

Chương VI. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

§1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Các đại lượng mà ta gặp trong thực tế thường là các đại lượng biến thiên, nghĩa là chúng nhận các giá trị thay đổi trong quá trình khảo sát. Có thể xảy ra trường hợp một đại lượng tuy biến thiên nhưng giá trị của nó lại phụ thuộc vào một đại lượng biến thiên khác. Thí dụ một chiếc xe ô tô chạy trên đường với vận tốc không đổi. Quãng đường xe chạy được (đại lượng biến thiên s) phụ thuộc vào thời gian chạy xe (đại lượng biến thiên t). Nếu tốc độ của xe là v thì quãng đường s được xác định theo thời gian t bởi công thức $s = vt$. Nếu biết t thì ta xác định được giá trị của s một cách duy nhất.

Quan hệ phụ thuộc giữa s và t như trên được gọi là quan hệ phụ thuộc hàm số.

1.1. Định nghĩa hàm số một biến số

Cho tập hợp số thực R . Một ánh xạ f từ R vào R được gọi là một hàm số thực của một biến số thực, hay một hàm số của một biến số. Nói cách khác, với mỗi một biến số thực x ta cho tương ứng với một số thực duy nhất theo một quy tắc f nào đó thì ta nói là ta đã xác định một hàm số f .

Phần tử x được gọi là biến số độc lập. Phần tử y tương ứng với x được gọi là giá trị của hàm số tại x , ta thường ký hiệu là $f(x)$ và viết $y = f(x)$.

Tập hợp tất cả các số thực x mà ta có thể xác định được y theo quy tắc f đã cho được gọi là miền xác định của hàm số f .

Nếu tập hợp $A \subset R$ là miền xác định của hàm số thì tập hợp tất cả các số thực y sao cho $y = f(x), \forall x \in A$ được gọi là miền giá trị của hàm số (đó chính là tập ảnh của f). Hay $\{f(x) : x \in A\}$ là miền giá trị của hàm số.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ thì miền xác định A của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Miền giá trị của hàm số là tập hợp mọi số thực y sao cho $0 \leq y \leq 3$.

1.2. Đồ thị của hàm số

Để có một hình ảnh hình học về một hàm số, người ta tìm cách biểu diễn nó trên mặt phẳng tọa độ, tức là một mặt phẳng trên đó có xác định hệ trục tọa độ Ox, Oy (thường là vuông góc).

Với mỗi một x thuộc miền xác định A của hàm số ta cho tương ứng với một điểm có tọa độ (x, y) , với $y = f(x)$, thuộc mặt phẳng Oxy .

Tập hợp tất cả các điểm (x, y) với mọi $x \in A$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

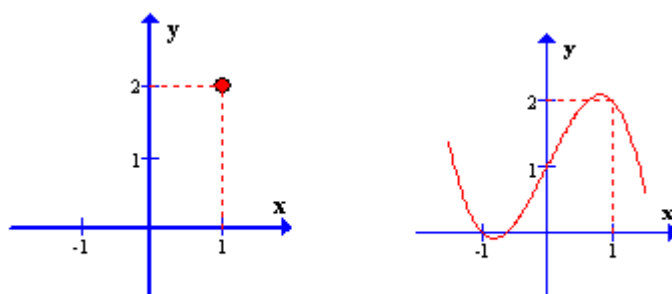
Ví dụ: trong biểu diễn đồ thị của hàm số $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ trong hai trường hợp:

a) $A = \{-1, 0, 1\}$

b) $A = \mathbb{R}$ (A là tập hợp các số thực)

Trong trường hợp thứ nhất miền giá trị của hàm cũng chỉ gồm 3 điểm: $y_1 = f(-1) = 0; y_2 = f(0) = 1; y_3 = f(1) = 2$. Do đó đồ thị của hàm số f chỉ có 3 điểm.

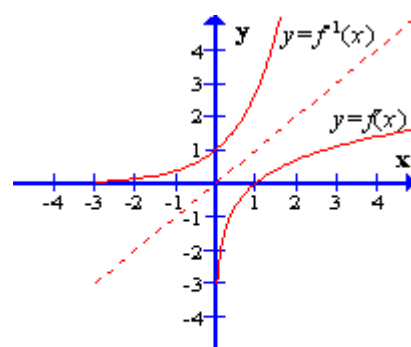
Trong trường hợp thứ hai, miền giá trị của hàm là $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số là một đường cong liên tục (đó là đường parabol bậc 3 – hình 1).



Hình 1

1.3. Hàm số ngược và đồ thị hàm số ngược

Xét hàm số $f: A \rightarrow B$, tức là với mỗi $x \in A$ tương ứng với một y duy nhất thuộc B . Nếu f là song ánh, tức là với mỗi $y \in B$ có tương ứng duy nhất một $x \in A$, thì f sẽ có một ánh xạ ngược là $f^{-1}: B \rightarrow A$. Khi đó ta nói f^{-1} là hàm số ngược của hàm f . Vậy $f: A \rightarrow B \Leftrightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$



Hình 2

Khi đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy , nếu điểm M có tọa độ (x, y) với $y = f(x)$ thuộc đồ thị hàm thuận f thì điểm M' có tọa độ (y, x) sẽ thuộc đồ thị hàm số ngược f^{-1} . Nếu các đơn vị chọn trên các trục là như nhau thì các điểm M và M' sẽ đối xứng với nhau qua đường phân giác $y = x$.

Đồ thị của hàm f và hàm ngược f^{-1} là đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Chú ý: khi viết hàm ngược của hàm $y = f(x)$ dưới dạng $x = f^{-1}(y)$ thì y là biến số độc lập. Để thuận tiện cho việc trình bày trên cùng một hệ trục tọa độ ta luôn coi biến x là biến độc lập (ứng với trục hoành) còn biến y là biến phụ thuộc (ứng với trục tung). Khi đó ta sẽ ký hiệu hàm ngược của hàm $y = f(x)$ là hàm $y = f^{-1}(x)$.

Ví dụ: Hàm $y = 2x + 1$ có hàm ngược là $x = (y - 1) / 2$, nhưng ta ký hiệu lại là $y = (x - 1) / 2$. Ta viết:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$

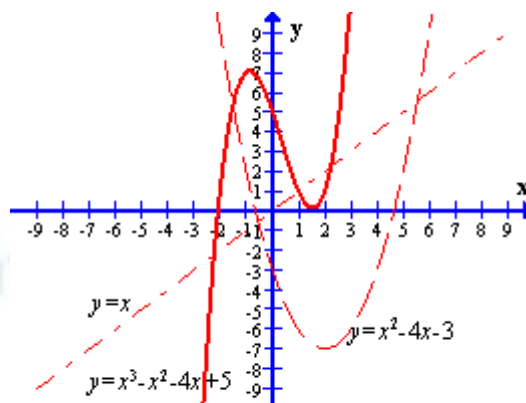
$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

1.4. Các hàm sơ cấp

1.4.1. Hàm đa thức

Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, với n là một số nguyên dương, $a_0, \dots, a_n$ là các hằng số thực, được gọi là một hàm đa thức. Hàm đa thức xác định với mọi số thực x và lấy giá trị thực.

Sau đây là dạng đồ thị của một số hàm đa thức:



Hình 3

1.4.2. Hàm phân thức hữu tỷ

Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x), Q(x) \text{ là các hàm đa thức, được gọi là hàm phân thức hữu tỷ.}$$

Nếu N_0 là tập các không điểm của $Q(x)$, tức là $N_0 = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ thì hàm phân thức hữu tỷ $f(x)$ có miền xác định là tập hợp $\mathbb{R} \setminus N_0$.

Trong chương trình trung học ta đã xét đồ thị của các hàm phân thức hữu tỷ:

$$y = \frac{a}{x}; \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

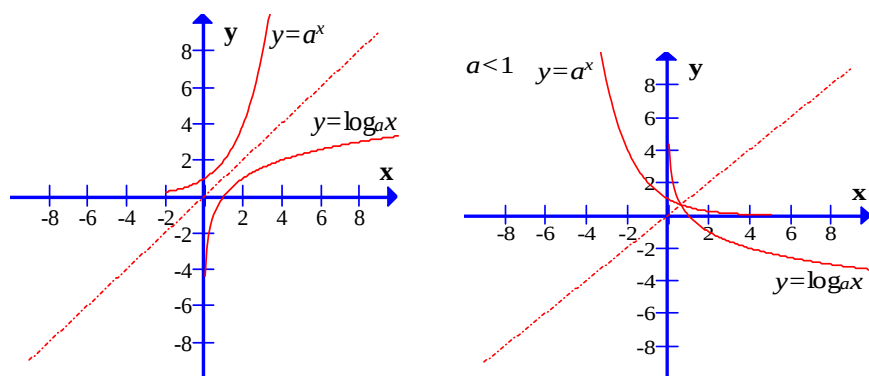
1.4.3. Hàm số mũ

Hàm số mũ cơ số a với $a > 0, a \neq 1$ là hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = a^x$. Hàm số mũ xác định với mọi số thực x và chỉ lấy giá trị riêng.

Nếu cơ số $a > 1$ thì hàm mũ tăng, nghĩa là: với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Nếu cơ số $a < 1$ thì hàm mũ giảm, nghĩa là: với $x_1 < x_2$ ta có $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Nếu cơ số $a = e$ (e là cơ số vô tỷ và có giá trị gần đúng là 2,71828) thì hàm mũ cơ số e được gọi là hàm exponent, ký hiệu là $\exp(x)$. Vậy $\exp(x) = e^x$.



Hình 4. Đồ thị hàm mũ $y = a^x$ và hàm $y = \log_a x$

Trong việc nghiên cứu sự phát triển của một quần thể sinh vật khi thời gian tăng theo cấp số cộng mà số lượng quần thể tăng theo cấp số nhân, tức là ở thời điểm ban đầu (lúc $t = 0$) số lượng quần thể là m_0 , lúc $t = 1$ số lượng quần thể là $m_0 q$ (q là một hằng số nào đó, công bội của cấp số nhân), lúc $t = 2$ thì số lượng là $m_0 q^2, \dots$, ở lúc t thì số lượng quần thể là $m_0 q^t$. Đặt $q = e^\alpha$, α là một hằng số nào đó thì số lượng quần thể m ở thời điểm t sẽ được xác định nhờ hàm mũ: $m(t) = m_0 e^{\alpha t} = m_0 \exp(\alpha t)$

Một hiện tượng phát triển như trên được gọi là phát triển theo luật mũ. Ta thường gặp hiện tượng đó khi xét các quần thể độc lập và những điều kiện hết sức rộng rãi (không bị hạn chế bởi nguồn thức ăn, về địa lý cư trú, ...).

1.4.4. Hàm logarit

Nhìn trên đồ thị hàm mũ ta thấy: với mỗi số thực x có tương ứng với một số thực dương y duy nhất và ngược lại với mỗi số thực y có tương ứng với một số thực x duy nhất. Điều đó có nghĩa là hàm mũ là song ánh, do đó nó có hàm ngược.

Ta gọi *hàm ngược của hàm mũ* là *hàm logarit cơ số a* , ký hiệu là $\log_a x$, hàm này xác định trên tập các số thực dương và lấy mọi giá trị thực.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$$

Như vậy các biểu thức sau là tương đương:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$$

Logarit cơ số 10 được gọi là *logarit thập phân*, ký hiệu là $\lg x = \log_{10} x$.

Logarit với cơ số e được gọi là *logarit nêpe* hay *logarit tự nhiên*, nó được ký hiệu là:

$$\ln x = \log_e x$$

Dùng các tính chất của logarit ta có công thức đổi cơ số trong logarit

$$\text{sau: } \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Chẳng hạn muốn chuyển từ logarit thập phân sang logarit nêpe ta dùng công thức:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}, \quad \text{vì } \lg e \approx 0,4343 \text{ hay } \frac{1}{\lg e} \approx 2,3026$$

Ta đã biết logarit có rất nhiều ứng dụng. Trong việc tính toán, khi ta chuyển các số sang logarit của chúng thì phép tính nhân được thay thế bằng phép tính cộng, phép tính chia được thay bằng phép tính trừ, nhờ vậy rút ngắn được thời gian tính toán.

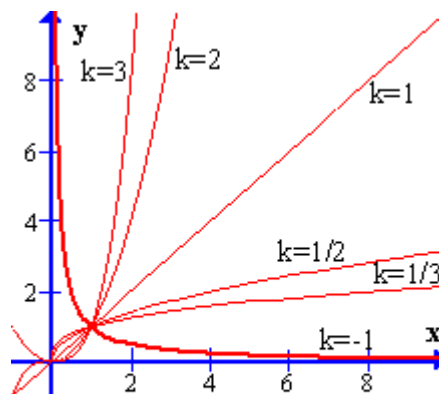
Khi vẽ đồ thị hàm số người ta thường dùng giấy kẻ ô vuông. Giấy kẻ ô bán logarit là loại giấy kẻ ô mà trên đó thang dùng trên trục Ox (trục hoành) là thang đơn vị độ dài thông thường, còn thang trục tung Oy được ghi theo logarit của đơn vị độ dài, chẳng hạn ở chỗ ghi số 2 ta phải hiểu đó là $\lg 2$. Khi biểu diễn đồ thị hàm mũ $y = e^{\alpha x}$ ta biến đổi nó thành $\lg y = (\alpha \lg e)x$ và dùng giấy kẻ ô bán logarit thì ta sẽ được đồ thị là một đường thẳng. Như vậy để kiểm tra xem giữa hai đại lượng biến thiên x và y có sự phụ thuộc theo quy luật mũ không ta biểu diễn các điểm $(x, \lg y)$ trên giấy kẻ ô bán logarit, nếu các điểm nhận được xấp xỉ thẳng hàng thì ta có thể chấp nhận quy luật mũ giữa x và y .

1.4.5. Hàm lũy thừa

Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = x^\alpha$, α là hằng số thực, được gọi là *hàm lũy thừa* tùy thuộc vào số thực α .

Với $\alpha = n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^n$ là hàm lũy thừa nguyên và xác định trên $\mathbb{R}$.

Với $\alpha = -n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{-n}$ là hàm lũy thừa thập phân và nó xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Hình 5: Hàm lũy thừa

Với $\alpha = 1/n$, n là số nguyên dương, thì hàm $y = x^{1/n}$ là hàm căn thức, nó xác định trên $\mathbb{R}^+$ nếu n chẵn và trên tập $\mathbb{R}$ nếu n lẻ.

Chú ý: Khi nghiên cứu sự phụ thuộc giữa hai đại lượng biến thiên x và y , nếu giữa chúng có hệ thức $y = bx^k$ thì bằng phép biến đổi logarit ta được: $\lg y = \lg b + k \lg x$.

Nếu đặt $Y = \lg y, X = \lg x, B = \lg b$ thì ta có: $Y = kX + B$ đây lại là một đường thẳng trong hệ tọa độ nếu cả hai trục có thang logarit.

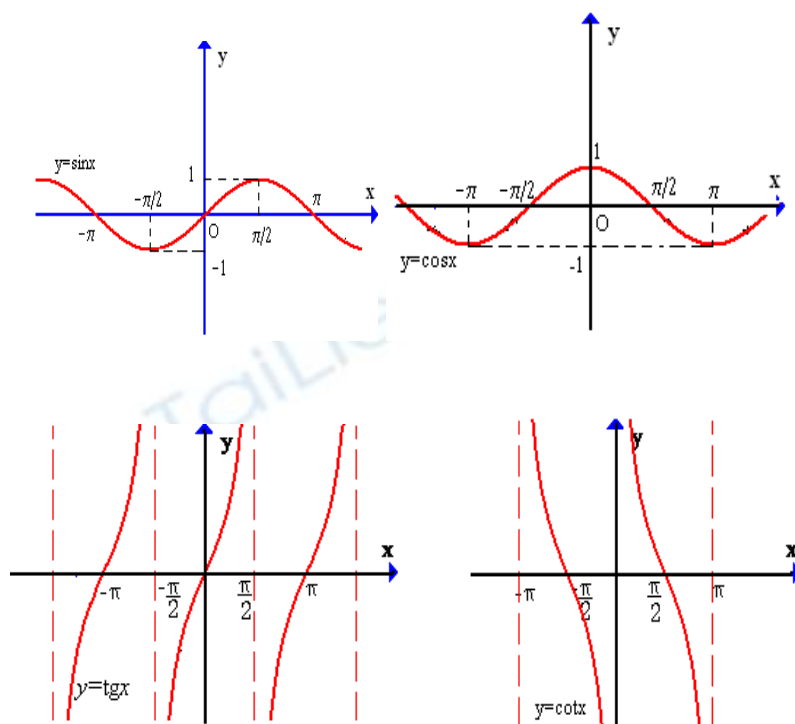
1.4.6. Các hàm lượng giác

Trong chương trình trung học ta đã định nghĩa các hàm lượng giác. Các hàm $y = \sin x, y = \cos x$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và lấy giá trị trong $[-1, 1]$. Hàm

$y = \operatorname{tg} x$ xác định với mọi giá trị $x \neq (2k+1)\pi/2$. Hàm $y = \operatorname{cotg} x$ xác định với mọi giá trị $x \neq k\pi$, chúng lấy các giá trị thực.

Các hàm $y = \sin x, y = \cos x$ là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π , nghĩa là: $\sin(2k\pi + x) = \sin x, \cos(2k\pi + x) = \cos x, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x$. Các hàm $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π .

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$$



Hình 6. Đồ thị các hàm số lượng giác.

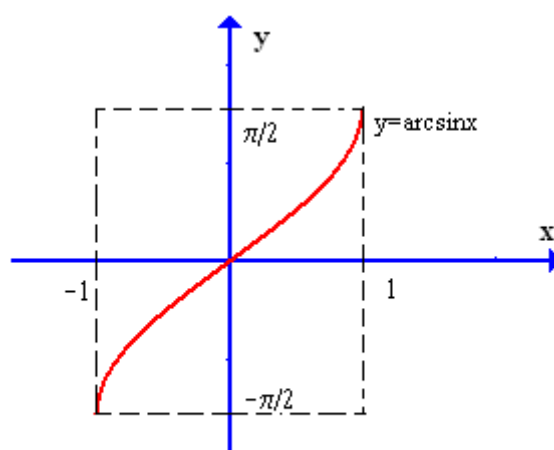
1.4.7. Các hàm lượng giác ngược

Hàm $y = \sin x$ xét trên $\mathbb{R}$ không là đơn ánh (do nó tuần hoàn), do đó nó không là song ánh. Tuy nhiên, nếu ta hạn chế miền xác định của nó trên khoảng $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì nó là song ánh, nó có hàm ngược là f^{-1} , ta gọi hàm ngược của nó là hàm $\arcsin$.

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f^{-1}(x) = \arcsin x$$

như vậy ta có:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y; -1 \leq x \leq 1; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



Hình 7

Tương tự, hàm $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ là song ánh, hàm ngược của nó là:

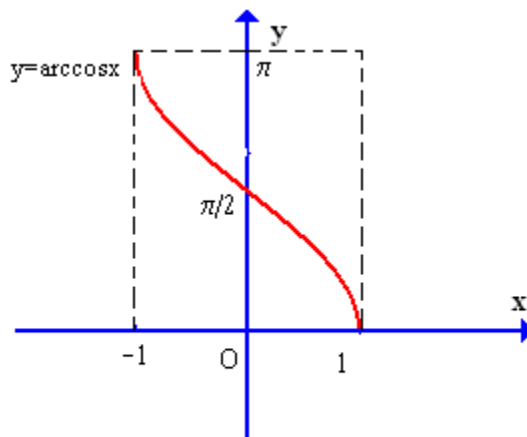
$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], f^{-1}(x) = \arccos x$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y; -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \pi$$

Hàm $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ cũng là song

ánh, nó có hàm ngược là:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f^{-1}(x) = \arctg x$$



Hình 8

Hàm song ánh

$$f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cotg x \text{ có ánh xạ}$$

ngược là:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$$

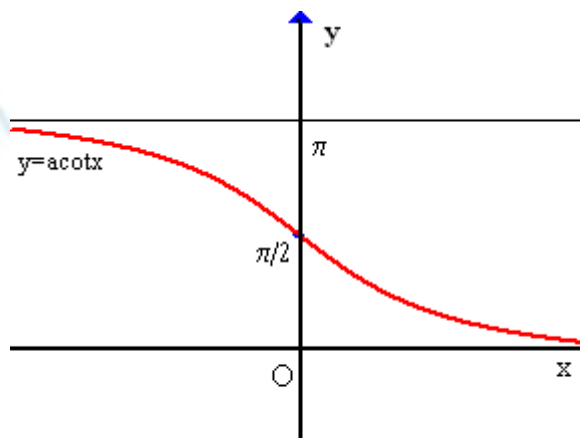
Vậy ta có:

$$y = \arctg x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \cotg y$$

$$-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi$$



Hình 10

Các hàm số lũy thừa, hàm mũ, hàm logarit, các hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng được gọi là các *hàm sơ cấp cơ bản*. Hàm số được tạo từ các hàm số sơ cấp cơ bản nhờ các phép tính đại số và phép hợp hàm được gọi là *hàm số sơ cấp*.

Ví dụ: các hàm đa thức, các hàm hữu tỷ là các hàm sơ cấp;

$$A \sin(\alpha x + \beta), e^{ax} \sin x, e^{x^2-x} \cos(ax + b), \dots \text{ cũng là các hàm sơ cấp.}$$

1.5. Hàm cho bằng tham số

Khi nghiên cứu sự phụ thuộc hàm số giữa hai đại lượng x và y ta cũng hay gặp trường hợp cả x và y đều phụ thuộc vào một biến thứ ba t .

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (*)$$

Khi đó với mỗi t ta xác định được một điểm (x, y) thuộc mặt phẳng, khi t thay đổi (trong miền xác định của các hàm φ, ψ) thì điểm (x, y) vạch nên một đường L nào đó. Cặp phương trình $(*)$ được gọi là phương trình tham số của đường L .

Ví dụ: Cặp phương trình $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ biểu diễn đường elip, vì khi khử tham số t ta được:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Bây giờ ta xét xem cặp phương trình (*) khi nào biểu diễn hàm $y = f(x)$.

Giả sử các hàm φ, ψ xác định trong miền G . Khi đó miền xác định của hàm $f(x)$ là tập hợp mọi giá trị của hàm $x = \varphi(t), t \in G \Rightarrow D = \varphi(G)$. Nếu hàm y là song ánh thì với mỗi $x \in D$ ta tìm được duy nhất một $t \in G, t = \varphi^{-1}(x)$, và với t đó ta xác định được một y duy nhất theo hàm $y = \psi(t)$.

Như vậy, nếu hàm φ, ψ xác định trong miền G và φ là song ánh trên G thì: $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in G$ biểu diễn một hàm số. Ta gọi hàm số đó cho bằng tham số.

Phương trình đường elip nói trên $x = a \cos t, y = b \sin t$ biểu diễn hai hàm:

Với $0 \leq t \leq \pi$, hàm $x = a \cos t$ là một song ánh. Ta có hàm: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Với $\pi \leq t \leq 2\pi$ ta có hàm $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

§2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

2.1. Định nghĩa dãy số

Một hàm $f : N \rightarrow R$ xác định trong tập hợp các số tự nhiên N được gọi là một dãy số.

Ta đặt $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$. u_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy số. Ta ký hiệu dãy số là $\{u_n\}$. Có thể xác định dãy số bằng cách:

a) Cho công thức tổng quát: $u_n = f(n)$

Ví dụ: Cho dãy số $u_n = a \cdot q^{n-1}$, với a và q là các hằng số. Đó chính là một dãy số nhân $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$

b) Cho công thức truy chứng, chẳng hạn: $u_1 = a, u_n = f(u_{n-1})$

Ví dụ. 1, Cho dãy số $u_1 = \sqrt{2}, u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$. Đó là dãy $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

2, Cho dãy số Fibonasi $u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Đó là dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

2.2. Giới hạn của dãy số

Ví dụ mở đầu: Xét số thực $a = 1/3$. Ta có thể biểu diễn gần đúng thiếu số a bằng dãy số: $u_1 = 0,3; u_2 = 0,33; \dots; u_n = 0,3\dots 3$ (n số 3), hoặc biểu diễn gần đúng thừa bằng dãy số $v_1 = 0,4; v_2 = 0,34; \dots; v_n = 0,3\dots 34$ ($n-1$ số 3).

Ta nhận xét rằng hiệu $u_n - a$ hoặc $v_n - a$ về trị tuyệt đối không vượt quá 10^{-n} . Bằng cách tăng n ta có thể làm cho hiệu đó nhỏ đi bao nhiêu cũng được. Điều đó có nghĩa là nếu ε là một số dương cho trước, bé tùy ý, thì ta có thể tìm được số nguyên N sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$.

Định nghĩa: dãy số $\{u_n\}$ được gọi là có giới hạn là a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có thể tìm được một số $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta luôn có: $|u_n - a| < \varepsilon$

Ta ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$

Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a thì ta cũng nói dãy $\{u_n\}$ **hội tụ** tới a .

Ví dụ: xét dãy số cho bởi $u_n = \frac{n+1}{n}$

Ta thấy rằng dãy số đó hội tụ tới 1 vì $|u_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$.

Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, muốn có $|u_n - 1| < \varepsilon$ thì chỉ việc lấy $n > \frac{1}{\varepsilon}$ là được.

Như vậy ta chọn N là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{\varepsilon}$. Chẳng hạn

nếu cho $\varepsilon = 0,003$ thì $\frac{1}{\varepsilon} = 333,3$. Ta chỉ việc lấy $N = 333$ thì với mọi $n > 333$ (tức là kể từ số hạng thứ 334 trở đi) ta có $|u_n - 1| < 0,003$.

2.3. Các phép tính về dãy hội tụ

Định lý: nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a , dãy $\{v_n\}$ hội tụ tới b thì

- 1) Dãy tổng $\{u_n + v_n\}$ hội tụ tới $a + b$
- 2) Dãy tích $\{u_n \cdot v_n\}$ hội tụ tới $a \cdot b$
- 3) Dãy nghịch đảo $\{1/v_n\}$ hội tụ tới $1/b$ với điều kiện $b \neq 0$
- 4) Dãy thương $\{u_n / v_n\}$ hội tụ tới a / b với điều kiện $b \neq 0$

Ta sẽ chứng minh cho tính chất (1), các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.

Vì $u_n \rightarrow a$ nên theo định nghĩa của giới hạn, cho trước số $\varepsilon / 2$ ta tìm được số N_1 sao cho với mọi $n > N_1$ ta có $|u_n - a| < \varepsilon / 2$. Vì $v_n \rightarrow b$ nên với số $\varepsilon / 2$ nói trên ta tìm được số N_2 sao cho với mọi $n > N_2$ ta có $|v_n - b| < \varepsilon / 2$.

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì với mọi $n > N$ ta có:

$$|u_n - a| < \varepsilon / 2 \text{ và } |v_n - a| < \varepsilon / 2$$

Khi đó với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước ta đã tìm được số N sao cho với mọi $n > N$ ta có:

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (a + b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b| \\ &\leq \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ $(u_n + v_n) \rightarrow (a + b)$.

2.4. Hai tiêu chuẩn đủ để dãy hội tụ

Không phải dãy số nào cũng hội tụ, chẳng hạn dãy $u_n = (-1)^n$ mà các giá trị của nó lần lượt là -1 và 1 không tiến tới một giới hạn nào cả.

Dưới đây ta sẽ phát biểu hai tiêu chuẩn mà nhờ đó ta có thể biết được một dãy đã cho là hội tụ.

Tiêu chuẩn 1: Cho ba dãy $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ sao cho $v_n \leq u_n \leq w_n$ (1)

Khi đó nếu các dãy $\{v_n\}$ và $\{w_n\}$ cùng hội tụ tới a thì dãy $\{u_n\}$ cũng hội tụ tới a .

Chứng minh:

Do $v_n \rightarrow a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được N_1 để $\forall n > N_1$ ta có $v_n - a < \varepsilon$ (2)

Do $w_n \rightarrow a$ nên với $\varepsilon > 0$ ta tìm được N_2 để $\forall n > N_2$ ta có $w_n - a < \varepsilon$ (3)

Gọi $N = \max(N_1, N_2)$ thì khi $n > N$ các bất đẳng thức (2) và (3) cùng xảy ra. Kết hợp với (1) ta có: $-\varepsilon < v_n - a \leq u_n - a \leq w_n - a < \varepsilon$

Như vậy, với $\varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được số N sao cho với mọi $n > N$ ta có: $|u_n - a| < \varepsilon$

Điều đó chứng tỏ dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a . ■

Trước khi phát biểu tiêu chuẩn thứ hai, ta xét thêm một vài khái niệm:

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **đơn điệu tăng** nếu $\forall n, m, n > m \Rightarrow u_n > u_m$.

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **đơn điệu giảm** nếu $\forall n, m, n > m \Rightarrow u_n < u_m$.

Ví dụ: dãy cho bởi $u_n = \frac{n}{n+1}$ là dãy tăng, dãy cho bởi $v_n = \frac{1}{n}$ là dãy giảm.

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn trên** nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không vượt quá một hằng số A nào đó.

Dãy $\{u_n\}$ được gọi là **bị chặn dưới** nếu mọi số hạng trong dãy, kể từ một số hạng nào đó trở đi, không nhỏ hơn một hằng số B nào đó.

Tiêu chuẩn 2: mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Ta không chứng minh tiêu chuẩn này.

Ví dụ: Xét dãy số cho bởi $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên.

Thật vậy, ta khai triển u_n theo nhị thức Newton:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Thay n bởi $n+1$ thì:

$$u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Do: $1 - \frac{1}{k} < 1 - \frac{1}{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \dots$ ta suy ra $u_n < u_{n+1}$, tức là dãy $\{u_n\}$ tăng.

Mặt khác: $1 - \frac{1}{k} < 1, \forall k$ nên $u_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Hơn nữa: $\frac{1}{k!} = \frac{1}{2.3\dots k} < \frac{1}{2.2\dots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}, \forall k = 2, 3, \dots$

Do đó: $u_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

Tổng $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ vì là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Vậy $u_n < 3$.

Tóm lại dãy $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 3 nên theo tiêu chuẩn 2 thì nó hội tụ.

Định nghĩa: Giới hạn của dãy $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ được gọi là số e và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Người ta chứng minh được rằng số e là số vô tỷ. Giá trị gần đúng của nó với 5 chữ số thập phân là 2,71828. Số e được dùng làm cơ số cho một hệ logarit (logarit nêpe). Rất nhiều công thức toán học cũng như kỹ thuật được biểu diễn nhờ số e .

2.5. Giới hạn vô cùng của dãy

Khi xét dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a , a là hữu hạn ($-\infty < a < +\infty$). Có những dãy mà kể từ một số hạng nào đó trở đi, mọi số hạng trong dãy đều lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số bất kỳ cho trước có trị tuyệt đối lớn tùy ý. Khi đó ta nói là dãy có giới hạn vô cùng.

Định nghĩa:

Dãy $\{u_n\}$ có giới hạn $+\infty$ nếu với mọi số $M > 0$ cho trước, ta có thể tìm được số $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta có $u_n > M$. Ta viết $u_n \rightarrow +\infty$

Dãy $\{u_n\}$ có giới hạn $-\infty$ nếu với mọi số $M > 0$ cho trước, ta có thể tìm được số $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ ta có $u_n < -M$. Ta viết $u_n \rightarrow -\infty$

Ví dụ: dãy số cho bởi $u_n = n^2$ có giới hạn là $+\infty$.

Ta chứng minh được rằng:

Nếu $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow +\infty; u_n \cdot v_n \rightarrow +\infty$

Nếu $u_n \rightarrow -\infty, v_n \rightarrow -\infty \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow -\infty; u_n \cdot v_n \rightarrow +\infty$

Nếu $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow -\infty \Rightarrow u_n \cdot v_n \rightarrow -\infty$

Nếu $u_n \rightarrow a > 0, v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \cdot v_n \rightarrow +\infty$

Chú ý: Nếu $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (u_n - v_n), \frac{u_n}{v_n}$ được gọi là các dạng vô định. Nếu

$u_n \rightarrow 0, v_n \rightarrow \infty \Rightarrow u_n \cdot v_n$ cũng là dạng vô định.

Trong việc tính giới hạn, khi gặp các dạng vô định ta phải tìm cách khử chúng đi (xem §3).

§3. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

3.1. Định nghĩa giới hạn khi $x \rightarrow a$

Ví dụ: xét hàm số $f(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$

Hàm số không xác định tại $x = 1$. Tuy nhiên với các giá trị của x khá gần 1 ta thấy các giá trị của $f(x)$ tương ứng khác 4 rất ít và ta có thể tìm được những khoảng đủ nhỏ chứa 1 sao cho với mọi x thuộc khoảng đó thì hiệu $|f(x) - 4|$ nhỏ bao nhiêu cũng được. Khi đó ta nói hàm $f(x)$ có giới hạn là 4 khi x dần tới 1.

Định nghĩa: hàm $f(x)$ có giới hạn là h khi x dần tới a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ sao cho $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - h| < \varepsilon$ (tồn tại một số δ dương chỉ phụ thuộc vào ε mà với mọi x thuộc lân cận δ của điểm a thì $|f(x) - h| < \varepsilon$).

Ta ký hiệu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = h$

Trở lại ví dụ trên, ta chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = 4$

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ bất kỳ (chẳng hạn $\varepsilon = 0,001$) ta cần xác định số $\delta > 0$ sao

cho khi: $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| < \varepsilon$

Do $x \neq 1$ nên $\left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| = |2(x+1) - 4| = 2|x-1| < 2\delta$

nếu chọn $\delta = \varepsilon / 2$ thì ta có $\left| \frac{2(x^2-1)}{x-1} - 4 \right| < 2\delta = \varepsilon$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon / 2, \forall x: 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.

3.2. Các tính chất của giới hạn

Định lý 1: nếu hàm $f(x) \geq 0$ trong một lân cận của điểm a và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = h$ thì $h \geq 0$.

Thấy vậy, từ định nghĩa của giới hạn ta có: $|f(x) - h| < \varepsilon \Rightarrow h - \varepsilon < f(x) < h + \varepsilon$
nếu $h < 0$ thì ta có thể chọn ε sao cho $h + \varepsilon < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, trái giả thiết.

Định lý 2: nếu khi $x \rightarrow a, f(x)$ có giới hạn h và $g(x)$ có giới hạn là k thì $f(x) + g(x)$ có giới hạn $h + k$; $m.f(x)$ có giới hạn là $h.m$ (m là hằng số); $f(x).g(x)$ có giới hạn là $h.k$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn là $\frac{1}{m}$ ($m \neq 0$).

Cách chứng minh định lý này cũng giống như cách chứng minh giới hạn của dãy số.

Chú ý: Các định nghĩa giới hạn của hàm f khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$ cũng tương tự như định nghĩa giới hạn của dãy. Chẳng hạn, hàm $f(x)$ có giới hạn là h khi $x \rightarrow -\infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho $\forall x < -M, |f(x) - h| < \varepsilon$.

3.3. Lượng Vô cùng bé (VCB)

Nếu $f(x)$ có giới hạn bằng 0 khi $x \rightarrow a$ thì hàm $f(x)$ được gọi là lượng vô cùng bé ở lân cận của a .

Ví dụ: Khi $x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \rightarrow 0$ (do ta luôn có $|\sin x| < |x|$). Vậy $\sin x$ là đại lượng vô cùng bé (VCB) ở lân cận của 0.

So sánh các VCB: giả sử $f(x), g(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow a$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì ta nói rằng f là VCB cấp cao hơn g .

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ thì ta nói rằng f và g là VCB cùng cấp.

đặc biệt, nếu $k = 1$ thì f và g là hai VCB tương đương, ta ký hiệu $f \sim g$.

Ví dụ: Ở chương trình Trung học ta đã biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Như vậy trong lân cận của 0 thì ta có: $\sin x \sim x$

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0$$

Vậy: $1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

Vậy $1 - \cos x$ là VCB cùng cấp với x^2 , ta cũng nói $1 - \cos x$ là VCB cấp hai đối với x .

Chú ý: Tỷ số của hai VCB $\frac{f}{g}$ ($x \rightarrow a, \infty$) là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Định lý sau cho ta một phương pháp để khử dạng vô định.

Định lý: giả sử $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ là các VCB (khi $x \rightarrow a$ hoặc ∞). Khi đó nếu $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ thì: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

Chứng minh: Ta có thể viết $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{f_2}{g_2} \cdot \frac{g_2}{g_1}$

Do $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{f_2} = 1, \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_2}{g_1} = 1$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2}{g_2}$.

Ví dụ: 1) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

Khi $x \rightarrow 0$ thì $\sin 5x \sim 5x, \sin 3x \sim 3x$. Theo định lý trên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

2) Tìm $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

Khi $x \rightarrow \pi \Rightarrow \sin 5x \rightarrow 0$, $\sin 5x$ là một VCB. Tuy nhiên, ta không thể viết $\sin 5x \sim 5x$ vì $5x \rightarrow 5\pi$ không phải là một VCB. Để giải quyết vấn đề này ta làm như sau:

Đặt $t = \pi - x$. Khi $x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0, \sin 5x = \sin(5\pi - 5t) = \sin(\pi - 5t) = \sin 5t$ và $\sin 2x = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin 2t$. Khi đó nếu $t \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 5t \sim 5t$ và

$$\sin 2t \sim 2t. \text{ Vậy: } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{-\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t}{-2t} = -\frac{5}{2}$$

Một số VCB tương đương thường gặp:

Khi $x \rightarrow 0$ thì:

$$\sin x \sim x; \operatorname{tg} x \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x; e^x - 1 \sim x; \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

Ta chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Ở mục 2.4 ta đã định nghĩa: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Với số thực z bất kỳ bao giờ ta cũng tìm được số n sao cho: $n \leq z \leq n+1$

Từ đó:

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{z} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Vậy:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Khi $z \rightarrow +\infty \Rightarrow n \rightarrow +\infty$ và ta có: $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow e; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$

Còn: $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \rightarrow 1; \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$

Do đó theo tiêu chuẩn 1 của giới hạn (nhưng áp dụng đối với hàm) ta có:

$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$, với z là một số thực.

Đặt $x = 1/z$ khi $z \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0$. Vậy: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

Đặt $y = e^x - 1 \Rightarrow x = \ln(1+y)$, khi $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

3.4. Lượng Vô cùng lớn (VCL)

Hàm f có giới hạn $+\infty$ khi $x \rightarrow a$ nếu với mọi $M > 0$ ta tìm được số $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x-a| < \delta$ thì $f(x) > M$.

Hàm f có giới hạn $-\infty$ khi $x \rightarrow a$ nếu với mọi $M > 0$ ta tìm được số $\delta > 0$

sao cho khi $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) < -M$.

Bạn đọc hãy tự định nghĩa giới hạn vô cùng $(+\infty, -\infty)$ của hàm f khi $x \rightarrow +\infty$, hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Nếu hàm f có giới hạn là vô cùng thì nó được gọi là **lượng vô cùng lớn**.

Ta dễ dàng chứng minh được là: nếu $f(x)$ là VCB khác 0 thì $1/f(x)$ là một VCL và ngược lại, nếu $f(x)$ là VCL khác 0 thì $1/f(x)$ là VCB.

Nếu f, g là các VCL và tỷ số f/g cũng là VCL thì f là VCL có cấp cao hơn g . Vì vậy, trong việc tính giới hạn của tỷ số f/g (dạng vô định ∞/∞) ta chỉ giữ lại ở tử số và mẫu số các VCL có cấp cao nhất và ngắt bỏ các VCL cấp thấp hơn đi.

Ví dụ:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{4x^3 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \frac{1}{2}$$

§4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong §3 ta đã xét giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow a$ mà không đòi hỏi hàm f phải xác định tại a . Trong mục này ta sẽ xét một lớp hàm đặc biệt, hay gặp trong thực tế: hàm f xác định tại a , hàm f có giới hạn khi $x \rightarrow a$ và giá trị giới hạn đó bằng giá trị của hàm tại a . Đó là lớp các hàm số liên tục.

4.1. Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = a$ nếu: nó xác định tại a và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ví dụ: hàm $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm x . Thật vậy, lấy $x = a$ bất kỳ thì $f(a) = a^2$, $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$, điều này có nghĩa là hàm f liên tục tại a . Nhưng a được chọn bất kỳ nên hàm f liên tục tại mọi điểm.

Dùng các định lý về giới hạn ta chứng minh được:

Định lý 1: Nếu các hàm $f(x), g(x)$ liên tục tại $x = a$ thì các hàm $f(x) + g(x)$, $k.f(x)$ với k là hằng số, $f(x).g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ với $g(a) \neq 0$ cũng liên tục tại a .

Bây giờ ta xem xét tính liên tục của hàm hợp:

Trước tiên ta xem lại khái niệm hàm hợp. Giả sử có hai hàm:

$$u: A \rightarrow B, u(x) = y$$

$$f: B \rightarrow C, f(y) = z$$

Như vậy ta có hàm hợp: $f \circ u: A \rightarrow C, (f \circ u)(x) = f(u(x))$

Định lý 2: Nếu hàm u liên tục tại $x = a$, hàm f liên tục tại điểm $u_0 = u(a)$ thì hàm hợp $f \circ u$ cũng liên tục tại $x = a$.

Chứng minh:

Do f liên tục tại u_0 nên với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, ta tìm được số $\eta > 0$ sao cho:

$$|u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

Do hàm u liên tục tại a nên với $\eta > 0$ tìm được ở trên ta tìm được $\delta > 0$ sao cho:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(a)| = |u - u_0| < \eta \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |u - u_0| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$$

hay: $|f[u(x)] - f[u(a)]| < \varepsilon$

Điều đó chứng tỏ $\lim_{x \rightarrow a} f[u(x)] = f[u(a)]$. Tức là hàm hợp $f \circ u$ liên tục tại $x = a$. ■

Ta thừa nhận rằng: các hàm sơ cấp cơ bản liên tục tại mọi điểm trong miền xác định của chúng.

Dùng định lý 1 và định lý 2 ta có thể phát biểu: các hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của chúng.

4.2. Hàm liên tục trong một khoảng kín

4.2.1. Liên tục một phía

Trong định nghĩa giới hạn, khi ta viết $x \rightarrow a$ ta cần hiểu là x dần tới a theo những giá trị nhỏ hơn a (x dần tới a theo phía trái, ký hiệu $x \rightarrow a - 0$ hoặc $x \rightarrow a^-$) và x dần tới a theo những giá trị lớn hơn a (x dần tới a theo phía phải, ký hiệu $x \rightarrow a + 0$ hoặc $x \rightarrow a^+$).

Giới hạn của hàm f khi $x \rightarrow a$ như vậy là giới hạn hai phía.

Trong nhiều trường hợp, ta chỉ cần xét giới hạn của hàm khi $x \rightarrow a - 0$, ta có giới hạn trái, hoặc khi $x \rightarrow a + 0$, ta có giới hạn phải.

Ví dụ: với hàm $f(x) = \sqrt{x}$ thì khi xét giới hạn của nó khi $x \rightarrow 0$ ta chỉ có thể xét giới hạn phải, vì nếu xét giới hạn trái thì vô nghĩa (vì hàm $\sqrt{x}$ chỉ xác định với $x \geq 0$).

Hàm f được gọi là liên tục trái tại a nếu nó xác định tại a và

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. Hàm f được gọi là liên tục phải tại a nếu nó xác định tại a và

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Hàm f được gọi là liên tục tại a nếu nó liên tục cả phía trái và cả phía phải tại a .

4.2.2. Hàm liên tục trên khoảng kín $[a, b]$

Một hàm f được gọi là liên tục trên khoảng kín $[a, b]$ nếu:

- Nó liên tục tại mọi điểm $x \in (a, b)$.
- Nó liên tục phải tại a và liên tục trái tại b .

Khi biểu diễn đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng thì ta được một đường cong liền nét (vẽ được bằng một nét bút).

Ta phát biểu không chứng minh mà chỉ minh họa bằng hình học các tính chất quan trọng của hàm liên tục trên một khoảng kín.

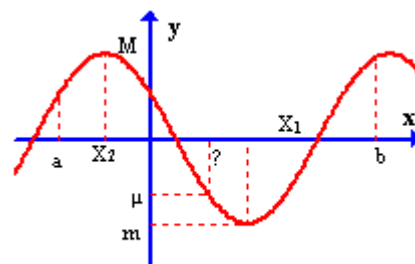
Tính chất 1: nếu hàm f liên tục trên khoảng kín $[a, b]$ thì nó đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M ít nhất một lần trên khoảng $[a, b]$.

Nói cách khác, tồn tại $x_1 \in [a, b]$ và $x_2 \in [a, b]$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$ ta có $m = f(x_1) \leq f(x)$; $M = f(x_2) \geq f(x)$.

Chú ý rằng điều kiện khoảng kín là quan trọng, chẳng hạn nếu xét hàm $f(x) = x$ liên tục trong khoảng mở $(0, 1)$ thì không tìm được điểm trong $(0, 1)$ để hàm f đạt giá trị nhỏ nhất cũng như giá trị lớn nhất.

Tính chất 2: nếu hàm f liên tục trong khoảng kín $[a, b]$ thì nó nhận mọi giá trị trong khoảng kín $[m, M]$, tức là ảnh của đoạn $[a, b]$ qua f là $[m, M]$.

Nói cách khác, nếu μ là một giá trị tùy ý thuộc khoảng kín $[m, M]$, $m \leq \mu \leq M$ thì thế nào cũng tìm được $\xi \in [a, b]$ để $f(\xi) = \mu$ (hình 11).



Hình 11

Hệ quả: nếu hàm f liên tục trên khoảng kín $[a, b]$, giá trị của hàm tại a và b trái dấu nhau, tức là $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ bao giờ cũng có nghiệm trong khoảng (a, b) . Hơn nữa, nếu f đơn điệu trong khoảng $[a, b]$ thì nghiệm đó là duy nhất.

Ta chỉ việc áp dụng tính chất 2 với $m < 0, M > 0, \mu = 0$.

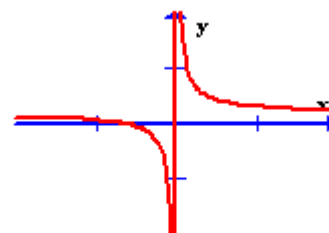
4.3. Hàm số gián đoạn

Nếu hàm f không liên tục tại $x = a$ thì điểm $x = a$ là điểm gián đoạn của hàm số. Ta cũng nói hàm số gián đoạn tại a . Các trường hợp gián đoạn thường gặp là:

- Hàm f không xác định tại a và $f(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow a$. Điểm $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn vô cùng.

Ví dụ: Hàm $f(x) = 1/x$ có gián đoạn vô cùng tại $x = 0$.

- Hàm f xác định tại $x = a$, hàm có các giới hạn trái (hữu hạn) và giới hạn phải tại a nhưng các giới hạn đó không bằng nhau. Khi đó ta nói hàm



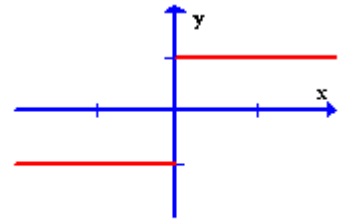
Hình 12

có gián đoạn loại một tại điểm $x = a$, và tại $x = a$ hàm f có bước nhảy bằng $|f(a+0) - f(a-0)|$.

Ví dụ: hàm $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ có gián đoạn loại

một tại $x = 0$. Bước nhảy tại $x = 0$ là

$$|f(+0) - f(-0)| = |1 - (-1)| = 2$$



Hình 13

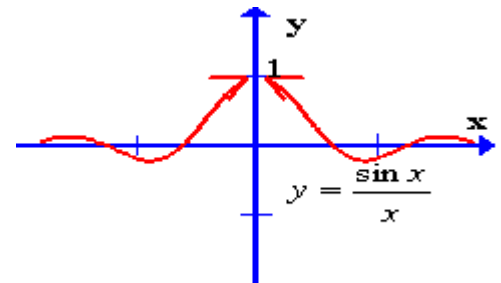
3, Hàm f không xác định tại $x = a$ nhưng có giới hạn (hai phía) khi $x \rightarrow a$. Nếu ta bổ sung cho hàm f giá trị tại a bằng giới hạn tại a của nó thì ta sẽ thu được một hàm mới liên tục tại a . Khi đó điểm $x = a$ được gọi là điểm gián đoạn khử được.

Ví dụ: Hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ không xác định tại $x = 0$

nhưng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nên nếu ta xét hàm

$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ thì hàm này liên tục với mọi

x .



BÀI TẬP

6.1. Tìm miền xác định của hàm số (trên tập số thực) được cho bởi:

$$a) y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}; \quad b) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2};$$

$$c) y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 6)]; \quad d) y = \arcsin(x - 2);$$

$$e) y = \arccos \frac{1 - 2x}{3}$$

6.2. Hàm f xác định trên R được gọi là hàm lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$; là hàm chẵn nếu $f(-x) = f(x)$. Cho hàm $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, hãy chứng minh nó là hàm lẻ và tìm hàm ngược của nó.

6.3. Chứng minh các công thức sau:

$$a) \text{ Nếu } x > 0: \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \text{ suy ra hệ thức tương ứng đối với } x < 0.$$

$$b) \arcsin a + \arcsin b = \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$$

6.4. Người ta định nghĩa các **hàm Hypebolic** như sau:

Hàm sinhypebolic, ký hiệu $\operatorname{sh} x: f: R \rightarrow R, f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Hàm coshypebolic, ký hiệu $\operatorname{ch} x: g: R \rightarrow R, g(x) = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

- a) Chứng tỏ rằng hàm $\operatorname{sh} x$ là hàm lẻ và hàm $\operatorname{ch} x$ là hàm chẵn.
- b) Xuất phát từ đồ thị của hàm số e^x, e^{-x} hãy vẽ đồ thị các hàm $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$.
- c) Tìm hàm ngược của hàm $\operatorname{sh} x$. Phải hạn chế miền xác định của hàm $\operatorname{ch} x$ như thế nào để nó có hàm ngược? Hãy tìm hàm ngược đó.
- d) Chứng minh các công thức:
 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$

6.5. Cho dãy số xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

- a) Chứng minh rằng với mọi n ta có $u_n < 2$.
- b) Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tăng, từ đó hãy tìm giới hạn của dãy.

6.6. Tính các giới hạn:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cotg x; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$$