

Chương I: KHÁI NIỆM VỀ TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

§1. TẬP HỢP

1.1 Các khái niệm về tập hợp

Trong ngôn ngữ hàng ngày, ta thường dùng đến khái niệm *tập hợp*: tập hợp các sinh viên có mặt trong một lớp học, tập hợp các câu hỏi ôn thi... Ở đây ta không định nghĩa tập hợp mà chỉ mô tả nó bằng một dấu hiệu hay một tính chất nào đó cho phép ta nhận biết được tập hợp đó và phân biệt nó với các tập hợp khác. Ta coi *tập hợp là một khái niệm nguyên thủy* cũng giống như khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học.

Các đối tượng lập nên tập hợp được gọi là *các phần tử* của tập hợp.

Nếu a là một phần tử của tập hợp A thì ta ký hiệu: $a \in A$.

Nếu a không phải là một phần tử của tập hợp A thì ta ký hiệu: $a \notin A$.

Ví dụ: Nếu A là tập hợp các số nguyên chẵn thì $2 \in A, 10 \in A$ nhưng $15 \notin A$.

Một tập hợp được gọi là *hữu hạn* nếu nó gồm một số nhất định phần tử.

Ví dụ: Tập hợp các sinh viên của một lớp học là hữu hạn, số phần tử ở đây là số sinh viên của lớp đó.

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ là hữu hạn, nó gồm hai phần tử là 1 và 2.

Có những tập hợp chỉ có đúng một phần tử, chẳng hạn tập hợp các nghiệm dương nhỏ hơn 2 của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ chỉ có một phần tử là $\frac{\pi}{6}$.

Để được thuận tiện, người ta cũng đưa vào loại tập hợp không chứa một phần tử nào và gọi nó là *tập hợp rỗng*, ký hiệu là $\emptyset$.

Ví dụ: Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là rỗng, vì không tồn tại số thực nào mà bình phương lại bằng -1 .

Tập hợp gồm vô số phần tử gọi là *tập hợp vô hạn*. Người ta phân biệt:

Tập hợp *vô hạn đếm được* là tập hợp tuy số lượng phần tử là vô hạn song ta có thể đánh số thứ tự các phần tử của nó (tức là có thể biết được phần tử đứng liền trước và đứng liền sau của một phần tử bất kỳ).

Ví dụ: Tập hợp các nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là vô hạn đếm được, vì các phần tử của nó có dạng $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; với $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ chúng được đánh số theo số nguyên k .

Tập hợp vô hạn không đếm được là tập hợp có vô số phần tử và không có cách nào đánh số thứ tự các phần tử của nó.

Ví dụ: Tập hợp các điểm trên đoạn thẳng $[0,1]$.

Tập hợp con

Cho hai tập hợp A và B . Nếu bất kỳ phần tử nào của tập hợp A cũng là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là tập hợp con của B và ký hiệu $A \subset B$ (đọc: A bao hàm trong B).

Như vậy ta có:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

(ký hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “khi và chỉ khi”, nó có nghĩa của điều kiện cần và đủ, ký hiệu $\Rightarrow$ đọc là “suy ra” hay “kéo theo”).

Ví dụ: Gọi A là tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$, B là tập hợp các số nguyên dương thì $A \subset B$ vì 1 và 2 cũng là các số nguyên dương.

Quan hệ bao hàm giữa các tập hợp có tính chất bắc cầu nghĩa là: Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Tập hợp bằng nhau

Nếu $A \subset B$ đồng thời $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A , B là bằng nhau. Ta cũng ký hiệu $A = B$.

$$\text{Như vậy: } A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

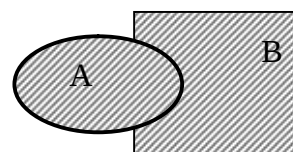
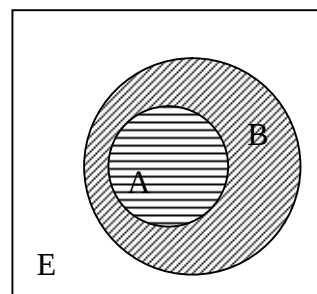
Người ta quy ước rằng: Tập hợp rỗng $\emptyset$ là tập hợp con của bất kỳ tập hợp nào. Thật vậy, nếu $A \subset B$ thì bất kỳ phần tử nào không thuộc B cũng không thuộc A và như vậy $\emptyset \subset B$ vì không có phần tử nào thuộc tập hợp rỗng.

Để tiện lợi cho việc xét các tập hợp, ta thường coi tập các tập hợp được khảo sát là các tập hợp con của một tập hợp E “đủ lớn” nào đó, chẳng hạn trong chương trình toán học ở Trung học khi xét tập hợp các nghiệm của phương trình, ta đều coi chúng là tập hợp con của tập hợp số thực.

1.2 Các phép toán trên tập hợp

Giả sử $A, B, C, \dots$ là các tập hợp con của một tập hợp E nào đó. Ta có thể xây dựng các tập hợp mới dựa trên các tập hợp đó bằng các phép toán sau:

a) Phép hợp: Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A hoặc B . Ta cũng nói hợp của A, B , là tập hợp chứa các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B . Ta ký hiệu hợp của hai tập hợp A và B là: $A \cup B$.



Như vậy: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$

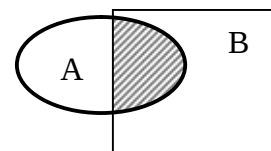
Ví dụ: Nếu A là tập hợp các số thực nhỏ hơn 1, B là tập hợp các số thực lớn hơn 2 thì tập hợp các nghiệm thực của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 > 0$ là $A \cup B$.

b) Phép giao: Giao của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc cả A lẫn cả B .

Ta ký hiệu giao của hai tập hợp A và B là $A \cap B$.

Như vậy: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$

Ví dụ: A là tập hợp các số thực nhỏ hơn 2, B là tập hợp



Hình 3. $A \cap B$

các số thực lớn hơn 1 thì tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là $A \cap B$.

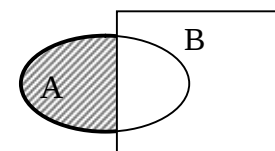
Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói các tập hợp A và B không giao nhau hay rời nhau.

Ví dụ: A là tập hợp các điểm trên đường thẳng $y = x + 1$, B là tập hợp các điểm trên Parabol $y = -x^2$ thì $A \cap B = \emptyset$ (hai đường không giao nhau.)

c) Phép trừ: Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp chứa các phần tử thuộc A mà không thuộc B .

Ta ký hiệu hiệu của hai tập hợp A và B là $A \setminus B$.

Ví dụ: y là tập hợp số thực, x là tập hợp gồm hai số thực 1



Hình 4. $A \setminus B$

và x thì tập hợp xác định của phân thức $\frac{1+x}{x^2-3x+2}$ là $R \setminus B$.

Đặc biệt, hiệu $E \setminus A$ được gọi là phần bù (hay bổ sung) của A trong E , ký hiệu là $C_E A$, hay nếu tập E đã biết thì có thể ký hiệu đơn giản là $\bar{A}$.

Các tính chất của các phép toán trên:

Giả sử A, B, C là các tập con của một tập hợp E . Các phép toán hợp, giao, bù xung có các tính chất sau:

1. $\overline{\bar{A}} = A$
2. $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
3. $\bar{A} \cup A = E \quad \bar{A} \cap A = \emptyset$
4. $A \cup E = E \quad A \cap E = A$
5. $A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
6. $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
7. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
8. $(A \cap B) \cup C = (B \cup C) \cap (A \cup C); \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
9. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Tính chất cuối cùng còn được gọi là **quy tắc Đờ mooc-găng**: Khi lấy phần bù của hợp hay giao hai tập hợp, thì mỗi tập hợp được thay bằng phần bù của nó, phép hợp được thay bằng phép giao, phép giao thay bằng phép hợp.

Việc chứng minh các tính chất trên dựa vào việc chứng minh sự bằng nhau của hai tập hợp. Ta nhắc lại: $T = P$ khi và chỉ khi $T \subset P$ và $P \subset T$.

Ta chứng minh tính chất 9.1 : Đặt $T = \overline{A \cup B}$ và $P = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Đầu tiên chứng minh $T \subset P$:

Lấy $x \in T$ tức là $x \in \overline{A \cup B}$. Theo hình vẽ 2, x thuộc phần bù của $A \cup B$ tức là x phải không thuộc A và không thuộc B : $x \notin A, x \notin B$. Nhưng $x \notin A$ tức là $x \in \overline{A}$. Cũng như vậy, tức là $x \in \overline{B}$. Vậy $x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}$ hay $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ta đã chứng minh nếu $x \in \overline{A \cup B}$ thì $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Từ đó ta có:

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh $P \subset T$.

Lấy $y \in P$ tức là $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Theo định nghĩa phép giao ta có $y \in \overline{A}$ và $y \in \overline{B}$ tức là $y \notin A$ và $y \notin B$. Khi đó y phải thuộc phần bù của $A \cup B$ tức là ta có $y \in \overline{A \cup B}$. Như vậy: $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Phương pháp chứng minh các tính chất khác cũng tương tự.

1.3 Cách cho một tập hợp

Người ta thường cho tập hợp bằng cách:

a) Liệt kê các phần tử của nó

Ví dụ: Bảng danh sách các thí sinh trúng tuyển vào một trường đại học.

Nếu số các phần tử của tập hợp ít, ta có thể viết tên các phần tử của tập hợp giữa hai dấu {}, chẳng hạn $A = \{1, 2, 3, 4\}$; thì A là tập có 4 phần tử là 1, 2, 3, 4

b) Cho quy tắc để nhận biết các phần tử của nó

Ta viết: $A = \{x : P(x)\}$ và hiểu: A là tập hợp gồm các phần tử x sao cho tính chất P đúng với x .

Ví dụ: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ hiểu: A là tập hợp các số thực x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ tức là $A = \{1, 2\}$

§2. ÁNH XẠ

2.1 Khái niệm về ánh xạ

Cho hai tập hợp A và B . Ta nói rằng có một ánh xạ f từ A vào B nếu với mỗi phần tử $x \in A$ có tương ứng theo một quy tắc nào đó một phần tử duy nhất $y \in B$.

Ta ký hiệu: $f : A \rightarrow B$ (đọc: f là ánh xạ từ x vào B). A là tập nguồn, B là tập đích.

Phần tử $y \in B$ tương ứng với phần tử $x \in A$ bởi ánh xạ f , được gọi là ảnh của x qua f và được ký hiệu là $f(x)$.

Nếu với bất kỳ phần tử x nào của A , ảnh $f(x)$ của nó được xác định thì A còn được gọi là tập xác định của ánh xạ f .

Nếu A là tập xác định của ánh xạ f thì ảnh của tập hợp A bởi ánh xạ f được định nghĩa bởi: $f(A) = \{y \in B : \exists x \in A, y = f(x)\}$

Ví dụ: Xét ánh xạ f từ tập hợp số thực R vào chính nó xác định bởi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ thì tập xác định của nó là $R \setminus \{0\}$ còn tập hợp ảnh của nó là tập hợp mọi số thực dương R^+ .

Ánh xạ bằng nhau

Cho ánh xạ $f : A \rightarrow B$ và $g : A' \rightarrow B'$. Nếu với mọi $x \in A$ ta có $f(x) = g(x)$ thì ta nói hai ánh xạ f và g là bằng nhau, ta viết $f = g$.

Ví dụ: Cho tập hợp $A = \{-1, 0, 1\}$ và các ánh xạ:

$$f : A \rightarrow R \text{ xác định bởi } f(x) = x + 1;$$

$$g : A \rightarrow R \text{ xác định bởi } g(x) = -x^3 + 2x + 1.$$

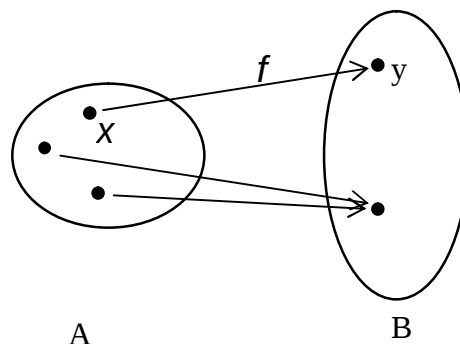
Ta có: $f = g$ (Nếu xét các ánh xạ f và g từ R vào N_1 thì ta lại có $f \neq g$).

Người ta cũng định nghĩa các phép toán trên ánh xạ. Ở đây ta chỉ hạn chế xét các trường hợp các ánh xạ f, g có cùng miền xác định A và lấy giá trị trong R .

2.2 Các loại ánh xạ

Cho ánh xạ f từ A vào B .

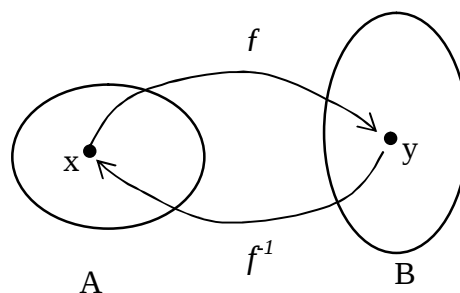
- Ánh xạ f được gọi là **đơn ánh** nếu ảnh của các phần tử khác nhau là khác nhau. Nói cách khác, với mọi $x_1, x_2 \in A$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Ánh xạ f được gọi là **toàn ánh** nếu $f(A) = B$. Nói cách khác, với bất kỳ y thuộc B , tồn tại ít nhất phần tử x thuộc A sao cho: $f(x) = y$.



Hình 5

c) Ánh xạ f được gọi là **song ánh** nếu nó vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh.

Ta chú ý rằng nếu f là song ánh từ A lên B thì do tính chất toàn ánh nên với mỗi $y \in B$ có tương ứng một $x \in A$ để $f(x) = y$, và do tính chất đơn ánh nên phần tử x đó phải duy nhất (nếu trái lại, giả sử phần tử $y \in B$ tương ứng với hai phần tử khác nhau $x_1 \neq x_2$ mà $f(x_1) = f(x_2) = y$, trái tính chất đơn ánh).



Hình 6

Như vậy, nếu f là song ánh từ A lên B thì ta lại có một ánh xạ từ B lên A , ánh xạ này được gọi là **ánh xạ ngược** của ánh xạ f , nó cũng là song ánh. Ánh xạ ngược của ánh xạ f ký hiệu là f^{-1} .

Với song ánh $f : A \rightarrow B$ xác định bởi $y = f(x)$ thì ánh xạ ngược của nó là $f^{-1} : B \rightarrow A$ xác định bởi $x = f^{-1}(y)$.

Các ví dụ:

Ánh xạ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = a^x$ là đơn ánh, vì với $x_1 \neq x_2$ ta có $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Ánh xạ $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ xác định bởi $g(x) = \sin x$ là toàn ánh vì với số thực p bất kỳ thuộc khoảng $[-1, 1]$ ta luôn luôn tìm được số thực x sao cho $\sin x = p$.

Ánh xạ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = x^3$ là song ánh, vì nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

2.3 Ánh xạ hợp

Giả sử f và g là hai ánh xạ sao cho tập hợp xác định của g trùng với tập hợp ảnh của f . Khi đó ta có thể viết dãy liên tiếp các ánh xạ $f : A \rightarrow B; g : B \rightarrow C$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ mới $h : A \rightarrow C$ bởi $h(x) = g[f(x)]$, trong đó $f(x) \in B$ là ảnh của $x \in A$ bởi ánh xạ f ; $g[f(x)] \in C$ là ảnh của $f(x) \in B$ bởi ánh xạ g .

Ánh xạ h xác định như trên được gọi là ánh xạ hợp của ánh xạ f và ánh xạ g , được ký hiệu là $g \circ f$. Như vậy $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Ví dụ: Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$;

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = x^2$;

Ta có:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = [2x + 1]^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

Chú ý: Khi ánh xạ hợp $g \circ f$ được xác định thì chưa chắc ánh xạ $f \circ g$ đã xác định. Ngay cả trong trường hợp $f \circ g$ xác định thì nói chung ta có $g \circ f \neq f \circ g$. Chẳng hạn trong Ví dụ trên ta có $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1$.

§3 TẬP HỢP SỐ THỰC

3.1 Định nghĩa trường

Cho một tập hợp E . Ta coi đã xác định được một *phép toán hai ngôi* trong E hay một *luật hợp thành* trong E nếu với mỗi cặp phần tử (a, b) của E ta cho tương ứng với một phần tử c cũng của E . Ta ký hiệu phép toán đó bởi dấu $*$ và ta viết $a * b = c$ với $a, b, c \in E$. (Nếu phép toán là phép cộng ta dùng dấu $+$ như thường lệ, nếu là phép nhân ta dùng dấu $\times$ hay dấu $\cdot$).

Phép toán $*$ được gọi là có *tính chất kết hợp* nếu với $a, b, c \in E$ ta có:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Phép toán $*$ được gọi là có *tính chất giao hoán* nếu với $a, b \in E$ ta có:

$$a * b = b * a$$

Phần tử $e \in E$ được gọi là *phần tử trung hoà* đối với phép toán $*$ nếu với mọi $a \in E$ ta có: $a * e = e * a = a$. (Với phép cộng phần tử trung hoà là số 0, với phép nhân đó là số 1).

Phần tử $a' \in E$ sao cho với $a \in E$ ta có $a * a' = a' * a = e$ với e là phần tử trung hoà của phép toán $*$, được gọi là *phần tử ngược* của a đối với phép toán $*$. Ta ký hiệu phần tử ngược của phần tử a là a^{-1} (với phép cộng, phần tử ngược của m chính là số đối $-a$, với phép nhân đó chính là số nghịch đảo $\frac{1}{a}, a \neq 0$).

Tập hợp E được gọi là có *cấu trúc trường*, hay nói gọn hơn, là một *trường* nếu trong E có xác định hai phép toán:

+ Phép toán thứ nhất được gọi là **phép cộng**, nó thỏa mãn các tính chất sau:

A_1 – Phép cộng có tính chất giao hoán: $\forall a, b \in E, a + b = b + a$

A_2 – Phép cộng có tính chất kết hợp: $\forall a, b, c \in E, (a + b) + c = a + (b + c)$

A_3 – Phép cộng có phần tử trung hoà trong E , ký hiệu là 0: f

A_4 – Mọi phần tử trong E đều có phần tử ngược ký hiệu là $-a$: $a + -a = 0$

+ Phép toán thứ hai được gọi là **phép nhân**, nó thỏa mãn các tính chất sau:

B_1 – Phép nhân có tính chất giao hoán: $\forall a, b \in E, a \cdot b = b \cdot a$

B_2 – Phép nhân có tính chất kết hợp: $\forall a, b, c \in E, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

B_3 – Phép nhân có phần tử trung hoà (hay phần tử đơn vị)

$$e \in E : \forall a \in E, a.e = e.a = a$$

B4 - Mọi phần tử $a \in E, a \neq 0$ đều có phần tử ngược đối với phép nhân là phần tử nghịch đảo $\frac{1}{a}$ cũng thuộc E .

+ Giữa phép cộng và phép nhân có tính chất:

C – phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng:

$$\forall a, b, c \in E : a.(b + c) = a.b + a.c$$

Ví dụ: Tập hợp các số hữu tỷ, tức là tập các số có dạng $\frac{p}{q}, (p, q) = 1$, có cấu trúc trường: cộng hai số hữu tỷ, nhân hai số hữu tỷ ta được một số hữu tỷ, cả hai phép toán đó đều thỏa mãn 8 tính chất trên.

Tập hợp các số nguyên không có cấu trúc trường vì nghịch đảo của một số nguyên khác không không phải là một số nguyên.

Chú ý: Trong trường ta có thể định nghĩa phép chia cho một số khác không: nếu $b \neq 0$ thì $a : b = a.(\frac{1}{b})$.

3.2 Các tính chất cơ bản của trường số thực

Tập hợp số thực R với hai phép toán cộng và nhân có cấu trúc trường, nghĩa là cộng hai số thực ta được một số thực, nhân hai số thực ta được một số thực. Phép cộng và phép nhân có các tính chất giao hoán, kết hợp; phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng; phần tử trung hòa của phép cộng là số 0, của phép nhân là số 1; phần tử ngược đối với phép cộng của số a là số đối $-a$, đối với phép nhân của số $a \neq 0$ là số nghịch đảo $\frac{1}{a}$.

Trong tập hợp số thực R ta xét một tập hợp con ký hiệu là R^+ và ta định nghĩa R^- là tập hợp những số đối của x nếu $x \in R^+$ (tức là $-x \in R^-$) sao cho:

- 1) $R^+ \cap R^- = \emptyset$;
- 2) $R^+ \cup R^- \cup \{0\} = R$;
- 3) $\forall a, b \in R^+ : a + b \in R^+, a.b \in R^+$

Khi đó ta nói rằng trường số thực R là một trường có thứ tự. Các số thực thuộc R^+ được gọi là các số thực dương, các số thực thuộc R^- được gọi là các số thực âm.

Ta xác định trên R một quan hệ thứ tự ký hiệu $<$ (đọc là bé hơn) như sau: Với hai số thực a, b ta có $a < b$ khi và chỉ khi $b - a$ là số thực dương (tức là $b + (-a) \in R^+$). Quan hệ $<$ có tính chất bắc cầu, nghĩa là: nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

Chú ý: Nếu ta có y' thì người ta còn viết $b > a$ (đọc b lớn hơn a). Nếu a là số thực âm thì ta viết $a < 0$, nếu a là số thực dương thì ta viết $a > 0$.

Trường số thực còn là *trường có thứ tự Acsimet*: Với hai số thực tùy ý $a, b; a > 0$ bao giờ cũng tìm được một số tự nhiên n sao cho $na > b$. Nói cách khác, dù số thực dương a có nhỏ đi bao nhiêu chẳng nữa và dù số thực b có lớn đi bao nhiêu chẳng nữa thì tổng của một số đủ lớn a sẽ vượt quá b .

Tính chất trên cho phép người ta có thể xấp xỉ tùy ý một số thực bởi một số thập phân (gần đúng thiếu hoặc gần đúng thừa), và như vậy trong thực hành người ta có thể thực hiện được các phép tính trên các số thực.

3.3 Giá trị tuyệt đối của một số thực

Với mọi số thực x ta định nghĩa *giá trị tuyệt đối của x* , ký hiệu $|x|$ như sau:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có các tính chất sau:

$$a) |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$b) |x| = |-x|;$$

$$c) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$d) |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$e) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Ta chứng minh một trong các tính chất, tính chất $d)$ chẳng hạn:

Từ định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \end{aligned}$$

Từ đó: $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$;

Hay: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3.4 Tập hợp số thực suy rộng

Ta thêm vào tập số thực R hai phần tử khác nhau, ký hiệu là $+\infty$ và $-\infty$ (đọc là dương vô cùng và âm vô cùng), không thuộc R , và với mọi số thực x ta đặt:

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty;$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty;$$

Với $x > 0$:

$$x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty; x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty;$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty; (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$$

$$(+\infty).(+\infty) = +\infty; (-\infty).(-\infty) = +\infty;$$

Tập hợp số thực R cùng với hai phần tử $+\infty; -\infty$ có các tính chất trên gọi là *tập hợp số thực suy rộng*.

Có thể biểu diễn hình học tập hợp số thực nhờ trục số: Đó là đường thẳng $x'Ox$, điểm gốc O ứng với số không, các số thực dương thuộc nửa đường thẳng Ox , các số thực âm thuộc nửa đường thẳng Ox' , mỗi số thực a ứng với một điểm .. trên đường thẳng sao cho độ dài $OA = |a|$.

§4 TẬP HỢP SỐ PHỨC

Ta đã biết rằng nếu chỉ hạn chế trong trường số thực thì có những phương trình vô nghiệm, chẳng hạn phương trình bậc hai $x^2 + 1 = 0$.

Trong phần này ta sẽ tìm cách mở rộng trường số thực sang một tập hợp số mới sao cho tập hợp số thực là tập con của tập số mới này và trong tập số mới đó mọi phương trình bậc hai đều có nghiệm.

4.1 Định nghĩa và các phép toán

Xét tập hợp C mà các phần tử $z \in C$ là các cặp số thực (a, b) :

$$C = \{z = (a, b), a \in R, b \in R\}$$

Phần tử $z \in C$ được gọi là số phức.

Hai số phức $z = (a, b); z' = (a', b')$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a = a'; b = b'$

Trong tập hợp số phức C ta xác định hai phép tính:

Phép cộng hai số phức: với hai số phức $z = (a, b)$ và $z' = (a', b')$ thì tổng của chúng được xác định bằng: $z + z' = (a + a', b + b')$.

Phép nhân hai số phức: với hai số phức $z = (a, b)$ và $z' = (a', b')$ thì tích của chúng được xác định bằng: $z.z' = (a.a' - b.b', a.b' + b.a')$

Có thể kiểm chứng rằng các phép toán cộng và nhân trên có các tính chất giao hoán, kết hợp, phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng, phần tử trung hoà của phép cộng là số phức $(0, 0)$, của phép nhân là số phức $(1, 0)$; phần tử ngược của số phức $z = (a, b)$ đối với phép cộng là $(-a, -b)$, đối với phép nhân (với điều kiện

$$a \neq 0, b \neq 0) \text{ là số phức } \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Như vậy, tập hợp số phức có cấu trúc một trường, ta gọi nó là *trường số phức*.

4.2 Các chú ý

1) Có thể đồng nhất số phức $(a, 0)$ với số thực a vì ta có:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0) \text{ là số thực } a + a'$$

$$(a, 0) \cdot (a', 0) = (a \cdot a', 0) \text{ là số thực } a \cdot a';$$

Như vậy có thể coi tập hợp số thực là tập con của tập số phức $R \subset C$.

Sau này ta sẽ viết a thay cho $(a, 0)$

2) Có thể viết số phức (a, b) dưới dạng tổng: $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$

Số $(a, 0)$ được viết bằng a , số $(b, 0)$ được viết bằng b .

Ta đặt $i = (0, 1)$ thì ta có $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Như vậy, số phức (a, b) được viết dưới dạng: $z = (a, b) = a + bi$ với $i^2 = -1$. a được gọi là phần thực, b được gọi là phần ảo của số phức z , số phức $i = (0, 1)$ mà $i^2 = -1$ được gọi là đơn vị ảo.

Trong thực tế người ta thường viết số phức dưới dạng $a + bi$

3) Khi viết số phức dưới dạng $a + bi$ thì ta có thể thực hiện các phép tính theo các quy tắc thông thường của số thực (do có cùng cấu trúc trường) và với chú ý rằng $i^2 = -1$

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i;$$

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = a \cdot a' + ab'i + ba'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

Để tìm số phức đảo của số phức $z = a + bi$ ta làm như sau:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

Từ đó, phép chia số phức z cho số phức $z' \neq 0$ được thực hiện theo quy tắc $z \cdot (\frac{1}{z'})$.

Số phức $a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $a + bi$.

4) Ta tìm nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ trong trường số phức.

Ta có thể viết $x^2 = -1 = i^2$; từ đó, $x = \pm i$.

Trong trường số phức mọi phương trình bậc hai với hệ số thực đều có nghiệm.

$$\text{Thật vậy, ta có: } ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) = 0 \quad (*)$$

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ thì:

$$+ \text{ Nếu } \Delta \geq 0 \text{ phương trình bậc hai có nghiệm thực } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$+ \text{ Nếu } \Delta < 0 \text{ đặt } \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \beta^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \text{ thì } (*) \text{ trở thành:}$$

$$a \cdot [(x - \alpha)^2 + \beta^2] = 0 \Rightarrow x = \alpha \pm i\beta$$

Ví dụ: Xét phương trình $x^2 - 2x + 4 = 0$

Ta có $\Delta = -12 = 12i^2$ từ đó phương trình có hai nghiệm phức: $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

4.3 Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x + yi$. Có thể biểu diễn hình học số phức đó trên mặt phẳng số phức: đó là mặt phẳng trên đó có hai trục $x'Ox$ và $y'Oy$ vuông góc với nhau. Ta cho tương ứng số phức $z = x + yi$ với điểm M có tọa độ (x, y) trên mặt phẳng đó (hay với véc tơ $\overrightarrow{OM}$); Các điểm trên trục $x'Ox$ tương ứng với các số $(x, 0)$, đó là các số thực x ; các điểm trên trục $y'Oy$ tương ứng với các số $(0, y)$, đó là các số phức có dạng iy .

Độ dài r của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức z , ta ký hiệu là $r = |z|$.

Góc φ giữa véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và Ox được gọi là argumen của số phức z , ký hiệu là $\varphi = \text{Arg}z$.

Góc φ được xác định chính xác đến $2k\pi$, người ta thường chọn giá trị chính của nó trong khoảng $[-\pi; \pi]$.

Ta có: $x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$ (hay $r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$)

Khi đó ta có thể viết số phức $z = x + yi$ dưới dạng lượng giác:
 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Ví dụ: Viết các số phức $(1, 0), i, 1 + i$ dưới dạng lượng giác.

Với số $(1, 0)$ ta có $x = 1; y = 0$ nên $r = 1, \tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Vậy $(1, 0) = \cos 0 + i \sin 0$

Với số i ta có $x = 0, y = 1 \Rightarrow r = 1, \tan \varphi = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Vậy $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

Tương tự $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Khi viết số phức dưới dạng lượng giác thì các phép tính nhân, chia, lũy thừa các số phức được tiến hành thuận lợi. Ta có các quy tắc:

Nếu $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ thì

$$a) z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$b) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]; \quad z_2 \neq 0$$

$$c) z_1^n = r_1^n [\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)]$$

Ta chứng minh cho a):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \text{ do } i^2 = -1. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự cho (b). Phép chứng minh (c) được suy ra từ (a) bằng quy nạp.

Dùng kết quả trên có thể chứng tỏ được rằng: Trong trường số phức căn bậc n của đơn vị [số phức $(1,0)$] có n giá trị khác nhau.

Thật vậy, ta viết $(1,0)$ dưới dạng lượng giác: $(1,0) = \cos 0 + i \sin 0$.

Gọi căn bậc n của $(1,0)$ là z , tức là $z^n = (1,0)$.

Giả sử số phức z có dạng lượng giác là $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Khi đó: $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] = \cos 0 + i \sin 0$.

Từ đó suy ra:
$$\begin{cases} r^n = 1 \\ \cos n\varphi = \cos 0; \sin n\varphi = \sin 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ n\varphi = 2k\pi; \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Vậy căn bậc n của số phức đơn vị có n giá trị khác nhau, gọi các căn bậc n đó là ε_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ta có:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, \dots, n-1.$$

BÀI TẬP

1.1 Ta ký hiệu các khoảng đóng, nửa khoảng đóng, nửa đóng (hoặc nửa mở), mở trên tập hợp số thực R như sau:

$$[a, b] = \{x \in R, a \leq x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x \in R, a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in R, a < x \leq b\};$$

$$(a, b) = \{x \in R, a < x < b\}.$$

Tìm $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ trong các trường hợp sau:

$$a, A = [3, 5], B = [2, 4];$$

$$b, A = [3, 5), B = (2, 4);$$

$$c, A = (3, 5), B = [2, 4).$$

1.2 Cho $A = \{x \in R, |x| \geq 5\}; B = \{x \in R, -6 \leq x < 0\}$. Xác định các tập hợp: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, \bar{A}$ và biểu diễn chúng trên trục số.

1.3 Chứng minh các đẳng thức tập hợp sau:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

1.4 Trong 100 sinh viên có 28 người học tiếng Anh, 30 người học tiếng Đức, 42 người học tiếng Pháp, 8 người học cả tiếng Anh và tiếng Đức, 10 người học cả tiếng Anh và tiếng Pháp, 5 người học cả tiếng Đức và tiếng Pháp, 3 người học cả 3 thứ tiếng. Hỏi có bao nhiêu người không học ngoại ngữ nào? Có bao nhiêu người chỉ học một ngoại ngữ?

1.5 Cho A, B là các tập hợp, f là ánh xạ. Chứng minh rằng:

$$a, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$b, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$

$$c, \text{ Nếu } f \text{ là đơn ánh thì } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

1.6 Chứng minh rằng các ánh xạ sau là song ánh và xác định ánh xạ ngược của chúng.

$$a, f: R \rightarrow R \text{ xác định bởi } f(x) = 2x - 1$$

$$b, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ xác định bởi } g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

1.7 Cho các ánh xạ $f: A \rightarrow R; f(x) = 2x^2 - 1; g: A \rightarrow R; g(x) = 1 - 3x;$

Tìm tập hợp A để $f = g$.

1.8 Số hữu tỷ là số có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p và q là hai số nguyên tố cùng nhau. Dùng

định nghĩa đó hãy chứng minh số $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỷ (chứng minh bằng phản chứng).

1.9 Các số a, b, a', b' là hữu tỷ, $\sqrt{c}$ không phải là hữu tỷ. Chứng minh rằng nếu $a + b\sqrt{c} = a' + b'\sqrt{c}$ thì $a = a', b = b'$. Dùng kết quả ấy hãy tìm các số x và y sao cho $x + y\sqrt{2} = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$.

Nguyên lý quy nạp: Nhiều mệnh đề toán học được chứng minh bằng nguyên lý quy nạp sau: Nếu P là một tính chất nào đó được xác định trên tập hợp các số tự nhiên N sao cho:

a, Tính chất P đúng với số tự nhiên 1.

b, Nếu tính chất P đã đúng cho số tự nhiên n thì nó cũng đúng cho số tự nhiên $n+1$. Khi đó tính chất P sẽ đúng cho mọi số tự nhiên n .

Sơ đồ chứng minh theo quy nạp như sau:

Đầu tiên ta chứng tỏ tính chất P đúng cho $n = 1$.

Sau đó ta giả sử tính chất P đúng cho n và tìm cách chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$.

Ta kết luận tính chất P đúng cho mọi n .

Ví dụ: Chứng minh tổng: $P_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ với n là số tự nhiên bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 1$ ta có $P_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ công thức đúng.

Ta giả sử công thức đúng cho n , tức là: $P_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Từ đó ta sẽ chứng minh công thức đúng cho $n+1$ tức là phải chứng minh: $P_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ta có

$P_{n+1} = P_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Vậy công thức đúng cho mọi số tự nhiên n .

1.10 Dùng nguyên lý quy nạp hãy chứng minh:

a, $(1+a)^n \geq 1+na, a > -1$

b, $(1+2+\dots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

c, Nếu một tập hữu hạn có n phần tử thì số tất cả các tập hợp con của nó là 2^n

1.11 Tính: a) $\frac{1}{i}$; b) $\frac{1-i}{1+i}$; c) $\frac{2}{1-3i}$; d) $(\sqrt{3}-i)^2$.

1.12 Viết các số phức $i, -8, 1-i$ dưới dạng lượng giác, từ đó hãy tính $\sqrt[3]{i}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt{1-i}$.

Tìm miền chứa điểm phức z nếu: a, $|z| > 5$; b, $|z + 2i| \geq 2$

1.13 Giải các phương trình sau.

1, $z^6 - z^3(1+i) + i = 0$

2, $z^6(1-i) = 1 + \sqrt{3}i$

3, $z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0$

4, $z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$

5, $x^3 + \sqrt{3} - i = 0$

Chương II. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

§1 PHÉP TÍNH MA TRẬN

1.1 Định nghĩa

Cho m, n là hai số nguyên dương. Một *ma trận* loại $m \times n$ là một bảng hình chữ nhật gồm $m.n$ số thực được trình bày theo m hàng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Các số a_{ij} ; $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ được gọi là các *phần tử* của ma trận A (phần tử nằm ở hàng i và cột j của ma trận).

Ma trận loại $1 \times n$ là ma trận hàng: nó chỉ có một hàng.

Ma trận loại $m \times 1$ là ma trận cột: nó chỉ có một cột.

Giả sử ta có ma trận A . Bây giờ ta lập một ma trận mới, nó có các hàng là các cột của ma trận A còn các cột là các hàng của ma trận A (vẫn giữ nguyên thứ tự các hàng và các cột). Ma trận mới này được gọi là **ma trận chuyển vị** của ma trận A , ta ký hiệu nó là A^t . Như vậy, nếu A là ma trận cho bởi (1) thì ta có:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nếu A là ma trận loại $m \times n$ thì A^t là ma trận loại $n \times m$.

Ma trận loại $n \times n$ là **ma trận vuông cấp n** ; nó có n hàng và n cột.

Các phần tử của ma trận vuông có chỉ số hàng bằng chỉ số cột $a_{11}; a_{22}; \dots; a_{nn}$ là các phần tử nằm trên *đường chéo chính*.

Ma trận vuông được gọi là **ma trận đối xứng** nếu các phần tử ở vị trí đối xứng qua đường chéo chính là bằng nhau.

Với ma trận đối xứng ta có: $a_{ij} = a_{ji} \forall i \neq j$

Ma trận vuông được gọi là **ma trận chéo** nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng không.

Ma trận vuông được gọi là **ma trận tam giác trên** nếu $a_{ij} = 0 \forall i > j$

Ma trận vuông được gọi là **ma trận tam giác dưới** nếu $a_{ij} = 0 \forall i < j$

Ma trận không là ma trận có mọi phần tử đều bằng không.

Hai ma trận là bằng nhau nếu chúng cùng loại và có các phần tử tương ứng bằng nhau.

Các ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ma trận vuông: } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Ma trận chéo } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ma trận đối xứng } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 Các phép toán trên ma trận

1) Phép cộng hai ma trận

Giả sử $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ là hai ma trận cùng loại $m \times n$.

Tổng hai ma trận A và B là một ma trận C cùng loại với A và B . Phần tử $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (hàng i , cột j) của ma trận C là tổng các phần tử ở vị trí tương ứng của A và B .

Ta ký hiệu: $C = A + B$.

2) Phép nhân một ma trận với một số thực

Tích của một ma trận A với một số thực α là một ma trận cùng loại với A có phần tử ở vị trí (i, j) là tích của α với phần tử a_{ij} của ma trận A .

Ta viết: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$

$$\text{Ví dụ: Cho } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có: } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Phép nhân hai ma trận

a) Phép nhân một ma trận hàng với một ma trận cột

Giả sử:

$$u = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n); v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v \end{pmatrix}$$

u là ma trận hàng loại $(1 \times m)$, v là ma trận cột loại $(n \times 1)$.

Tích của u, v được xác định bởi: $uv = (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)$.

b, Phép nhân hai ma trận

Điều kiện của phép nhân: Muốn nhân ma trận A với ma trận B thì số cột của ma trận A phải bằng số hàng của ma trận B .

Tích của ma trận A loại $(m \times p)$ và ma trận B loại $(p \times n)$ là một ma trận C . C là ma trận loại $(m \times n)$ có phần tử ở vị trí (i, j) bằng tích của hàng i của ma trận A với cột j của ma trận B :

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Ta ký hiệu $C = A.B$.

Ví dụ: Cho các ma trận: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

Tìm ma trận tích $C = A.B$.

C sẽ là ma trận loại (2×4) với:

$$c_{11} = 3 \times 1 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 4; \quad c_{12} = 3 \times 3 + 1 \times 1 + 4 \times 0 = 10$$

$$c_{13} = 3 \times 0 + 1 \times 0 + 4 \times 1 = 4; \quad c_{14} = 3 \times 0 + 1 \times 0 + 4 \times 1 = 4;$$

$$c_{21} = 2 \times 1 + 0 \times 1 + 5 \times 0 = 2; \quad c_{22} = 2 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 0 = 6;$$

$$c_{23} = 2 \times 0 + 0 \times 0 + 5 \times 1 = 5; \quad c_{24} = 2 \times 0 + 0 \times 0 + 5 \times 1 = 5.$$

Ma trận tích: $C = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Ta có thể nghiệm lại rằng: Nếu các ma trận A, B, C thỏa mãn điều kiện nhân: A là ma trận loại $(m \times p)$, B là ma trận loại $(p \times q)$, C là ma trận loại $(q \times n)$ thì tích $A.B.C$ có tính kết hợp: $A(B.C) = (A.B)C$

Nhưng ta cần chú ý rằng phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán. Nếu ma trận A nhân được với ma trận B thì chưa chắc B đã nhân được với A (không thỏa mãn điều kiện nhân); ngay cả khi tích $B.A$ tồn tại thì chưa chắc ta có $A.B = B.A$.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ còn $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nếu A và B thỏa mãn điều kiện nhân thì B^t và A^t cũng thỏa mãn điều kiện nhân và ta có: $(A.B)^t = B^t A^t$

Chuyển vị của ma trận tích bằng tích các ma trận chuyển vị nhưng lấy theo thứ tự ngược lại.

Ta cũng cần chú ý rằng trong phép nhân ma trận thì hệ thức $AB = 0$ chưa chắc đã kéo theo hoặc $A = 0$ hoặc $B = 0$.

Chẳng hạn, cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nhưng $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bây giờ ta xét ma trận vuông cấp n là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1. Ta ký hiệu ma trận đó là I

Khi đó mọi ma trận vuông A cấp n ta có: $AI = IA = A$

Ma trận I được gọi là **ma trận đơn vị cấp n** .

§2 ĐỊNH THỨC

2.1 Hoán vị và nghịch thế

Cho tập hợp hữu hạn $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Xét một hoán vị của các phần tử của E (đó là một song ánh P từ E vào chính nó):

$$P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E$. Lấy hai số α_i, α_j trong một hoán vị của E . Nếu $\alpha_i > \alpha_j$ với $i > j$ thì ta nói các số α_i, α_j lập thành một nghịch thế.

Ví dụ: Trong hoán vị 3214 của 4 số 1234 thì có 3 cặp tạo thành nghịch thế, đó là $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$

Để α_i, α_j lập thành một nghịch thế thì $(\alpha_i - \alpha_j)(i - j) < 0$.

Ta ký hiệu $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là tổng số tất cả các nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Trong ví dụ trên ta có: $I(3, 2, 1, 4) = 3$.

Định nghĩa 1: Một hoán vị của E được gọi là hoán vị chẵn nếu tổng số các nghịch thế của nó là chẵn hoặc bằng không, hoán vị là lẻ nếu tổng số các nghịch thế của nó là lẻ.

Xét một hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Nếu ta đổi chỗ hai phần tử α_i, α_j cho nhau còn các phần tử khác vẫn giữ nguyên thì ta nói đã thực hiện một *phép chuyển vị*. *Phép chuyển vị làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị*.