

Đại học Quốc gia TP.HCM
Trường Đại học Bách Khoa
Bộ môn Toán Ứng dụng



Bài Giảng Đại Số Tuyến Tính

ThS.Nguyễn Hữu Hiệp

E-mail: nguyenhuuhiep47@yahoo.com

Ngày 19 tháng 9 năm 2014

Mục lục	1
1 Ma trận	3
1.1 Các khái niệm cơ bản	3
1.2 Biến đổi sơ cấp và hạng của ma trận	6
1.3 Các phép toán ma trận	8
1.4 Ma trận nghịch đảo	12
1.5 Bài tập trắc nghiệm	15
2 Định thức	23
2.1 Định thức	23
2.2 Tính chất định thức	24
2.3 Ma trận nghịch đảo	29
2.4 Laplace và định thức cấp n	32
2.5 Bài tập trắc nghiệm	35
3 Hệ phương trình	43
3.1 Hệ tổng quát	43
3.2 Hệ phương trình Cramer	46
3.3 Hệ thuần nhất	47
3.4 Bài tập trắc nghiệm	52
4 Không gian véc tơ	59
4.1 Định nghĩa và ví dụ	59
4.2 ĐLTT - PTTT	60
4.3 Hạng của họ véc tơ	65
4.4 Tập sinh, cơ sở và số chiều	68
4.5 Tọa độ véc tơ	72
4.6 Ma trận chuyển cơ sở	76
4.7 Không gian con	79
4.8 Tổng giao hai không gian con	84
4.9 Bài tập trắc nghiệm	89
5 Không gian Euclide	97
5.1 Tích vô hướng của 2 véc tơ	97
5.2 KG bù vuông góc	102
5.3 Hình chiếu vuông góc	105
5.4 Quá trình Gram-Schmidt	109
5.5 Bài tập	111

6	Ảnh xạ tuyến tính	113
6.1	Định nghĩa và ví dụ	113
6.2	Nhân và ảnh	116
6.3	Ma trận của axtt	119
6.4	Liên hệ giữa 2 ma trận	123
6.5	Bài tập	127
7	Trị riêng - véc tơ riêng	129
7.1	TR-VTR	129
7.2	Chéo hóa ma trận	135
7.3	MT đối xứng thực	139
7.4	TR, VTR của axtt	142
7.5	Chéo hóa axtt	144
7.6	Bài tập	147
8	Dạng toàn phương	149
8.1	Định nghĩa	149
8.2	Dạng chính tắc	150
8.3	Phân loại dạng toàn phương	153
8.4	Bài tập	159
9	Các đề thi cuối kỳ	161
10	Matlab	173
10.1	Cài đặt	173
10.2	Giới thiệu	179
10.3	Các lệnh cơ bản của matlab	180
10.4	Các lệnh cơ bản trong đại số	180
10.5	Một số lệnh cơ bản dùng trong lập trình	181
10.6	Cấu trúc điều kiện và vòng lặp	182

Chương 0. Số phức

Nội dung

- Dạng đại số của số phức
- Dạng lượng giác của số phức
- Dạng mũ của số phức
- Căn bậc n của số phức
- Định lý cơ bản đại số
- Quỹ tích trong mặt phẳng phức.

0.1 Dạng đại số của số phức

Định nghĩa 0.1 i) Số i , được gọi là **đơn vị ảo**, là một số sao cho $i^2 = -1$.

ii) Cho a, b là 2 số thực, i là đơn vị ảo. Khi đó $z = a + bi$ được gọi là số phức.

Số thực $a := \operatorname{Re}(z)$ gọi là **phần thực** của số phức z .

Số thực $b := \operatorname{Im}(z)$ gọi là **phần ảo** của số phức z .

Số thực $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ gọi là **modul** của số phức z

iii) Tập tất cả các số phức dạng $z = 0 + ib, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gọi là **số thuần ảo**.

Ví dụ 0.1

$i, -2i, 3i$ là những số thuần ảo.

Tập hợp số thực là tập hợp con của tập hợp số phức, vì: $\forall a \in \mathbb{R} : a = a + 0.i$ là một số phức.

Định nghĩa 0.2 2 số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Ví dụ 0.2 cho $z_1 = 2 + 3i, z_2 = m + 3i$. Tìm m để $z_1 = z_2$.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} 2 = m, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Phép cộng trừ 2 số phức

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ví dụ 0.3 Tìm phần thực và ảo của $z = (3 + 5i) + (2 - 3i)$.

$$z = (3 + 5i) + (2 - 3i) = (3 + 2) + (5 - 3)i = 5 + 2i.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 2.$$

Phép nhân 2 số phức

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ví dụ 0.4 Tìm dạng đại số của $z = (2 + 5i)(3 + 2i)$.

$$\begin{aligned} z &= (2 + 5i)(3 + 2i) = 2.3 + 2.2i + 5i.3 + 5i.2i \\ &= 6 + 4i + 15i + 10i^2 = 6 + 10(-1) + 19i \\ &= -4 + 19i. \end{aligned}$$

Ghi chú

- Khi cộng(trừ) 2 số phức, ta cộng(trừ) phần thực và phần ảo tương ứng.
- Khi nhân 2 số phức, ta thực hiện giống như nhân 2 biểu thức đại số với chú ý $i^2 = -1$.

Số phức liên hợp

Số phức $\bar{z} = a - bi$ gọi là liên hợp của số phức $z = a + bi$.

Ví dụ 0.5 Tìm số phức liên hợp của $z = (2 + 3i)(4 - 2i)$.

Ta có

$$\begin{aligned} z &= (2 + 3i)(4 - 2i) = 2.4 - 2.2i + 3i.4 - 3i.2i \\ &= 8 - 4i + 12i + 6 = 14 + 8i \\ \Rightarrow \bar{z} &= 14 - 8i. \end{aligned}$$

Tính chất cho 2 số phức z, w

$$1) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}. \quad 5) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

$$2) z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}. \quad 6) \overline{\bar{z}} = z.$$

$$3) z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

$$4) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}. \quad 7) \overline{z^n} = \bar{z}^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chia 2 số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Ta nhân liên cả tử và mẫu cho liên hợp mẫu.

Ví dụ 0.6 Thực hiện phép toán $z = \frac{3+2i}{5-i}$.

Bài giải

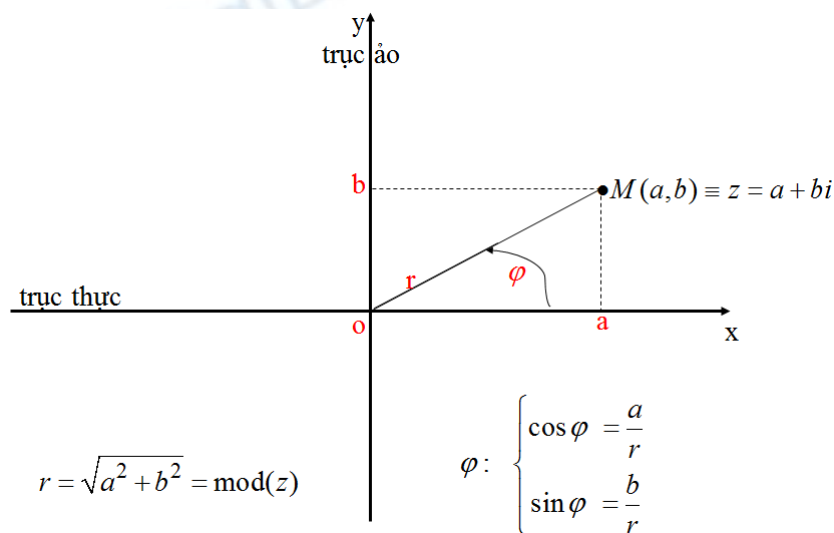
Nhân cả tử và mẫu cho $5+i$, ta được

$$z = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15+3i+10i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Chú ý: số phức không có quan hệ thứ tự

Trong trường số phức C không có khái niệm so sánh. Biểu thức $z_1 < z_2$ hay $z_1 \geq z_2$ đều không có nghĩa trong trường số phức.

0.2 Dạng lượng giác của số phức



Argument của số phức z là góc φ và được ký hiệu là

$$\arg(z) = \varphi$$

Góc φ được giới hạn trong $[0, 2\pi)$ hoặc $(-\pi, \pi]$.

Ví dụ 0.7 Tìm mô đun của số phức $z = 3 - 4i$.

$$a = 3, b = -4 \implies |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

Chú ý

- Nếu xem số phức $z = a + bi$ là một điểm (a, b) trong mặt phẳng phức thì

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$

là **khoảng cách** từ gốc tọa độ $O(0, 0)$ đến z .

- Cho $z = a + bi, w = c + di$ thì

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

là **khoảng cách giữa 2 điểm** z và w .

- **Bất đẳng thức tam giác**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ví dụ 0.8

Tập hợp các số phức z thỏa $|z - (2 - 3i)| = 5$ trong mặt phẳng phức là đường tròn tâm $(2, -3)$ bán kính bằng 5.

Công thức tìm argument

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Ví dụ 0.9 Tìm argument số phức $z = \sqrt{3} + i$.

$a = \sqrt{3}, b = 1$. Ta tìm góc φ thỏa

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Dạng lượng giác số phức

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gọi là dạng lượng giác.

Ví dụ 0.10 Tìm dạng lượng giác số phức $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$a = -1, b = \sqrt{3}$. Mô đun: $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$.

Argument

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{2}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Dạng lượng giác $z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$.

Sự bằng nhau của 2 số phức ở dạng lượng giác

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi. \end{cases}$$

Phép nhân ở dạng lượng giác

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Mô đun nhân với nhau, argument cộng lại.

Ví dụ 0.11 Tìm dạng lượng giác số phức $z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$.

Bài giải

$$\begin{aligned} z &= (1+i)(1-i\sqrt{3}) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot 2(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}) \\ &= 2\sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12}). \end{aligned}$$

Phép chia dạng lượng giác

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), r_2 \neq 0.$$

Modul chia modul, góc trừ góc.

Modul số phức

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0.$
- $|z^n| = |z|^n$

Ví dụ 0.12 Tìm dạng lượng giác số phức $z = \frac{2 - i\sqrt{12}}{-\sqrt{3} + i}$.

Bài giải

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 - i\sqrt{12}}{-\sqrt{3} + i} = \frac{4(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3})}{2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})} \\ &= 2 \left[\cos\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) \right] = 2 \left(\cos \frac{-7\pi}{6} + i \sin \frac{-7\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Ví dụ 0.13 Cho $|z| = 2$, tìm modul của số phức $w = \frac{i^5(3 - 4i)^4}{z^3(1 - 2i)^2}$.

Bài giải

Ta có

$$|w| = \frac{|i|^5 |3 - 4i|^4}{|z|^3 |1 - 2i|^2} = \frac{1 \cdot 5^4}{2^3 \cdot \sqrt{5}^2} = \frac{125}{8}$$

Ví dụ 0.14 Tìm modul của z^{10} biết $\overline{z^2} = 2z^7$.

Bài giải

Ta có

$$|\overline{z^2}| = |2z^7| \iff |z|^2 = 2|z|^7 \iff |z| = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \implies |z^{10}| = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^{10} = \frac{1}{4}.$$

0.3 Dạng mũ số của số phức

Định lý Euler(1707-1783)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Dạng mũ của số phức $z = r.e^{i\varphi}$.

Ví dụ 0.15 Tìm dạng lượng giác và mũ của số phức $z = -\sqrt{3} + i$.

Bài giải

$$\text{Dạng lượng giác } z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

$$\text{Dạng Mũ } z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Lũy thừa số phức ở dạng đại số.

$$(a+ib)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} bi + C_n^2 a^{n-2} (bi)^2 + \dots + C_n^n (bi)^n := A + Bi.$$

Ví dụ 0.16 Cho số phức $z = 2 + i$. Tính z^5 .

Bài giải

$$\begin{aligned} z^5 &= (2+i)^5 = C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 i + C_5^2 2^3 i^2 + C_5^3 2^2 i^3 + C_5^4 2 i^4 + C_5^5 i^5 \\ &= 32 + 5 \cdot 16 \cdot i + 10 \cdot 8 \cdot (-1) + 10 \cdot 4 \cdot (-i) + 5 \cdot 2 \cdot 1 + i \\ &= -38 + 41i. \end{aligned}$$

Lũy thừa bậc n của i .

Ta phân tích $n = 4p + r : r$ là phần dư trong phép chia n cho 4.

$$i^n = i^r$$

Ví dụ 0.17 Tính $z = i^{2013}$.

Ta có $2013 = 503 \cdot 4 + 1 \Rightarrow z = i^{2013} = i^1 = i$.

Ví dụ 0.18 Cho số phức $z = 1 + i$. Tìm z^3 và z^{100} .

Bài giải

a) $z^3 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$.

b) Ta dùng nhị thức newton như trên sẽ rất dài. Dùng công thức De Moivre sau đây sẽ rất hiệu quả.

Công thức De Moivre nâng lũy thừa số phức dạng lượng giác

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\text{Dạng lượng mũ } z = re^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Ví dụ 0.19 Sử dụng công thức De Moivre, tính

a) $(1+i)^{25}$. b) $(-1+i\sqrt{3})^{200}$. c) $\frac{(\sqrt{3}-i)^{17}}{(\sqrt{12}+2i)^{20}}$.

Bài giải

Đầu tiên tìm $\arg(z)$ và $|z|$ suy ra dạng lượng giác hoặc mũ. Dùng công thức De Moivre để nâng lũy thừa.

a) $|z| = \sqrt{2}, \arg(z) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.
 $\Rightarrow z^{25} = \sqrt{2}^{25} (\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4}) = 12\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 12$.

b) $z = (-1 + i\sqrt{3}) = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$
 $\implies z^{200} = 2^{200}(\cos \frac{400\pi}{3} + i \sin \frac{400\pi}{3}) = 2^{200}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = 2^{199}(-1 - i\sqrt{3}).$
 Chú ý: $400\frac{\pi}{3} = 132\pi + \frac{4\pi}{3}.$

c) $\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}) \implies (\sqrt{3} - i)^{17} = 2^{17}(\cos \frac{-17\pi}{6} + i \sin \frac{-17\pi}{6})$
 $\sqrt{12} + 2i = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \implies (\sqrt{12} + 2i)^{20} = 4^{20}(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6})$
 Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3} - i)^{17}}{(\sqrt{12} + 2i)^{20}} &= \frac{2^{17}(\cos \frac{-17\pi}{6} + i \sin \frac{-17\pi}{6})}{4^{20}(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6})} \\ &= 2^{-23}(\cos \frac{-37\pi}{6} + i \sin \frac{-37\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{2^{23}}(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{2^{23}}(\sqrt{3} - i) \end{aligned}$$

0.4 Căn bậc n của số phức

căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z là số phức w thỏa $w^n = z, n \in \mathbb{N}$.

Công thức căn bậc n .

Cho dạng lượng giác $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Công thức

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right); k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Căn bậc n của $z (z \neq 0)$ có đúng n giá trị phân biệt.

Ví dụ 0.20 Tìm căn bậc n của các số phức sau:

a) $\sqrt[3]{8}.$

c) $\sqrt[8]{\frac{16i}{1+i}}.$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}.$

d) $\sqrt{5 + 12i}.$

Bài giải

a) $8 = 8(\cos 0 + i \sin 0) \implies \sqrt[3]{8} = 2 \left(\cos \frac{0 + k2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + k2\pi}{3} \right); k = 0, 1, 2.$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4} \right); k = 0, 1, 2, 3.$

$$c) \sqrt[8]{\frac{16i}{1+i}} = \sqrt[8]{\frac{16e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}} = \sqrt[8]{8\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[8]{8\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{8}i}, k = 1, 2, \dots, 7.$$

d) Argument của $5 + 12i$ không phải cung đặc biệt. Ta sẽ dùng dạng đại số để tính $\sqrt{5 + 12i}$ như sau

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + 12i} = a + bi &\iff 5 + 12i = (a + bi)^2 \iff 5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 5, \\ 2ab = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 3, \\ b = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: $\sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i)$

0.5 Định lý cơ bản đại số

Định lý cơ bản đại số

Mọi đa thức bậc n có đúng n nghiệm kể cả bội.

Ví dụ: nghiệm kép xem như 2 nghiệm,...

Từ định lý này ta có thể suy ra mọi đa thức luôn phân tích được dưới dạng tích các nhị thức bậc nhất. Do vậy trường số phức còn gọi là *trường phân rã*. Tính chất này còn cho thấy, trường số phức là trường lớn nhất, tức là không còn bất kỳ trường nào chứa thật sự được trường số phức.

Từ định lý ta suy ra hệ quả sau

Hệ quả: Cho $P(z)$ là đa thức hệ số thực. Khi đó

$$p(a + bi) = 0 \implies p(a - bi) = 0.$$

Một cách khác

$$\begin{cases} P(z) \in R[z] \\ P(z_0) = 0 \end{cases} \implies P(\overline{z_0}) = 0.$$

Ví dụ 0.21 Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$, biết 1 nghiệm là $2 + i$.

Bài giải

Theo hệ quả: $P(2 + i) = 0 \implies P(2 - i) = 0$.

Do đó $P(z)$ chia hết cho $q(z) = (z - (2 + i))(z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$.

Thực hiện phép chia $P(z)$ cho $q(z)$ được thương là $z^2 + 9$.

Vậy $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 9)$.

Nghiệm của $P(z)$ là

$$2 + i, 2 - i, 3i, -3i.$$

Ví dụ 0.22 Giải phương trình $z^9 + i = 0$.

Bài giải

$$z = \sqrt[9]{-i} = \sqrt[9]{\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9}, k = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

Ví dụ 0.23 Giải phương trình

a) $z^5 + 1 - i = 0$. b) $z^2 + z + 1 = 0$. c) $z^4 + 2z^2 + 5 = 0$.

Bài giải

a) $z = \sqrt[5]{-1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4})} = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, \dots, 4.$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{3}.$

Nghiệm là

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_2}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

c) Đặt $w = z^2$, phương trình trở thành $w^2 + w + 2 = 0$.

$$\Delta' = -4 = (2i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2i.$$

Suy ra

$$w_1 = -1 + 2i \vee w_2 = -1 - 2i.$$

Với $w_1 = -1 + 2i \Rightarrow z = \sqrt{-1 + 2i} = \pm \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + i \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right).$

Với $w_2 = -1 - 2i \Rightarrow z = \sqrt{-1 - 2i} = \pm \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - i \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right).$

0.6 Quỹ tích trong mặt phẳng phức

1) **Đường tròn** là tập các điểm cách đều 1 điểm cho trước bằng 1 khoảng không đổi.

Điểm cho trước gọi là tâm, khoảng không đổi gọi là bán kính.

Từ định nghĩa ta suy ra quỹ tích đường tròn trong mặt phẳng phức

$$B(z_0, r) = \{z \in C : |z - z_0| = r\}$$

Ngoài ra đường tròn $B(z_0, r)$ còn được viết dưới dạng lượng giác

$$B(z_0, r) = \{z = z_0 + re^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

2) **Elip** là tập những điểm có tổng khoảng cách đến 2 điểm cố định một khoảng không đổi. 2 điểm cố định gọi là tiêu điểm và khoảng không đổi gọi là độ dài trục lớn $2a$.

Khoảng cách 2 tiêu điểm gọi là tiêu cự $|z_1 - z_2| = 2c < 2a$.

$$\{|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, a > c\}.$$

- 3) **Đường thẳng** là tập tất cả các điểm thẳng hàng. Đường thẳng có qua điểm z_0 có véc tơ chỉ phương z_1 là

$$\{z_0 + az_1 : a \in R\}$$

Đường trung trực của một đoạn thẳng là tập tất cả những điểm cách đều 2 điểm cho trước

$$\{z \in C : |z - z_1| = |z - z_2|\}$$

Ở dạng lượng giác, đường thẳng có thể được viết ở dạng

$$\{z = z_0 + ae^{i\varphi} : a \in R\}.$$

Ví dụ 0.24

- a. Tập $\{z \in C : |z - 2| + |z + 3 - 2i| = 6\}$ là một elip.
- b. Tập $\{z \in C : |z - 2i + 3| = |1 - i + z|\}$ là một đường thẳng.
- c. Tập $\{z = e^{2+i\phi} : \phi \in (0, \pi)\}$
Ta viết $z = e^2 e^{i\phi}$ có bán kính $r = e^2$ cố định và $\arg$ là $\phi \in (0, \pi)$ thay đổi là nửa đường tròn.
- d. Tập $\{z = e^{a+2i} : a \in R\}$.
Ta viết $z = e^a e^{2i}$ có bán kính $r = e^a$ thay đổi và $\arg$ là $\varphi = 2$ cố định là nửa đường thẳng.

Ví dụ 0.25 Tìm số nghiệm của hệ phương trình

a.
$$\begin{cases} |z - 3 + 2i| = 1 \\ |z - i + 1| = 2 \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình thứ nhất cho ta $z \in B(3-2i, 1)$ và pt thứ 2 cho ta $z \in B(i-1, 2)$. Khoảng cách 2 tâm $d = |(3-2i) - (i-1)| = 5$. Vì

$$d = 5 > r_1 + r_2 = 3.$$

nên 2 đường tròn này rời nhau. Do đó hệ vô nghiệm.

b.
$$\begin{cases} |z - 3i - 1| = 2 \\ |z + 2i| = |z - i - 1| \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất là đường tròn $B(3i+1, 2)$ và pt thứ 2 là đường trung trực đoạn thẳng.

Vẽ đường tròn và đường thẳng trong mặt phẳng ta thấy chúng cắt nhau tại 2 điểm. Vậy hệ có 2 nghiệm.

Kiến thức cần nắm

- 1) Dạng đại số, dạng lượng giác, mũ của số phức.
- 2) Tìm modul và argument của số phức và viết được dạng lượng giác và dạng mũ.
- 3) Nâng lũy thừa, tính căn bậc n của số phức.
- 4) Nắm vững định lý cơ bản đại số. Vận dụng, giải phương trình trong phức.
- 5) Nắm được ý nghĩa hình học các đường cơ bản trong mặt phẳng phức và vận dụng.



cuu duong than cong . com

0.7 Bài tập

Bài tập trắc nghiệm

Trường Đại Học Bách Khoa TP HCM.

Biên soạn: TS Đặng Văn Vinh. Câu hỏi trắc nghiệm: Số phức phần 1.

Câu 1 : Tìm $\sqrt{4}$ trong trường số phức.

- (a) $z_1 = 2; z_2 = -2i$. (b) $z_1 = 2; z_2 = -2$. (c) $z_1 = 2$. (d) $z_1 = 2; z_2 = 2i$.

Câu 2 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $(-1 + i)^n$ là một số thực.

- (a) $n = 3$. (b) $n = 4$. (c) $n = 1$. (d) $n = 6$.

Câu 3 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $(-1 + i\sqrt{3})^n$ là một số thực.

- (a) $n = 1$. (b) không tồn tại n . (c) $n = 3$. (d) $n = 6$.

Câu 4 : Tập hợp tất cả các số phức $|z + 2i| = |z - 2i|$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Trục Ox . (b) Đường tròn. (c) Trục Oy . (d) Nửa mặt phẳng.

Câu 5 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số $z = (-\sqrt{3} + i)^n$ là một số thực.

- (a) $n = 12$. (b) $n = 6$. (c) $n = 3$. (d) $n = 8$.

Câu 6 : Giải phương trình $z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ trong C , biết $z = i$ là một nghiệm.

- (a) $z_{1,2} = \pm i; z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. (c) $z_{1,2} = \pm i; z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
 (b) $z_{1,2} = \pm i; z_{3,4} = \frac{-1 \pm 3i}{2}$. (d) $z_{1,2} = \pm i; z_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{7}$.

Câu 7 : Tập hợp tất cả các số phức $z = a(\cos 2 + i \sin 2); a \in \mathbb{R}$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Đường thẳng. (b) Đường tròn. (c) 3 câu kia đều sai. (d) Nửa đường tròn.

Câu 8 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số $z = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^n$ là một số thực.

- (a) $n = 5$. (b) $n = 6$. (c) $n = 3$. (d) $n = 12$.

Câu 9 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số $z = (-\sqrt{3} + i)^n$ là một số thuần ảo.

- (a) $n = 2$. (b) $n = 3$. (c) $n = 12$. (d) $n = 6$.

Câu 10 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{-1 + i}$

- (a) $\varphi = \frac{-7\pi}{12}$. (b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. (c) $\varphi = \frac{-13\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 11 : Giải $z^3 - i = 0$ trong trường số phức.

- (a) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$. (c) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}; z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$.
 (b) Các câu kia sai. (d) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{5i\pi}{6}}; z_2 = e^{\frac{9i\pi}{6}}$.

Câu 12 : Tính $z = \frac{(1 - i)^9}{3 + i}$

- (a) $\frac{16}{5} - \frac{32i}{5}$. (b) $\frac{8}{5} - \frac{32i}{5}$. (c) $\frac{8}{5} + \frac{64i}{5}$. (d) $\frac{16}{5} + \frac{32i}{5}$.

Câu 13 : Tìm $\sqrt[3]{i}$ trong trường số phức.

- (a) Các câu kia sai. (c) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
 (b) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{5i\pi}{6}}; z_2 = e^{\frac{9i\pi}{6}}$. (d) $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}; z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}; z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$.

Câu 14 : Tính $z = \frac{3 + i}{2i}$

- (a) $\frac{-1}{2} - \frac{3i}{2}$. (b) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$. (c) $1 - 3i$. (d) $\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$.

Câu 15 : Biểu diễn các số phức có dạng $z = e^{2+iy}, y \in \mathbb{R}$ lên mặt phẳng phức là

- (a) Đường tròn bán kính 2. (c) Đường thẳng $y = e^2x$.
 (b) Đường tròn bán kính e^2 . (d) Đường thẳng $x = 2 + y$.

Câu 16 : Cho các số phức $z = e^{a+2i}$, $a \in \mathbb{R}$. Biểu diễn những số đó lên trên mặt phẳng phức ta được:

- (a) Nửa đường thẳng. (c) Đường tròn bán kính bằng e .
 (b) Đường thẳng. (d) Đường tròn bán kính bằng e^2 .

Câu 17 : Cho số phức z có module bằng 5. Tìm module của số phức $w = \frac{z \cdot i^{2006}}{\bar{z}}$.

- (a) 1. (b) 10030. (c) 2010. (d) 5.

Câu 18 : Tính $z = \frac{2+3i}{1+i}$

- (a) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$. (b) $\frac{5}{2} + \frac{5i}{2}$. (c) $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$. (d) $\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$.

Câu 19 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{-1+i}$

- (a) $\varphi = \frac{-\pi}{12}$. (b) $\varphi = \frac{-\pi}{3}$. (c) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 20 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

- (a) $\varphi = \frac{\pi}{12}$. (b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. (d) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$.

Câu 21 : Tập hợp tất cả các số phức $|z+2-i| + |z-3+2i| = 1$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Ellipse. (b) Các câu kia sai. (c) Đường thẳng. (d) Đường tròn.

Câu 22 : Tìm argument φ của số phức $z = (1+i\sqrt{3})(1-i)$

- (a) $\varphi = \frac{\pi}{12}$. (b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (c) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Câu 23 : Tập hợp tất cả các số phức $e^{2(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$; $0 \leq \varphi \leq \pi$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Đường tròn. (b) Đường thẳng. (c) Nửa đường tròn. (d) 3 câu kia đều sai.

Câu 24 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{2+i\sqrt{12}}{1+i}$

- (a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. (b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (c) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 25 : Giải phương trình trong trường số phức $(1+2i)z = 3+i$

- (a) $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. (b) $-1+i$. (c) $z = 1-i$. (d) $z = 1+i$.

ĐA: 1b2b3c4a5b6c7a8d9b10c11d12a13b14d15b16a17a18d19c20a21b22a23c24d25c.

Trường Đại Học Bách Khoa TP HCM.

Biên soạn: TS Đặng Văn Vinh. Câu hỏi trắc nghiệm: Số phức phần 2.

Câu 1 : Tính $z = \frac{1 + i^{2007}}{2 + i}$

- (a) $\frac{2}{5} + \frac{-i}{5}$. (b) $\frac{-2}{5} + \frac{i}{5}$. (c) $\frac{1}{5} - \frac{i}{5}$. (d) $\frac{1}{5} - \frac{3i}{5}$.

Câu 2 : Tập hợp tất cả các số phức $|z - 5| = |z + 5|$ trong mặt phẳng phức là

- (a) đường $y = x$. (b) Trục Oy . (c) Các câu kia sai. (d) Trục Ox .

Câu 3 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{(1 + i)^{15}}$

- (a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (b) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (c) $\varphi = \frac{11\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 4 : Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để $(-1 + i\sqrt{3})^n$

- (a) $n = 1$. (b) không tồn tại n . (c) $n = 3$. (d) $n = 6$.

Câu 5 : Tìm $\sqrt{i}$ trong trường số phức.

- (a) $z_1 = e^{\frac{-i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$. (c) $z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
(b) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$. (d) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

Câu 6 : Giải phương trình $(2 + i)z = 1 - 3i$ trong $\mathbb{C}$

- (a) $z = \frac{-1}{5} - \frac{7i}{5}$. (b) $z = \frac{-1}{5} + \frac{7i}{5}$. (c) $z = \frac{1}{5} - \frac{7i}{5}$. (d) $z = \frac{1}{5} + \frac{7i}{5}$.

Câu 7 : Giải phương trình $(2 + i)z = (1 - i)^2$ trong $\mathbb{C}$

- (a) $z = \frac{1}{5} - \frac{7i}{5}$. (b) $z = \frac{1}{5} + \frac{7i}{5}$. (c) $z = \frac{-2}{5} - \frac{4i}{5}$. (d) $z = \frac{-2}{5} + \frac{4i}{5}$.

Câu 8 : Tính $z = \frac{1 + 3i}{2 - i}$

- (a) $\frac{-1}{5} + \frac{7i}{5}$. (b) $1 + i$. (c) $\frac{1}{5} - \frac{7i}{5}$. (d) $1 - i$.

Câu 9 : Cho $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{4-3i}$. Tìm module của z .

- (a) $\frac{16}{5}$. (b) $\frac{32}{5}$. (c) $\frac{32}{25}$. (d) 3 câu kia đều sai.

Câu 10 : Tìm $\sqrt{-9}$ trong trường số phức.

- (a) $z_1 = -3; z_2 = 3i$. (b) $z_1 = 3i$. (c) Các câu kia sai. (d) $z_1 = 3i; z_2 = -3i$.

Câu 11 : Tập hợp tất cả các số phức $|z + 4i| = |z - 4|$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Trục Oy . (c) Đường thẳng $x + y = 0$.
(b) Đường thẳng $y = 4x$. (d) Đường tròn.

Câu 12 : Tính $z = \frac{2 + 3i}{3 - i}$

- (a) $\frac{3}{5} - \frac{i}{2}$. (b) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$. (c) $\frac{1}{10} + \frac{5i}{2}$. (d) $\frac{3}{10} + \frac{11i}{10}$.

Câu 13 : Tập hợp tất cả các số phức $e^{i\varphi}(\cos \varphi + i \sin \varphi); \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ trong mặt phẳng phức là

- (a) Nửa đường tròn. (b) Nửa đường thẳng. (c) Đường tròn. (d) Đường thẳng.

Câu 14 : Tìm argument φ của số phức $z = (\sqrt{3} + i)(1 - i)$

- (a) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (b) $\varphi = \frac{-\pi}{12}$. (c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$. (d) $\varphi = \frac{5\pi}{12}$.

Câu 15 : Tập hợp tất cả các số phức z , thỏa $|z + 2i| + |z - 2i| = 9$, trong mặt phẳng phức là

- (a) đường tròn. (b) Các câu kia sai. (c) nửa mặt phẳng. (d) elipse.

Câu 16 : Tập hợp tất cả các số phức z , thỏa $|\arg(z)| \leq \pi/2$, trong mặt phẳng phức là

- (a) Các câu kia sai. (b) nửa mặt phẳng. (c) đường tròn. (d) Đường thẳng.

Câu 17 : Tính $z = \frac{1+i^{20}}{3+i}$

- (a) $\frac{-3}{5} + \frac{i}{5}$. (b) $\frac{2}{5} + \frac{-i}{5}$. (c) $\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$. (d) $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$.

Câu 18 : Tìm $\sqrt{-i}$ trong trường số phức.

- (a) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$. (c) $z_1 = e^{\frac{-i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
(b) Các câu kia sai. (d) $z_1 = e^{\frac{-i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$.

Câu 19 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}$

- (a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (b) $\varphi = \frac{-5\pi}{12}$. (c) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$. (d) $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 20 : Tập hợp tất cả các số phức z , thỏa $|\arg(z)| = \frac{\pi}{3}$, trong mặt phẳng phức là

- (a) nửa mặt phẳng. (b) đường tròn. (c) Các câu kia sai. (d) nửa đường thẳng.

Câu 21 : Tìm argument φ của số phức $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{(1-i)^{2010}}$

- (a) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. (b) $\varphi = \frac{7\pi}{6}$. (c) $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (d) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 22 : Nghiệm của phương trình $z^3 = 1$ là:

- (a) Các câu kia sai.
(b) $z = 1; z = \pm \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(c) $z = 1; z = \pm \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(d) $z = 1; z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Câu 23 : Tìm tất cả các số phức z thỏa $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + 1 = 0$.

- (a) $z = \pm i$. (b) Các câu kia sai. (c) $z = i$. (d) $z = \pm 2i$.

Câu 24 : Tìm argument của số phức $z = (\sqrt{3} + i)^{10}(1 - i)^7$

- (a) $\frac{\pi}{12}$. (b) $\frac{8\pi}{12}$. (c) $\frac{-\pi}{12}$. (d) Các câu kia sai.

Câu 25 : Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tính z^5 .

- (a) $41 - 38i$. (b) $41 + 38i$. (c) $22 + 35i$. (d) $-41 - 38i$.

Câu 26 : Tính môđun của số phức $z = \frac{3+4i}{i^{2009}}$

- (a) 5. (b) $\frac{5}{2}$. (c) Các câu kia sai. (d) 25.

ĐA: 1d2b3c4b5b6a7c8a9b10d11c12d13a14b15d16b17c18c19b20c21a22d23a24c25a26a.

Bài tập tự luận

Câu 1) Rút gọn biểu thức

$$(a) (2-i)^5 \quad (b) \frac{(2-3i)^5}{i^5(1+i)} \quad (c) \frac{(2+2i)^9}{(i\sqrt{3}-1)^7} \quad (d) \frac{(i\sqrt{12}-2)^{14}}{(1-i)^{19}}$$

Câu 2) Tính

$$(a) \sqrt{45+28i} \quad (d) \sqrt[6]{\frac{-16i}{(i-\sqrt{3})^2}} \\ (b) \sqrt{4-9i} \\ (c) \sqrt[6]{64} \quad (e) \sqrt[6]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$$

Câu 3) Giải phương trình:

$$(a) z^2 - 2z + 5 = 0 \quad (b) z^2 + z + 1 - i = 0 \quad (c) z^4 + z^2 + 4 - 28i = 0$$

Câu 4) Tính $^{10}\sqrt{z}$ biết $(\sqrt{3}+2i)z + \frac{2+6i}{1+i} = 3iz + (3+i)(2-i)$ Câu 5) Giải phương trình $z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 16z + 52 = 0$ biết phương trình có một nghiệm $z_1 = 2 + 3i$

Câu 6) Đưa về dạng lượng giác

$$(a) z = \sin \varphi + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (b) w = \cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$$

Câu 7) Tìm tập các số phức z trong mặt phẳng phức thỏa

$$(a) \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \quad (f) |z-3| - |z-4i| = 1 \\ (b) \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \quad (g) |z-3i| = \operatorname{Re}(z-1-2i) \\ (c) z = e^{2+ai}, a \in [0, \pi] \quad (h) \frac{|z-i|}{|z|} = 2 \\ (d) z = e^{a+3i}, a \in \mathbb{R} \quad (i) \arg\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{3} \\ (e) |z-2| + |z+3i| = 4$$

Câu 8) Tính

$$(a) A = C_{2014}^0 - C_{2014}^2 + C_{2014}^4 - \dots + C_{2014}^{2014} \\ (b) B = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha, n \in \mathbb{N}_*$$