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là giá trị của hàm mệnh đề P tại $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và P cũng được gọi là vị từ.

1.2.2. Các lượng từ

Giả sử $P(x)$ là một hàm mệnh đề theo biến $x \in A$.

Lượng từ tồn tại ($\exists$)

$\exists x \in A, P(x)$ (đọc là: “tồn tại $x \in A, P(x)$ ”) là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi tồn tại $a \in A$ để $P(a) = 1$.

Lượng từ với mọi ($\forall$)

$\forall x \in A, P(x)$ (đọc là: “với mọi $x \in A, P(x)$ ”) là một mệnh đề, nó nhận giá trị đúng khi và chỉ khi với phần tử bất kỳ $a \in A$ ta có $P(a) = 1$.

Nếu A là một tập hợp hữu hạn n phần tử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ thì:

- $\forall x \in A, P(x)$ tương đương với mệnh đề $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$.
- $\exists x \in A, P(x)$ tương đương với mệnh đề $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$.

Ví dụ 1.28: Mệnh đề “Với mọi số nguyên n , ta có $2n + 1$ là một số lẻ” có thể viết: $\forall n \in \mathbb{Z}, 2n + 1$ lẻ và mệnh đề này có giá trị đúng.

Ví dụ 1.29: Mệnh đề “Tồn tại số thực x để $\ln(x^2 - 3) = 0$ ” có thể viết: $\exists x \in \mathbb{R}, \ln(x^2 - 3) = 0$ và mệnh đề này có giá trị đúng.

Ví dụ 1.30: Cho vị từ $P(x) = \{\text{số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$. Xét chân trị của hai mệnh đề $\forall x P(x)$ và $\exists x P(x)$.

$\forall x P(x) = \{\text{tất cả số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$ là mệnh đề sai khi $x = 5$.

$\exists x P(x) = \{\text{hiện hữu một số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn}\}$ là mệnh đề đúng khi $x = 10$.

Định lý (sự hoán vị các lượng từ): Nếu $P(x, y)$ là một hàm mệnh đề theo hai biến $x \in A, y \in B$ thì các mệnh đề sau là hằng đúng:

- a. $[\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y)] \Leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, P(x, y)]$
- b. $[\exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)] \Leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, P(x, y)]$
- c. $[\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)] \Rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, P(x, y)]$

Từ định lý trên ta có kết quả sau: Trong vị từ của hàm mệnh đề nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì:

- Mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ này cùng loại.
- Mệnh đề mới sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng $\exists, \forall$.

1.2.3. Phủ định của vị từ

Định lý: Nếu $P(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên tập A , ta có:

- a. $\overline{\forall x \in A, P(x)} = \exists x \in A, \overline{P(x)}$
- b. $\overline{\exists x \in A, P(x)} = \forall x \in A, \overline{P(x)}$

Ví dụ 1.31: Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ”.

- Hệ quả:**
- a. $\overline{\forall x, (P(x) \rightarrow Q(x))} = \exists x, (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$
 - b. $\overline{\exists x, (P(x) \rightarrow Q(x))} = \forall x, (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$

Ví dụ 1.32: Một hàm thực hiện liên tục $x_0 \in \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Lấy phủ định ta sẽ được định nghĩa của hàm không liên tục tại x_0 :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

1.2.4. Dịch câu thông thường thành biểu thức logic

Sau khi đã được giới thiệu về các lượng từ, chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Việc làm này nhằm mục đích loại đi những điều chưa rõ ràng và người ta có thể sử dụng các câu suy luận này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

Ví dụ 1.33: Biểu diễn câu “Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó”.

Đặt: $P(x)$: x là phụ nữ.

$Q(x)$: x đã sinh đẻ.

$R(x,y)$: x là mẹ của y .

Biểu thức logic: $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists y R(x,y))$

Ví dụ 1.34: Biểu diễn câu “Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất”.

Đặt: $P(x,y)$: y là bạn tốt nhất của x .

Biểu thức logic: $\forall x \exists y \forall z [P(x,y) \wedge z \neq y \rightarrow \overline{P(x,z)}]$.

Ví dụ 1.35: Xét các câu sau. Ba câu đầu tiên là tiền đề và câu bốn là kết luận. Toàn bộ tập hợp 4 câu này được gọi là một suy lý.

Tất cả chim ruồi đều có màu sắc sỡ.

Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong.

Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám.

Chim ruồi là nhỏ.

Đặt: $P(x)$: x là chim ruồi.

$Q(x)$: x là lớn.

$R(x)$: x sống bằng mật ong.

$S(x)$: x có màu sắc sỡ.

Biểu thức logic:

$$\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$$

$$\overline{\exists x(Q(x) \wedge R(x))}$$

$$\forall x(\overline{R(x)} \rightarrow \overline{S(x)})$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)})$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Trong các khẳng định sau, cho biết khẳng định nào là mệnh đề:

- a. 6 là một số nguyên tố.
- b. Cô ta rất thông minh.
- c. Tam giác cân có hai cạnh bằng nhau.
- d. Hãy làm bài tập toán cao cấp đi!
- e. Nếu bạn đến trễ thì tôi sẽ đi học trước.
- f. x là một số lẻ.
- g. Bạn có thích xem bóng đá không?

Bài 2. Gọi P, Q là các mệnh đề:

P : “ Hùng thích bóng đá “.

Q : “ Hùng ghét nấu ăn “

Hãy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó sử dụng các phép nối.

- a. Hùng không thích bóng đá lẫn nấu ăn.
- b. Hùng thích bóng đá nhưng ghét nấu ăn.
- c. Hùng thích bóng đá hay Hùng vừa thích nấu ăn vừa ghét bóng đá.
- d. Hùng thích bóng đá và nấu ăn hay Hùng ghét bóng đá nhưng thích nấu ăn.

Bài 3. Hãy lấy phủ định các mệnh đề sau:

- a. Nếu x^2 là một số nguyên thì x là một số nguyên.
- b. Nếu ngày mai thứ tư thì hôm nay phải thứ hai.
- c. Tôi không thể ngủ nếu tôi đói bụng.
- d. Nếu Lan dậy sớm ngày mai và đi học thì Lan đã không ngủ hôm qua.
- e. Mọi tam giác đều có các góc bằng 60° .
- f. Tuổi của Tuấn khoảng từ 15 đến 20.

Bài 4. Lập bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau:

- a. $\neg P \rightarrow (P \vee Q)$
- b. $\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R)$
- c. $P \vee (Q \wedge R)$
- d. $(P \vee Q) \wedge R$
- e. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge R) \wedge (\neg Q)$

Bài 5. Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các công thức sau:

- a. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
- b. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

- c. $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$
- d. $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$
- e. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$

Bài 6. Chứng minh các tương đương logic sau:

- a. $(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) = (R \vee \neg R)$
- b. $(P \wedge Q) \vee \neg Q = P \vee \neg Q$
- c. $(P \rightarrow Q) = (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- d. $((P \wedge Q) \rightarrow R) = (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

Bài 7. Nếu biết mệnh đề $P \rightarrow Q$ là sai, hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

- a. $P \wedge Q$
- b. $\neg P \vee Q$
- c. $Q \rightarrow P$

Bài 8. Cho các biểu thức mệnh đề sau:

- 1. $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \vee M)$
- 2. $(P \wedge (Q \wedge R)) \rightarrow (S \oplus M)$

Hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề P, Q, R, S, M nếu các biểu thức mệnh đề trên là sai.

Bài 9. Trong một phiên tòa xử án, 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau:

Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội

Chị B: Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội

Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội

Hãy xét xem ai là người có tội ?

Bài 10. Cho các mệnh đề được phát biểu như sau, hãy tìm số lớn nhất các mệnh đề đồng thời là đúng.

- a. Quang là người khôn khéo
- b. Quang không gặp may mắn
- c. Quang gặp may mắn nhưng không khôn khéo
- d. Nếu Quang là người khôn khéo thì nó không gặp may mắn
- e. Quang là người khôn khéo khi và chỉ khi nó gặp may mắn
- f. Hoặc Quang là người khôn khéo, hoặc nó gặp may mắn nhưng không đồng thời cả hai.

Bài 11. Cho a và b là hai số nguyên dương. Biết rằng, trong 4 mệnh đề sau đây có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai. Hãy tìm mọi cặp số (a, b) có thể có.

- 1. $a + 1$ chia hết cho b

2. $a = 2b + 5$
3. $a + b$ chia hết cho 3
4. $a + 7b$ là số nguyên tố

Bài 12. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, chứng minh rằng các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng.

1. $(P \wedge Q) \rightarrow P$
2. $P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$
3. $P \rightarrow ((Q \rightarrow (P \wedge Q))$
4. $\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$
5. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Bài 13. Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, xét xem biểu thức mệnh đề G có là hệ quả của F không?

1. $F = P \wedge (Q \vee R)$ $G = (P \wedge Q) \vee R$
2. $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ $G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
3. $F = P \wedge Q$ $G = (\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$

Bài 14. Tương tự bài tập 12 và 13, chứng minh các tương đương logic sau đây:

1. $(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
2. $\neg(\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge R$
3. $((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$
4. $\neg(P \vee Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(Q \wedge P)$
5. $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg(Q \vee P)$
6. $P \vee (P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$
7. $P \vee Q \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$
8. $((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) \Leftrightarrow P \wedge Q$
9. $P \wedge ((\neg Q \rightarrow (R \wedge R)) \vee \neg(Q \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \neg S))) \Leftrightarrow P$
10. $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S \vee R) \Leftrightarrow P \vee (R \wedge (S \vee \neg Q))$

Bài 15. Lấy phủ định của các mệnh đề sau:

1. Các sinh viên khoa Tin học đều có máy tính tại nhà.
2. Với mọi số nguyên n , nếu n^2 chia hết cho 4 thì n chia hết cho 4.
3. Nếu x là một số thực sao cho $x^2 > 4$ thì $x < -2$ hay $x > 2$.
4. Với mọi số thực x , nếu $|x - 1| < 4$ thì $-2 < x < 6$.

Bài 16. Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề dưới đây:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq x^5$
2. $\exists y \in \mathbb{Z} : y = \sin y$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y < 3x - 2$

Bài 17. Cho vị từ $L(x,y) = \{x \text{ yêu } y\}$ với không gian của x và y là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy diễn đạt các câu sau:

1. Mọi người đều yêu Jerry.
2. Mọi người đều yêu một ai đó.
3. Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.
4. Không có ai yêu tất cả mọi người.
5. Có một người mà Lydia không yêu.
6. Có một người mà không ai yêu.
7. Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.
8. Có đúng hai người mà Lydia yêu.
9. Mọi người đều yêu chính mình.
10. Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình.

Bài 18. Trong không gian là tập số nguyên, cho các vị từ sau:

$$P(x) = \{x > 0\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là số chẵn}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là số chính phương}\}$$

$$S(x) = \{x \text{ chia hết cho } 4\}$$

$$T(x) = \{x \text{ chia hết cho } 5\}$$

a. Diễn đạt các mệnh đề sau:

1. Có ít nhất 1 số nguyên chẵn.
2. Tồn tại 1 số nguyên dương là số chẵn.
3. Nếu x chẵn thì x không chia hết cho 5.
4. Không có số nguyên chẵn nào chia hết cho 5.
5. Tồn tại một số nguyên chẵn chia hết cho 4.
6. Nếu x chẵn và x là số chính phương thì x chia hết cho 4.

b. Xác định chân trị của mỗi mệnh đề ở câu a. Với mỗi mệnh đề sai, hãy cho một dẫn chứng cụ thể.

c. Viết thành lời các mệnh đề dạng ký hiệu sau:

1. $\forall x [R(x) \rightarrow P(x)]$
2. $\forall x [S(x) \rightarrow Q(x)]$
3. $\forall x [S(x) \rightarrow \neg T(x)]$
4. $\exists x [S(x) \wedge \neg R(x)]$
5. $\forall x [\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)]$

Bài 19. Cho hai vị từ sau:

$$P(x) = \{x \text{ nói được tiếng Anh}\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ biết ngôn ngữ C++}\}$$

Cho không gian là tập hợp các sinh viên của lớp bạn. Hãy diễn đạt các câu sau đây:

1. Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh và biết C++.
2. Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh nhưng không biết C++.
3. Mọi sinh viên ở lớp bạn đều nói được tiếng Anh hoặc biết C++.
4. Không có một sinh viên nào ở lớp bạn nói được tiếng Anh hoặc biết C++.

Bài 20. Cho các vị từ:

$$P(x) = \{x \text{ là sinh viên}\}$$

$$Q(x) = \{x \text{ là kẻ ngu dốt}\}$$

$$R(x) = \{x \text{ là kẻ vô tích sự}\}$$

Cho không gian là tập hợp toàn thể sinh viên của trường bạn. Hãy diễn đạt các câu sau đây:

1. Không có sinh viên nào là kẻ ngu dốt.
2. Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.
3. Không có sinh viên nào là vô tích sự.