

Chương 5. Không gian Euclide

Nội dung

1. Tích vô hướng của 2 véc tơ.
2. Bù vuông góc của không gian con.
3. Hình chiếu vuông góc xuống không gian con.
4. Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt.

5.1 Tích vô hướng của 2 véc tơ

Định nghĩa 5.1 (Tích vô hướng) Cho V là KGVTV trên R .

Tích vô hướng của 2 véc tơ $u, v \in V$ là một số thực được ký hiệu (u, v) thỏa 4 tiên đề sau:

- i) $(\forall u, v \in V) : (u, v) = (v, u)$.
- ii) $(\forall u, v, w \in V) : (u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.
- iii) $(\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V) : (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$.
- iv) $(\forall u \in V) : (u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \iff u = 0$.

Không gian hữu hạn chiều cùng với tích vô hướng trên gọi là **không gian euclide**.

Ở phổ thông, các em đã biết tích vô hướng của 2 véc tơ trong *mặt phẳng* và *không gian* bằng *tổng của tích các thành phần tương ứng* và tất nhiên vẫn thỏa 4 tiên đề ở trên.

Với định nghĩa ở trên, cho ta xác định các tích vô hướng trên nhiều không gian lạ khác. Hơn nữa, trên $R^2, R^3, \dots, R^n$ tồn tại vô số tích vô hướng khác nhau. Việc chọn tích vô hướng cho mỗi không gian phụ thuộc vào mô hình của từng bài toán.

Bắt đầu bằng việc xem xét tích vô hướng chính tắc sau:

Tích vô hướng chính tắc trên R^n

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_n), y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$$

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Tích vô hướng chính tắc tương tự như phổ thông.

Ví dụ 5.1 Trong R^2 , cho phép toán

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) : (x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 10x_2y_2.$$

a) Chứng tỏ (x, y) là 1 tích vô hướng trên R^2 .

b) Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $u = (1; 2), v = (2; -1)$.

Bài giải

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(u, v) = 1.2 + 2.1.(-1) + 2.2.2 + 10.2.(-1) = -12$.

Ví dụ 5.2 Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng

$$(p, q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx; \quad \forall p(x), q(x) \in P_2[x].$$

a) Chứng tỏ (p, q) là 1 tích vô hướng trên $P_2[x]$.

b) Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $p(x) = 2x^2 - 3x + 1, q(x) = x + 1$.

Bài giải

a) Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

b) $(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)(x + 1)dx = \frac{1}{6}$.

Độ dài véc tơ u được định nghĩa bởi

$$||u|| = \sqrt{(u, u)}$$

Khoảng cách giữa 2 véc tơ u và v được định nghĩa bởi

$$d(u, v) = ||u - v||$$

Góc α giữa 2 véc tơ u và v được xác định bởi

$$\cos \alpha = \frac{(u, v)}{||u|| \cdot ||v||}$$

- Véc tơ có độ dài bằng 1 gọi là **véc tơ đơn vị**.
- Chia 1 véc tơ khác 0 cho độ dài của nó ta được véc tơ đơn vị.
- Quá trình tạo ra véc tơ đơn vị gọi là chuẩn hóa.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \forall u, v \in V.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v cùng phương (hay PTTT).

Bất đẳng thức tam giác

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v cùng hướng.

Ví dụ 5.3 Trong R^3 : $x = (x_1; x_2; x_3), y = (y_1; y_2; y_3)$. cho tích vô hướng

$$(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

- Chứng tỏ (x, y) là tích vô hướng.
- Tìm tích vô hướng của 2 véc tơ $u = (2; 1; 0), v = (3; -2; 4)$.
- Tìm độ dài véc tơ $u = (3; 2; 1)$.
- Tìm khoảng cách giữa 2 véc tơ $u = (1; 2; 1)$ và $v = (3; 0; 2)$.
- Tìm góc giữa 2 véc tơ $u = (1; 0; 1)$ và $v = (2; 1; 0)$.

Bài giải

- Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.
- $(u, v) = ((2; 1; 0), (3; -2; 4)) = 5 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 22$.
- $\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{((3; 2; 1), (3; 2; 1))} = \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \sqrt{82}$
- $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)} = \sqrt{((-2; 2; -1), (-2; 2; -1))} = \sqrt{5 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{17}$.
- $\cos \alpha = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{31}} = \frac{12}{\sqrt{168}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{12}{\sqrt{168}}$.

Nhận xét: Độ dài, khoảng cách, góc đối với tích vô hướng trên có giá trị khác với tích vô hướng ở phổ thông.

Ta đặt $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a_{ij} là hệ số của $x_i y_j$). Lúc này

$$(x, y) = xAy^T.$$

Sinh viên tính lại các giá trị bằng cách nhân ma trận.

Ví dụ 5.4 Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng $(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx; \forall p(x), q(x) \in P_2[x]$.

- Chứng tỏ (p, q) là một tích vô hướng trên $P_2[x]$.
- Tính tích vô hướng của 2 véc tơ $p(x) = 2x^2 - 3x + 1, q(x) = x - 3$.
- Tìm độ dài của véc tơ $p(x) = 2x + 3$.
- Tính khoảng cách giữa 2 véc tơ $p(x) = x^2 + x + 2, q(x) = x^2 - 2x + 3$.
- Tính góc giữa 2 véc tơ $p(x) = x^2 + x, q(x) = 2x + 3$.

Bài giải

- Sinh viên tự kiểm tra 4 điều kiện của tích vô hướng.

$$b) (p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx = \int_{-1}^1 (2x^2 - 3x + 1)(x - 3)dx = -12.$$

$$c) \|p\| = \sqrt{(p, p)} = \sqrt{\int_{-1}^1 p(x).p(x)dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 (2x + 3)^2 dx} = \sqrt{\frac{62}{3}}.$$

$$d) d(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{(p - q, p - q)} = \sqrt{(3x - 1, 3x - 1)} = \sqrt{\int_{-1}^1 (3x - 1)^2 dx} = 2\sqrt{2}.$$

$$e) \cos \alpha = \frac{(p, q)}{\|p\| \cdot \|q\|} = \frac{\int_{-1}^1 (x^2 + x)(2x + 3)dx}{\sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 + x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{-1}^1 (2x + 3)^2 dx}} = \frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{\frac{16}{15} \cdot \frac{62}{3}}} = \frac{5\sqrt{310}}{124}.$$

Hai véc tơ vuông góc

$$u \perp v \iff (u, v) = 0.$$

Véc tơ vuông góc với tập hợp

$$u \perp M \iff (u, y) = 0, \forall y \in M.$$

Họ trực giao: họ véc tơ M gọi là trực giao nếu

$$\forall x, y \in M : x \perp y.$$

Họ trực chuẩn: họ véc tơ M gọi là trực chuẩn nếu M trực giao và

$$\forall x \in M : \|x\| = 1.$$

Mệnh đề Cho không gian con $F = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$

$$x \perp F \iff x \perp f_k, \forall k = 1, 2, \dots, m.$$

Ví dụ 5.5 Trong R^3 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in R^3 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

Tìm m để $x = (2; 3; m) \perp F$.

Bài giải

Tập sinh của F là $\{u = (4; -3; 1)\}$.

$$x \perp F \iff x \perp u \iff (x, u) = 0 \iff 2.4 + 3.(-3) + m.1 = 0 \iff m = 1.$$

Ví dụ 5.6 Trong R^2 , cho tích vô hướng

$$(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \quad x = (x_1; x_2), y = (y_1; y_2).$$

Cho 2 điểm $A = (1; 2)$ và $B = (3; 0)$.

a. Viết phương trình đường trung trực đoạn thẳng AB .

b. Viết phương trình đường tròn (C) đường kính AB .

c. Tính diện tích tam giác OAB .

Bài giải

a. Véc tơ $\overrightarrow{AB} = (2; -2)$.

Trung điểm của AB là $I = (2; 1)$

Gọi $M(a; b)$ là điểm tùy ý trên đường trung trực, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} &= (a - 2; b - 1) \perp \overrightarrow{AB} \iff (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ \iff 2.2(a - 2) - 2(b - 1) - (-2)(a - 2) + (-2)(b - 1) &= 0 \\ \iff 3a - 2b - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Cách khác

Xét $M(a, b)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (a - 1, b - 2)$, $\overrightarrow{BM} = (a - 3, b)$.

M thuộc đường trung trực đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $MA = MB$

$$\begin{aligned} \iff 2(a - 1)^2 - 2(a - 1)(b - 2) + (b - 2)^2 &= 2(a - 3)^2 - 2(a - 3)b + b^2 \\ \iff 3a - 2b - 4 &= 0. \end{aligned}$$

b. Ta có $AB = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{2.2.2 - 2.2.(-2) + (-2).(-2)} = 2\sqrt{5} \implies R = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} M(a, b) \in C \iff MI = \sqrt{5} \iff 2(a - 2)^2 - 2(a - 2)(b - 1) + (b - 1)^2 &= 5 \\ \iff 2a^2 - 2ab + b^2 - 6a + 2b &= 0. \end{aligned}$$

Cách khác

$$M(a; b) \in C \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$$

$$\iff 2(a - 1)(a - 3) - (a - 1)b - (b - 2)(a - 3) + b(b - 2) = 0 \iff 2a^2 - 2ab + b^2 - 6a + 2b = 0.$$

- c. Ta có $\vec{OA} = (1; 2), \vec{OB} = (3; 0) \implies (\vec{OA}, \vec{OB}) = 2.1.3 - 1.0 - 2.3 + 2.0 = 0$.
 Suy ra tam giác OAB vuông tại O nên $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB$.
 $OA = \sqrt{2-4+4} = \sqrt{2}, OB = \sqrt{2.3.3-0+0} = 3.\sqrt{2} \implies S_{OAB} = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.3\sqrt{2} = 3$.

5.2 Bù vuông góc của không gian con

Định nghĩa 5.2 Trong không gian Euclide V , cho không gian con F . Tập hợp

$$F^\perp = \{x \in V | x \perp F\}$$

gọi là bù vuông góc của không gian con F .

Không gian bù vuông góc còn gọi là không gian bù trực giao.

Định lý

Cho F là KG con của KG Euclide V . Khi đó:

- $F^\perp$ là không gian con của V và

$$V = F \oplus F^\perp.$$

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim V$.

Ví dụ 5.7 Trong R^3 , cho không gian con

$$F = \langle f_1 = (1; 1; 1), f_2 = (2; 1; 0), f_3 = (1; 0; -1) \rangle.$$

Tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bài giải

$$x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \iff x \perp F \iff x \perp f_k, k = 1, 2, 3.$$

$$\iff \begin{cases} (x, f_1) = 0 \\ (x, f_2) = 0 \\ (x, f_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Giải hệ suy ra $x = \alpha(1; -2; 1)$.

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(1; -2; 1)\}$ và $\dim F^\perp = 1$.

Ví dụ 5.8 Trong R^3 , cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \in R^3 \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bài giải

Giải hệ suy ra tập sinh của F : $F = \langle u = (2; -1; 3) \rangle$.

$$x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp \iff x \perp u \iff 2x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

$$\implies F^\perp = \langle (1; 2; 0), (2; 0; -1) \rangle.$$

Cơ sở của $F^\perp$ là $\{(1; 2; 0), (2; 0; -1)\}$ và $\dim F^\perp = 2$.

Ghi chú:

- Cho $F = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$. $x \in F^\perp$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (h_1, x) = 0 \\ (h_2, x) = 0 \\ \dots \\ (h_m, x) = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} h_1 - \\ h_2 - \\ \dots \\ h_m - \end{bmatrix} \cdot x = 0 \text{ (ma trận hàng của } F)$$

Do đó $F^\perp$ là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} h_1 - & 0 \\ h_2 - & 0 \\ \dots & \\ h_m - & 0 \end{bmatrix}$$

- Cho $F = \{x \in R^n | Ax = 0\}$.

$$Ax = 0 \xrightarrow{\text{viết lại theo véc tơ hàng}} \begin{bmatrix} h_1 - \\ h_2 - \\ \dots \\ h_m - \end{bmatrix} \cdot x = 0 \iff \begin{cases} (h_1, x) = 0 \\ (h_2, x) = 0 \\ \dots \\ (h_m, x) = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\forall x \in F : x \perp f_k, k = \overline{1, m}$.

Điều này chứng tỏ $F^\perp$ được sinh bởi các véc tơ hàng của ma trận A .

$$F^\perp = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle, \text{ với } h_k \text{ là các hàng của ma trận } A$$

Tích vô hướng chính tắc trong R^n Cho $F = \{x \in R_n | Ax = 0\}$.
Khi đó

các hàng của A là tập sinh của $F^\perp$

Ví dụ 5.9 Hãy tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$ trong R^4 , trong đó

$$a) F = \{(x; x_2; x_3; x_4) \in R^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\}$$

$$b) F = \langle (1; -1; 2; 1), (2; 1; 1; 0) \rangle$$

Bài giải

a) Ta có $F^\perp = \langle (1; 0; 1; 1), (2; -1; 3; 1) \rangle$ (lấy từ các hàng của hệ).

Suy ra cơ sở của $F^\perp$ là $\{(1; 0; 1; 1), (2; -1; 3; 1)\}$ và $\dim F^\perp = 2$.

b) Vì $F = \langle (1; -1; 2; 1), (2; 1; 1; 0) \rangle$ nên $F^\perp$ là tập nghiệm của hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Giải hệ suy ra $F^\perp = \langle (-1; 1; 1; 0), (-1; 2; 0; 3) \rangle$.

Suy ra cơ sở của $F^\perp$ là $\{(-1; 1; 1; 0), (-1; 2; 0; 3)\}$ và $\dim F^\perp = 2$.

Định lý

- Mọi tập trực giao, không chứa véc tơ không thì ĐLTT.
- Cho $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của KG Euclide V .
 $\forall x \in V$ luôn được biểu diễn duy nhất ở dạng

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \text{ với } x_k = (x, e_k).$$

Ví dụ 5.10 Trong không gian Euclide V , cho cơ sở trực chuẩn

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

Tìm tọa độ của véc tơ $x = (3; -2; 1)$ trong cơ sở E .

Bài giải

Ta viết $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, trong đó

$$x_1 = (x, e_1) = \frac{3}{\sqrt{6}}, x_2 = (x, e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = (x, e_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Vậy tọa độ của x trong cơ sở E là $[x]_E = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 1 \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Ví dụ 5.11 Trong R^3 , cho tích vô hướng

$$(x; y) = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_3$$

và $F = \langle f = (1; 2; 3) \rangle$. Tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bài giải

Ta có $\dim F = 1 \implies \dim F^\perp = 3 - \dim F = 2$.

Ta tìm $F^\perp$ như sau. Xét $x = (x_1; x_2; x_3) \in F^\perp$

$$\iff (x, f) = 0 \iff 1.x_1 + 2.3.x_2 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_3 = 0 \iff x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

Suy ra cơ sở của $F^\perp$ là $\{(3; -1; 0), (1; 0; -1)\}$.

Ví dụ 5.12 Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng

$$(p, q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx, \quad p(x), q(x) \in P_2[x]$$

và không gian con $F = \{p \in P_2[x] | p(1) = 0\}$. Tìm cơ sở và số chiều của $F^\perp$.

Bài giải

Tìm cơ sở của F như sau

$$\text{Xét } p(x) = ax^2 + bx + c \in F \iff p(1) = a + b + c = 0 \iff c = -a - b$$

$$p(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

Suy ra $\{f_1 = x^2 - 1, f_2 = x - 1\}$ là tập sinh của F .

Hơn nữa, $\{f_1, f_2\}$ ĐLTT nên nó là cơ sở của F .

$$\text{Vì } \dim F = 2 \implies \dim F^\perp = 3 - 2 = 1.$$

Tìm cơ sở của $F^\perp$ như sau

$$\text{Xét } q(x) = ax^2 + bx + c \in F^\perp$$

$$\iff \begin{cases} (q, f_1) = \int_0^1 q(x)f_1(x)dx = 0 \\ (q, f_2) = \int_0^1 q(x)f_2(x)dx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{2}{15}a - \frac{b}{4} - \frac{2c}{3} = 0 \\ -\frac{a}{12} - \frac{b}{6} - \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 10c \\ b = -8c \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } q(x) = 10cx^2 - 8cx + c = c(x^2 - 8x + 1).$$

$$\text{Vậy cơ sở của } F^\perp \text{ là } \{x^2 - 8x + 1\}.$$

5.3 Hình chiếu vuông góc

Định nghĩa 5.3 (Hình chiếu vuông góc) .

Trong KG Euclide V , cho không gian con F và véc tơ z .

Véc tơ được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$z = x + y; x \in F, y \in F^\perp.$$

Véc tơ x được gọi là **hình chiếu vuông góc** của z xuống F , ký hiệu:

$$x = Pr_F(z)$$

Khoảng cách từ z xuống F là

$$d(z, F) = \|y\| = \|z - Pr_F(z)\|.$$

Chú ý: Khi $x = Pr_F(z)$ thì $y = z - x$ và $d(z, F^\perp) = \|x\|$.

Hơn nữa, vì $x \perp y$ nên theo Pithagore: $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ví dụ 5.13 Trong R^3 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con

$$F = \langle f_1 = (1; 2; 1), f_2 = (-1; 1; 2) \rangle, \quad z = (2; 1; 8).$$

Tìm $Pr_F(z)$ và $d(F, z)$.

Bài giải

Ta viết $z = x + y, x \in F, y \in F^\perp$.

Vì $Pr_F(z) = x \in F = \langle f_1, f_2 \rangle$ nên $x = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Suy ra

$$z = \alpha f_1 + \beta f_2 + y \quad (*).$$

Để tìm x , ta cần tìm α, β . Muốn vậy, ta nhân 2 vế của (*) lần lượt với f_1 và f_2 với chú ý $y \perp F = \langle f_1, f_2 \rangle$.

$$\begin{cases} (z, f_1) = \alpha(f_1, f_1) + \beta(f_1, f_2) + 0 \\ (z, f_2) = \alpha(f_2, f_1) + \beta(f_2, f_2) + 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 12 \\ 3\alpha + 6\beta = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = Pr_F(z) = 1f_1 + 2f_2 = (-1; 4; 5)$.

$$y = z - x = (3; -3; 3) \iff d(z, F) = \|y\| = 3\sqrt{3}.$$

Ghi chú: ta có thể tìm hình chiếu dưới dạng ma trận như sau

- Ta đặt $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ (viết dạng cột). Hệ phương trình

$$\begin{cases} (z, f_1) = \alpha(f_1, f_1) + \beta(f_1, f_2) + 0 \\ (z, f_2) = \alpha(f_2, f_1) + \beta(f_2, f_2) + 0 \end{cases}$$

được viết lại dưới dạng ma trận là

$$\begin{aligned} F^T F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= F \cdot z \text{ (} z \text{ viết dạng cột)}. \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (F^T \cdot F)^{-1} F^T z \\ \implies x &= \alpha f_1 + \beta f_2 = F \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = F(F^T \cdot F)^{-1} F^T z \end{aligned}$$

Các em có thể thử lại kết quả bằng cách nhân ma trận theo công thức trên.

- Ma trận $P_F = F(F^T \cdot F)^{-1} F^T$ gọi là *mt của phép chiếu* xuống không gian con F .
- Để $F \cdot F^T$ khả nghịch thì $\{f_1, f_2\}$ phải DLTT hay nó phải là cơ sở của F .
- Nếu xét trong một không gian hữu hạn chiều khác R^n thì ta lấy một cơ sở làm chuẩn và chuyển các véc tơ theo tọa độ của nó.
- Trong trường hợp $F \equiv R^n$ tức là $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ là cơ sở của R^n . Lúc đó, ma trận F là ma trận cấp n khả nghịch. Các em dễ dàng kiểm tra được $x \equiv z$.
- Trường hợp $F = \langle f \rangle, f \neq 0$. Lúc này, $x = \alpha f$ và hệ trở thành

$$\alpha(f, f) = (z, f) \implies \alpha = \frac{(z, f)}{(f, f)}.$$

Ta có công thức hình chiếu xuống **một phương** (đường thẳng)

$$Pr_{\langle f \rangle}(z) = \frac{(z, f)}{(f, f)} f$$

Đây là công thức hình chiếu của z xuống phương $\langle f \rangle$.

Công thức hình chiếu đối với tích vô hướng chính tắc trong R^n .

i. Cho $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ là cơ sở của KG con F . Ta có

$$Pr_F(z) = F(F^T F)^{-1} F^T z, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k \end{pmatrix}.$$

Các véc tơ viết dạng cột.

ii. Công thức hình chiếu của z xuống phương $\langle f \rangle$

$$Pr_{\langle f \rangle}(z) = \frac{(z, f)}{(f, f)} f.$$

Ví dụ 5.14 Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

và véc tơ $x = (1; 1; 0; 1)$

a) Tìm hình chiếu của x xuống F .

b) Tìm khoảng cách từ x đến F .

Bài giải

a) Chọn 1 cơ sở $F = \langle f_1 = (2; -1; 1; 0), f_2 = (-2; 1; 0; 1) \rangle$.

Viết $x = f + g = x_1 f_1 + x_2 f_2 + g, g \in F^\perp$.

Nhân lần lượt f_1, f_2 vào phương trình theo nghĩa tích vô hướng, ta được

$$\begin{cases} x_1(f_1, f_1) + x_2(f_1, f_2) = (x, f_1) \\ x_1(f_2, f_1) + x_2(f_2, f_2) = (x, f_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 1 \\ -5x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{6}{11} \\ x_2 = \frac{5}{11} \end{cases}$$

Suy ra

$$EPr_F(z) = f = x_1 f_1 + x_2 f_2 = \frac{6}{11}(2; -1; 1; 0) + \frac{5}{11}f_2(-2; 1; 0; 1) = \left(\frac{2}{11}; \frac{-1}{11}; \frac{6}{11}; \frac{5}{11} \right)$$

Cách khác Xét $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có

$$x = Pr_F(z) = zA^T(AA^T)^{-1}A = \frac{1}{11}(2; -1; 6; 5).$$

$$b) d(x, F) = \|g\| = \|x - Pr_F x\| = \left\| \left(\frac{9}{11}; \frac{12}{11}; \frac{-6}{11}; \frac{6}{11} \right) \right\| = \frac{\sqrt{297}}{11} = \frac{3\sqrt{33}}{11}.$$

Ví dụ 5.15 Trong R^3 , cho không gian con

$$F = \{(x_1; x_2; x_3) \in R^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$$

Tìm $Pr_F(z)$ và $d(z, F)$, với $z = (1; 1; 3)$

Bài giải

Ta phân tích $z = x + y, x \in F, y \in F^\perp$. Lúc này $x = Pr_F(z), y = Pr_{F^\perp}(z)$.

Chú ý $\dim F = 2$ và $\dim F^\perp = 1$. Ta có thể tìm y trước rồi suy ra $x = z - y$ sẽ dễ dàng hơn.

Ta có $F^\perp = \langle g = (1; 2; -3) \rangle$. Công thức hình chiếu xuống 1 phương

$$y = Pr_{\langle F \rangle}(z) = \frac{(z, g)}{(g, g)} \cdot g = \frac{-3}{7}(1; 2; -3) \implies x = z - y = \frac{1}{7}(10; 13; 12).$$

$$\text{Khoảng cách } d(z, F) = \|y\| = \frac{\sqrt{126}}{7} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

Ví dụ 5.16 Trong R^3 , cho tích vô hướng

$$(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_3$$

và không gian con $F = \langle (1; 1; 2), (2; -1; 1) \rangle$. Tìm hình chiếu của $z = (-8; 7; 3)$ xuống F và khoảng cách từ z đến F .

Bài giải

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \implies (x, y) = xAy^T.$$

Phân tích $z = x + y, x \in F, y \in F^\perp$. Trong đó $x = Pr_F(z) = \alpha f_1 + \beta f_2 \in F$, suy ra

$$z = \alpha f_1 + \beta f_2 + y \quad (*).$$

Nhân 2 vế của (*) lần lượt với f_1 và f_2 , ta được

$$\begin{cases} (f_1, f_1)\alpha + (f_1, f_2)\beta = (z, f_1) \\ (f_2, f_1)\alpha + (f_2, f_2)\beta = (z, f_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 10\alpha + 8\beta = -4 \\ 8\alpha + 10\beta = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Suy ra hình chiếu

$$x = Pr_F(z) = 2(1; 1; 2) - 3(2; -1; 1) = (-4; 5; 1).$$

Khoảng cách

$$d(z, F) = \|z - x\| = \|(-4; 2; 2)\| = 2\sqrt{2}.$$

Chú ý: với 1 tích vô hướng lạ thì tính tích vô hướng, khoảng cách, độ dài và góc phải theo tích vô hướng đã cho, không giống với tích vô hướng chính tắc.

Ví dụ 5.17 Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in P_2[x].$$

Tìm hình chiếu của $h(x) = x^2 - 2x$ xuống không gian $F = \langle f_1 = x^2 + 1, f_2 = x + 1 \rangle$ và khoảng cách từ $h(x)$ xuống F .

Bài giải

Phân tích $h(x) = f(x) + g(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + g(x), g \in F^\perp$.

Nhân 2 vế với f_1 và f_2 ta được

$$\begin{cases} (f_1, f_2)\alpha + (f_1, f_2)\beta = (h, f_1) \\ (f_2, f_2)\alpha + (f_2, f_2)\beta = (h, f_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{28}{15}\alpha + \frac{25}{12}\beta = -\frac{29}{30} \\ \frac{25}{12}\alpha + \frac{7}{3}\beta = -\frac{13}{12} \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{11} \\ \beta = -\frac{6}{11} \end{cases}$$

Vậy hình chiếu là $Pr_F(h) = f_1 - f_2 = \frac{1}{11}(x^2 + 1) - \frac{6}{11}(x + 1) = \frac{1}{11}(x^2 - 6x - 5)$.

Khoảng cách

$$d(z, F) = \|h - Pr_F(h)\| = \left\| \frac{1}{11}(10x^2 - 16x + 5) \right\| = \frac{1}{11\sqrt{3}}.$$

5.4 Quá trình Gram-Schmidt

Định lý 5.4 (Gram-Schmidt) Cho $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ là họ ĐLTT của KGVTV. Khi đó tồn tại một họ trực giao

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \text{ thỏa } \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle.$$

Thuật toán Gram-Schmidt để trực giao một họ véc tơ

- $f_1 = e_1$.
- $f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$.
- $f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$.
- $\dots$
- $f_k = e_k - \frac{(e_k, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_k, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 \dots - \frac{(e_k, f_{k-1})}{(f_{k-1}, f_{k-1})} f_{k-1}$.

Ta chia mỗi véc tơ của cơ sở trực giao cho độ dài của nó, ta được một cơ sở **trực chuẩn**.

Ví dụ 5.18 Trong R^3 với tích vô hướng chính tắc, cho cơ sở

$$E = \{e_1 = (1; 1; 1), e_2 = (1; 1; 2), e_3 = (1; 2; 1)\}$$

Hãy trực chuẩn E bằng thuật toán Gram-Schmidt.

Bài giải

Đặt $f_1 = e_1 = (1; 1; 1)$

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (1; 1; 2) - \frac{4}{3}(1; 1; 1) = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{2}{3}\right). \text{ Chọn } f_2 = (-1; -1; 2).$$

$$f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = (1; 2; 1) - \frac{4}{3}(1; 1; 1) - \frac{-1}{6}(-1; -1; 2) = \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Chọn $f_3 = (-1; 1; 0)$. [8pt] Cơ sở trực chuẩn cần tìm là

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) \right\}.$$

Ví dụ 5.19 Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, cho tập DLTT

$$E = \{(1; 0; 1; 1), (0; 1; 1; 1), (1; 1; 1; 1)\}.$$

Hãy trực chuẩn E bằng thuật toán Gram-Schmidt

Bài giải

Chọn $f_1 = e_1 = (1; 0; 1; 1)$.

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0; 1; 1; 1) - \frac{2}{3}(1; 0; 1; 1) = \left(\frac{-2}{3}; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right). \text{ Chọn } f_2 = (-2; 3; 1; 1).$$

$$f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = \left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right). \text{ Chọn } f_3 = (2; 2; -1; -1).$$

Họ trực giao cần tìm là $F = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Chia mỗi véc tơ cho độ dài của nó, ta được cơ sở trực chuẩn là

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{15}}; \frac{3}{\sqrt{15}}; \frac{1}{\sqrt{15}}; \frac{1}{\sqrt{15}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{\sqrt{10}}\right) \right\}.$$

Ví dụ 5.20 Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con

$$F = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \in R^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của F .

Bài giải

Giải hệ, tìm một cơ sở tùy ý của F là $\{(2; -1; 1; 0), (0; -1; 0; 1)\}$.

Dùng Gram-Schmidt: $f_1 = e_1 = (2; -1; 1; 0)$.

$$f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0; -1; 0; 1) - \frac{1}{6}(2; -1; 1; 0) = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-5}{6}; \frac{-1}{6}; 1\right).$$

Chọn $f_2 = (2; 5; 1; -6)$.

Cơ sở trực giao là $F = \{f_1, f_2\}$. Cơ sở trực chuẩn là

$$\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{66}}; \frac{-1}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{66}}; \frac{5}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; \frac{-6}{\sqrt{66}}\right) \right\}.$$

Kiến thức cần nắm

1. Làm quen với tích vô hướng mới, so sánh những điểm giống và khác so với phổ thông.
2. Nắm vững cách tìm: *độ dài, khoảng cách 2 véc tơ, góc, quan hệ vuông góc, không gian bù vuông góc, hình chiếu vuông góc, khoảng cách từ 1 véc tơ đến một không gian con.*
3. Nắm vững thuật toán Gram-Schmidt trực chuẩn một họ véc tơ.
4. Chú ý đến *tích vô hướng, độ dài, khoảng cách và góc* đối với tích vô hướng mới, đặc biệt trên R^n . Tận dụng ma trận để tính toán được tiện lợi hơn.

Tham khảo tích vô hướng tích phân trên $P_2[x]$.

5.5 Bài tập

Câu 1) Trong $R_2 : x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, cho tích vô hướng

$$(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

- (a) Tính $\cos(\widehat{(x, y)})$.
- (b) Tính $\|x + y\|, d(x, y)$.
- (c) Tìm cơ sở của $V = \{x | x \perp u\}$.

Câu 2) Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc, tìm cơ sở và số chiều của không gian bù vuông góc $V^\perp$.

a) $\langle (1; 1; 1; 1), (2; 1; 0; -1) \rangle$.

b) $V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Câu 3) Tìm một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có tập nghiệm là

$$V = \langle (1; 2; 1; 1), (3; 1; 2; 2) \rangle$$

Câu 4) Trong R^4 với tích vô hướng chính tắc và $z = (-2; 5; 0; 7)$. Tìm hình chiếu vuông góc của z xuống $V: Pr_V(z)$ và $d(z, V)$, biết rằng

a) $V = \langle (1; 2; 1; 4), (3; -2; 1; 2) \rangle$

b) $V = \langle (1; 2; 1; 3) \rangle$

Câu 5) Trong R^3 , cho cơ sở $M = \{(1; 2; 1), (1; 1; 1), (4; 0; 1)\}$.

- a) Trục chuẩn $M \rightarrow E$.
 b) Tìm $[x]_E$, biết $x = (4; -2; 1)$.

Câu 6) Trong R^3 , cho tích vô hướng chính tắc và không gian con

$$V = \{(x; x_2; x_3) \in R^3 | x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

- (a) Tìm cơ sở của $V^\perp$.
 (b) Tìm $Pr_V(z)$, $z = (1; 2; 3)$.
 (c) Tìm 1 cơ sở trực chuẩn của V .

Câu 7) Trong R_4 , cho KG con

$$U = \langle (1, 1, 0, 0); (2, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \rangle$$

và véc tơ $z = (7, 3, 0, 0)$.

- (a) Tìm cơ sở và số chiều của $U^\perp$.
 (b) Tìm $Pr_U(z)$, $Pr_{U^\perp}(z)$, $d(z, U)$, $d(z, U^\perp)$.
 (c) Tìm một cơ sở trực chuẩn của U .
 (d) Tìm lại $Pr_U(z)$ theo cơ sở trực chuẩn.

Câu 8) Trong R_4 , cho không gian nghiệm của hệ thuần nhất

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \quad V : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Tìm cơ sở và số chiều của $W = (U \cap V)^\perp$.
 (b) Tìm cơ sở trực chuẩn E của W .
 (c) Tìm véc tơ e sao cho $\{E, e\}$ là một cơ sở trực chuẩn của R_4 .

Câu 9) Trong R^3 , cho tích vô hướng

$$(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3$$

và không gian con $F = \langle (1; 1; 3), (3; 0; 7) \rangle$.

- a) Tìm cơ sở của $F^\perp$.
 b) Tìm $Pr_F(z)$ và $d(z, F)$, biết $z = (0; 1; 4)$.

Câu 10) Trong $P_2[x]$, cho tích vô hướng

$$(p, q) = \int_0^2 p(x)q(x)dx.$$

- a) Tìm cơ sở của $F = \{p(x) \in P_2[x] | p'(-1) = 0\}$
 b) Cho $G = \{p(x) \in P_2[x] | p(1) = 0\}$ và $h(x) = (x - 1)^2$. Tìm $Pr_G(h)$ và $d(h, G)$.

Nội dung

- 1) Định nghĩa và ví dụ.
- 2) Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính.
- 3) Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong một cặp cơ sở.
- 4) Liên hệ giữa 2 ma trận của ánh xạ tuyến tính

6.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.1 (Ánh xạ) Cho 2 tập hợp khác rỗng X, Y . Ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc sao cho mỗi x thuộc X , tồn tại duy nhất y thuộc Y . Ta viết

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Ánh xạ f gọi là **đơn ánh** nếu: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Ánh xạ f gọi là **toàn ánh** nếu: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

Ánh xạ f gọi là **song ánh** nếu đơn ánh và toàn ánh.

Hàm số ở phổ thông là ví dụ về ánh xạ.

Cho ánh xạ tức là chỉ ra quy luật, dựa vào đó viết ảnh của mọi phần tử thuộc X .

Có nhiều cách cho ánh xạ: bằng đồ thị, bằng biểu đồ, bằng biểu thức đại số, bằng cách liệt kê, ...

Ví dụ 6.1 Cho ánh xạ hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của các hàm số sau

a. $f(x) = x^2$.

Ta có $f(1) = f(-1)$ nên hàm số không đơn ánh.

Xét $y = -1$. Không tồn tại bất kỳ số thực x nào để $f(x) = x^2 = -1$. Do đó f không toàn ánh.

b. $f(x) = x^3 - x$

Ta có $f(0) = f(1)$ nên hàm số không đơn ánh.

Vì tập giá trị của f bằng $(-\infty, +\infty)$ nên hàm số toàn ánh.

c. $f(x) = \arctan x$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$. Hàm số luôn tăng nên đơn ánh.

Tập giá trị của f là $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nên không toàn ánh. Hay cách khác, ta chọn $y = 2 > \frac{\pi}{2}$ thì không tồn tại x để $f(x) = 2$.

d. $f(x) = x^3 + 3x$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Hàm số đồng biến trên R nên đơn ánh.

Tập giá trị của f là R nên hàm số toàn ánh

Vậy hàm số là 1 song ánh.

Định nghĩa 6.2 (Ảnh xạ tuyến tính) Cho V, W là hai không gian trên cùng trường số K .

Ảnh xạ $f : V \rightarrow W$ gọi là **ảnh xạ tuyến tính** (axtt) nếu thỏa:

$$i) f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$ii) f(\alpha v) = \alpha f(v), \forall v \in V, \alpha \in K.$$

Ghi chú: ảnh xạ tuyến tính trên R^n chỉ chứa các số hạng bậc nhất.

Ví dụ 6.2

- a) $f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2)$ là một ảnh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^2 . (??).
- b) Phép quay trong không gian $Oxyz$ quanh trục Oz một góc 30° ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ hướng dương của trục Oz là một ảnh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^3 .
- c) Tương tự phép đối xứng, phép chiếu,... qua các đường thẳng và mặt phẳng qua gốc tọa độ là những ảnh xạ tuyến tính từ R^3 đến R^3 .

Cho $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là tập sinh của KGVTV và axtt $f : V \rightarrow W$.

Giả sử ta biết $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.

$$\forall x \in V : x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \implies f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n)$$

$$f(x) = f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + \dots + f(x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n).$$

Ảnh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn nếu biết được ảnh của một tập sinh của V .

Ví dụ 6.3 Cho ảnh xạ tuyến tính $f : R^3 \rightarrow R^2$, biết

$$f(1; 1; 0) = (2; -1), \quad f(1; 1; 1) = (1; 2), \quad f(1; 0; 1) = (-1; 1).$$

a) Tìm $f(3; 3; 2)$

b) Tìm $f(3; 1; 5)$.

c) Tìm $f(x_1; x_2; x_3)$.

Bài giải

a) Dễ thấy $(3; 3; 2) = (1; 1; 0) + 2(1; 1; 1)$.

$$\Rightarrow f(3; 3; 2) = f(1; 1; 0) + 2f(1; 1; 1) = (2; -1) + 2(1; 2) = (4; 3).$$

b) Muốn tính được $f(3; 1; 5)$, ta phải biểu diễn nó qua 3 véc tơ đã biết ảnh ở trên

$$\text{Viết } (3; 1; 5) = \alpha(1; 1; 0) + \beta(1; 1; 1) + \gamma(1; 0; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\text{Như vậy } (3; 1; 5) = \alpha(1; 1; 0) + \beta(1; 1; 1) + \gamma(1; 0; 1)$$

$$\Rightarrow f(3; 1; 5) = -2(2; -1) + 3(1; 2) + 2(-1; 1) = (-3; 10).$$

c) Việc biểu diễn véc tơ tổng quát $(x_1; x_2; x_3)$ qua 3 véc tơ trên hơi phức tạp. Tham khảo cách làm sau.

$$f(0; 0; 1) = f(1; 1; 1) - f(1; 1; 0) = (1; 2) - (2; -1) = (-1; 3).$$

$$f(0; 1; 0) = f(1; 1; 1) - f(1; 0; 1) = (1; 2) - (-1; 1) = (2; 1).$$

$$f(1; 0; 0) = f(1; 1; 0) - f(0; 1; 0) = (2; -1) - (2; 1) = (0; -2)$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = x_1 f(1; 0; 0) + x_2 f(0; 1; 0) + x_3 f(0; 0; 1) = x_1(0; -2) + x_2(2; 1) + x_3(-1; 3)$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = (2x_2 - x_3; -2x_1 + x_2 + 3x_3)$$

Ghi chú: Ta có thể dùng các phép biến đổi cho ánh xạ tuyến tính để tìm ảnh của 3 véc tơ đơn vị.

Tuy nhiên ta sẽ gặp khó khăn tìm ra phép biến đổi trong trường hợp tổng quát.

Ta có thể viết ánh xạ tuyến tính dưới dạng ma trận để tìm ảnh của 3 véc tơ đơn vị như sau:

$$(\text{theo hàng}) \left[\begin{array}{c|c} e_1 & f(e_1) \\ e_2 & f(e_2) \\ e_3 & f(e_3) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{bđsc}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

Kết hợp với ý nghĩa phép nhân ma trận, ta có thuật toán sau

Tìm axtt cho ảnh của cơ sở

Cho cơ sở $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ và ánh xạ tuyến tính thỏa $f(e_k) = f_k$

$$\text{Theo hàng } \left[\begin{array}{c|c} E & F \end{array} \right] \xrightarrow[\text{nhân bên trái với } E^{-1}]{\text{bđsc theo hàng, tương ứng}} \left[\begin{array}{c|c} I & E^{-1}F \end{array} \right]$$

Ví dụ 6.4 Cho f là phép đối xứng qua mặt phẳng $2x - y + 3z = 0$ là ánh xạ tuyến tính trong không gian $Oxyz$. Hãy tìm $f(x_1; x_2; x_3)$.

Bài giải

f biến cặp véc tơ chỉ phương thành chính nó và véc tơ pháp tuyến thành véc tơ đối

$$a_1 = (1; 2; 0) : f(1; 2; 0) = (1; 2; 0)$$

$$a_2 = (0; 3; 1) : f(0; 3; 1) = (0; 3; 1)$$

$$n = (2; -1; 3) : f(2; -1; 3) = (-2; 1; -3).$$

Viết dạng ma trận

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{casio tính } E^{-1}F} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1\left(\frac{3}{7}; \frac{2}{7}; \frac{-6}{7}\right) + x_2\left(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right) + x_3\left(\frac{-6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{-2}{7}\right) \\ &= \frac{1}{7}(3x_1 + 2x_2 - 6x_3; 2x_1 + 6x_2 + 3x_3; -6x_1 + 3x_2 - 2x_3) \end{aligned}$$

6.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$

Nhân của f được định nghĩa là

$$\ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$$

Ảnh được định nghĩa là

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \in W | x \in V\}$$

Định lý Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$

- $\ker f$ là KG con của V .
- $\operatorname{Im} f$ là KG con của W .

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$$

Ghi chú: $\ker f$ là tập nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

$\operatorname{im} f$ là tập các ảnh của f (trong hàm số gọi là tập giá trị).