

# Chương 4

## Lý thuyết chuỗi

### Mục đích yêu cầu

- Trong chương trình bày các khái niệm cơ bản về chuỗi số và chuỗi hàm; chuỗi hội tụ, phân kỳ, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, các tiêu chuẩn khảo sát sự hội tụ của chuỗi, ứng dụng của chuỗi vào tính gần đúng, bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi hàm, khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa, chuỗi Fourier và các ứng dụng

- Sinh viên cần hiểu rõ các khái niệm trên, nắm vững các kết quả cơ bản để xét sự hội tụ, tính tổng của chuỗi số, tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số, tìm khai triển Taylor, Mac Laurin, Fourier của hàm số và vận dụng các kết quả vào tính gần đúng.

### 4.1 Đại cương về chuỗi số

#### 4.1.1 Định nghĩa.

Cho dãy số thực vô hạn  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ . Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

được gọi là chuỗi số. Các số  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  được gọi là số hạng của chuỗi số,  $u_n$  được gọi là số hạng tổng quát thứ  $n$  của chuỗi.

Tổng  $n$  hữu hạn số hạng đầu của chuỗi gọi là tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  hữu hạn thì ta nói chuỗi số hội tụ và có tổng là  $S$ . Ta viết  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .  
 $R_n = S - S_n$  được gọi là phần dư thứ  $n$  của chuỗi số.

Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$  hoặc không tồn tại thì ta nói chuỗi số phân kỳ.

Ví dụ. Xét chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ .

Đó là tổng của cấp số nhân vô hạn có công bội  $q$ . Với  $q \neq 1$  ta có

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- Nếu  $|q| < 1$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| \rightarrow 0$  hay  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$ , do đó chuỗi hội tụ và có tổng  $S = \frac{1}{1 - q}$ .

- Nếu  $|q| > 1$  thì  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , vậy chuỗi phân kỳ.

- Nếu  $q = 1$  thì  $S_n = n$ , khi đó  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  chuỗi phân kỳ.

- Nếu  $q = -1$  chuỗi số có dạng  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Khi đó  $S_n = 0$  khi  $n$  chẵn,  $S_n = 1$  khi  $n$  lẻ, do đó  $S_n$  không dần tới một giới hạn xác định khi  $n \rightarrow \infty$ , vậy chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  hội tụ khi  $|q| < 1$ , phân kỳ khi  $|q| \geq 1$ .

**Định lý 1.** (Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ). Nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ thì số hạng tổng quát  $u_n$  dần tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$

Chứng minh. Thật vậy,  $u_n = S_n - S_{n-1}$ , mặt khác do chuỗi hội tụ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

do đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . □

*Chú ý.* Điều kiện  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ để chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ.

Ví dụ. Chuỗi điều hòa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  có số hạng tổng quát  $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ , nhưng chuỗi phân kỳ.

Thật vậy, xét

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$$

Nếu chuỗi hội tụ thì  $S_n, S_{2n}$  cùng dần tới một giới hạn khi  $n \rightarrow \infty$ , tức là  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$  điều này mâu thuẫn với  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ .

Từ định lý trên suy ra nếu  $u_n$  không dần tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ.

### 4.1.2 Tiêu chuẩn Cauchy.

**Định lý 2.** Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ khi và chỉ khi với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tìm được số nguyên dương  $n_0$  sao cho khi  $p > q \geq n_0$  ta có  $|S_p - S_q| = \left| \sum_{n=q+1}^p u_n \right| < \varepsilon$ .

*Chứng minh.* Thật vậy, chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng  $S_n$  hội tụ. Theo tiêu chuẩn Cauchy về dãy số hội tụ, dãy  $S_n$  hội tụ khi và chỉ khi với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tìm được số nguyên dương  $n_0$  sao cho khi  $p > q \geq n_0$  ta có  $|S_p - S_q| = \left| \sum_{n=q+1}^p u_n \right| < \varepsilon$ .  $\square$

### 4.1.3 Tính chất của chuỗi số hội tụ.

- a) Nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ và có tổng là  $S$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ , trong đó  $\alpha$  là một hằng số, cũng hội tụ và có tổng là  $\alpha S$ .
- b) Nếu các chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ và có tổng là  $S$  và  $S'$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  cũng hội tụ và có tổng là  $S + S'$ .
- c) Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi ta thêm hoặc bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên.

## 4.2 Chuỗi số dương

### 4.2.1 Định nghĩa.

Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  được gọi là chuỗi số dương nếu  $u_n > 0$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Ta có  $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}, u_{n+1} > 0$  suy ra  $S_{n+1} > S_n$ . Vậy  $\{S_n\}$  là một dãy tăng.

Do đó nếu dãy số  $\{S_n\}$  bị chặn trên thì tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , khi đó chuỗi hội tụ. Nếu dãy số  $\{S_n\}$  không bị chặn thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , chuỗi phân kỳ.

### 4.2.2 Các định lý so sánh.

**Định lý 3.** (Quy tắc so sánh).

Cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ . Giả sử  $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ . Khi đó

a, Nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ thì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  cũng hội tụ.

b, Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ thì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  phân kỳ.

*Chứng minh.* Theo tính chất c của chuỗi số ở mục (3.1.4), ta có thể xem  $n_0 = 1$ . Đặt  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k, S'_n = \sum_{k=1}^n v_k$ . Do  $u_k \leq v_k$  với mọi  $k \geq 1$  suy ra  $S_n \leq S'_n$ .

a, Nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ và có tổng là  $S'$  thì  $S'_n \leq S'$  suy ra  $S_n \leq S'$  nên tổng riêng  $S_n$  bị chặn trên, do đó chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ.

b, Nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$  suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = +\infty$ , do đó chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  phân kỳ.  $\square$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số.

$$a, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n}}; b, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

*Giải.* a, Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n}}$  hội tụ, vì  $\frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot 3^n} \leq \frac{1}{3^n}$  với mọi  $n \geq 1$ , mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  hội tụ.

b, Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  phân kỳ, vì  $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n}$  với mọi  $n \geq 1$  và chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ.

**Định lý 4.** (Quy tắc tương đương). Cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ . Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0$  thì hai chuỗi số ấy đồng thời hội tụ hoặc đồng thời phân kỳ

*Chứng minh.* Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0$  nên bắt đầu từ một số hạng nào đó trở đi ta có

$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3k}{2}$$

Nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  cũng hội tụ vì  $u_n < \frac{3k}{2} v_n$ . Còn nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ vì  $u_n > \frac{k}{2} v_n$ .  $\square$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi số.

$$a, \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right); b, \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

*Giải.* a, Ta có  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$  suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ. Theo tiêu chuẩn tương đương chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  phân kỳ.

b, Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1$$

chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$  hội tụ, suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$  hội tụ.

### 4.2.3 Các quy tắc khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

**Định lý 5.** (Quy tắc D'Alembert.) Cho chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r \quad (4.1)$$

thì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ khi  $r < 1$ , phân kỳ khi  $r > 1$

*Chứng minh.* Thật vậy, giả sử  $r < 1$ . Chọn  $\varepsilon$  đủ bé để  $r + \varepsilon < 1$ . Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r$  nên tồn tại số nguyên dương  $n_0$  sao cho với  $n > n_0$  thì  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r + \varepsilon$ . Có thể xem  $n_0 = 1$ . Khi đó

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_2}{u_1} u_1 < (r + \varepsilon)^{n-1} \cdot u_1$$

Vì  $r + \varepsilon < 1$  nên chuỗi có số hạng tổng quát  $(r + \varepsilon)^{n-1} \cdot u_1$  hội tụ. Theo định lý so sánh, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ. Nếu  $r > 1$ , thì từ một số hạng nào đó trở đi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , do đó  $u_{n+1} > u_n$ , tức là số hạng tổng quát không dần tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$ , vậy chuỗi số phân kỳ.  $\square$

*Ví dụ.* Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Thật vậy, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{[(n+1)!]^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^\alpha} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\alpha-1} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\alpha-1}$$

Nếu  $\alpha > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ , chuỗi phân kỳ.

Nếu  $\alpha < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ , chuỗi hội tụ.

Nếu  $\alpha = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ , chuỗi hội tụ.

**Định lý 6.** (Quy tắc Cauchy.) Cho chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = r \quad (4.2)$$

thì chuỗi số hội tụ khi  $r < 1$ , phân kỳ khi  $r > 1$

*Ví dụ.* Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ , với  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$ .

Nếu  $\sin^2 \alpha < \frac{1}{2}$ , tức là  $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$  chuỗi hội tụ.

Nếu  $\sin^2 \alpha > \frac{1}{2}$ , tức là  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  chuỗi phân kỳ.

Nếu  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ , ta có chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , nó hội tụ.

**Định lý 7.** (Quy tắc so sánh với tích phân). Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục, dương, giảm trên khoảng  $[1, +\infty)$  và dần tới 0 khi  $x \rightarrow \infty$ . Khi đó tích phân suy rộng  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  và chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , trong đó  $u_n = f(n)$ , cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha$  là hằng số (Chuỗi Riemann).

Đặt  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , ta có  $f(x)$  liên tục, dương, đơn điệu giảm trên  $[1, +\infty)$  và  $u_n = f(n)$ , do đó chuỗi Riemann và tích phân suy rộng  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Ta đã biết tích phân  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  hội tụ khi  $\alpha > 1$ , phân kỳ khi  $\alpha \leq 1$ , nên chuỗi Riemann hội tụ khi  $\alpha > 1$  và phân kỳ khi  $\alpha \leq 1$ .

## 4.3 Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

### 4.3.1 Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ.

Xét chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  với các số hạng  $u_n$  bất kỳ.

**Định lý 8.** Nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  hội tụ thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  cũng hội tụ

*Chứng minh.* Thật vậy, vì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy, với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước, tìm được  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  sao cho khi  $p > q \geq n_0$  ta có  $\sum_{n=q+1}^p |u_n| < \varepsilon$ . Do đó

$$\left| \sum_{n=q+1}^p u_n \right| \leq \sum_{n=q+1}^p |u_n| < \varepsilon$$

Vậy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ. □

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ .

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Vì  $\frac{|\cos n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (Chuỗi Riemann với  $\alpha = 2$ ) hội tụ, nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$  hội tụ, do đó chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$  hội tụ.

*Chú ý.* Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ, chứ không phải là điều kiện cần.

### Định nghĩa.

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  hội tụ, là **bán hội tụ** nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ nhưng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  phân kỳ.

*Chú ý.* Nếu dùng quy tắc D'Alembert hay quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  phân kỳ thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  phân kỳ. Thật vậy, khi đó  $|u_n|$  không dần tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$ , do đó  $u_n$  cũng không dần tới 0, vậy chuỗi số phân kỳ.

### 4.3.2 Chuỗi số đan dấu.

Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng  $\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots)$ , trong đó  $u_1, u_2, u_3, \dots$  là những số dương. Rõ ràng ta chỉ cần xét chuỗi số đan dấu với số hạng đầu tiên dương:  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots$

**Định lý 9.** (Leibniz). Nếu dãy số dương  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  giảm và dần tới 0 khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi số đan dấu  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots$  hội tụ và có tổng bé thua  $u_1$

*Chứng minh.* Với  $n$  số chẵn,  $n = 2m$ , ta có

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

Do  $u_n$  giảm nên  $S_{2m}$  tăng khi  $m$  tăng. Mặt khác

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

do đó  $S_{2m} = u_1$ . Vậy dãy số  $S_{2m}$  tăng và bị chặn trên, nên tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ , với  $S \leq u_1$ .

Nếu  $n$  lẻ,  $n = 2m + 1$ , ta có  $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ . Vì  $u_{2m+1} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$  nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ . Vậy chuỗi số đan dấu hội tụ và có tổng bé thua  $u_1$ .  $\square$

*Ví dụ.* Xét chuỗi đan dấu  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ . Ta có các số hạng của chuỗi đơn điệu giảm và dần tới 0, do đó nó thỏa mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nên nó hội tụ. Mặt khác ta có  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ (chuỗi điều hòa). Vậy chuỗi đang xét bán hội tụ.

### 4.3.3 Các tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối.

Ta biết rằng tổng của một số hữu hạn số hạng có tính chất giao hoán và tính kết hợp: nó không thay đổi khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của nó hay khi nhóm một số hạng lại một cách tùy ý trước khi cộng. Nhưng điều đó không còn đúng đối với tổng của

một chuỗi các số hạng có dấu bất kỳ.

Ví dụ. Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .

Ta có

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (1)$$

Khi đó chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$  cũng hội tụ và có tổng là

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \quad (2)$$

Nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \right]$  cũng hội tụ và có tổng là

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \quad (3)$$

Nhưng chuỗi số (3) lại suy ra từ chuỗi số (1) bằng cách thay đổi thứ tự của các số hạng.

Vậy khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của nó, tổng của nó đã thay đổi.

Tuy nhiên tính chất giao hoán và tính chất kết hợp vẫn đúng với các chuỗi số hội tụ tuyệt đối. Người ta chứng minh được các tính chất sau:

### Tính chất 1.

Với chuỗi hội tụ tuyệt đối, tính hội tụ và tổng của nó không thay đổi khi ta thay đổi thứ tự các số hạng và nhóm tùy ý một số số hạng.

Với chuỗi số bán hội tụ, ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của nó để nhận được chuỗi số hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước, hoặc trở nên phân kỳ.

### Định nghĩa.

Cho hai chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ , người ta gọi tích của chúng là chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ , trong đó  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

### Tính chất 2.

Nếu hai chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  hội tụ tuyệt đối và có tổng là  $U$  và  $V$  thì tích của chúng hội tụ tuyệt đối và có tổng là  $U.V$ .



## 4.4 Chuỗi hàm số

### 4.4.1 Hội tụ và hội tụ đều.

Tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (4.3)$$

trong đó  $u_n(x)$  là các hàm số xác định trên tập hợp  $X \subset \mathbb{R}$ , được gọi là chuỗi hàm số.  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  được gọi là tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi hàm.

#### Định nghĩa 1.

Chuỗi hàm số (4.3) được gọi hội tụ tại điểm  $x_0 \in X$  nếu dãy hàm số  $\{S_n(x)\}$  hội tụ tại điểm  $x_0$  và được gọi là hội tụ trên tập  $X$  nếu nó hội tụ tại mọi điểm thuộc  $X$ . Giới hạn  $S$  của  $\{S_n(x)\}$  gọi là tổng của chuỗi.

Ví dụ 1. Xét chuỗi hàm số

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

là cấp số nhân vô hạn công bội  $x$ , nó hội tụ và có tổng là  $S(x) = \frac{x}{1-x}$  nếu  $|x| < 1$ . Do đó

$$S(x) = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots \text{ với } -1 < x < 1$$

Ví dụ 2. Xét chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2}$ . Ta có

$$\left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| = \frac{|\sin nx|}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 3. Xét chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Với  $x = 0$  chuỗi hội tụ.

Với  $x \neq 0$  áp dụng quy tắc D'Alembert cho chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$  ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n (n+1)!} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

Vậy chuỗi hàm số hội tụ tuyệt đối với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Định nghĩa 2.

Chuỗi hàm số (4.3) được gọi là hội tụ đều trên  $X$  đến hàm  $S(x)$  nếu dãy hàm số  $\{S_n(x)\}$  hội tụ đều tới  $S(x)$  trên  $X$ , nghĩa là với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại số  $n_0 \in \mathbb{N}$  sao cho

với mọi  $n \geq n_0$  thì  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$ .

Ví dụ. Xét chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ , đó là chuỗi đan dấu thỏa mãn điều kiện của định lý Leibniz, do đó nó hội tụ với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Phần dư thứ  $n$  của chuỗi cũng là chuỗi đan dấu thỏa mãn điều kiện của định lý Leibniz nên có tổng nhỏ thua trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên, ta có

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n + 1}$$

Nếu  $\frac{1}{n + 1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$  thì  $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ .

Chọn  $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ , phần nguyên của  $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ , rõ ràng  $n_0$  không phụ thuộc vào  $x \in \mathbb{R}$ . Vậy chuỗi hàm số trên hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ .

#### 4.4.2 Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm số.

**Định lý 10.** (Tiêu chuẩn Cauchy). Chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ đều trên tập  $X$  khi và chỉ khi với mọi  $\varepsilon > 0$ , tìm được số nguyên  $n_0$  sao cho khi  $p > q > n_0$  ta có

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$$

**Định lý 11.** (Tiêu chuẩn Weierstrass). Cho chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  thỏa mãn  $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$  và chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ. Khi đó chuỗi hàm đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên tập  $X$

*Chứng minh.* Áp dụng định lý so sánh cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  suy ra chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ tuyệt đối trên  $X$ . Mặt khác ta có chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ, theo định lý Cauchy, với mọi  $\varepsilon > 0$ , tìm được số  $n_0$  sao cho khi  $p > q > n_0$  ta có  $\sum_{n=q+1}^p a_n < \varepsilon$ .

Do đó

$$|S_p(x) - S_q(x)| = |u_{q+1}(x) + \dots + u_p(x)| \leq |u_{q+1}(x)| + \dots + |u_p(x)| \leq a_{q+1} + \dots + a_p < \varepsilon$$

Vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên  $X$ . □

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi hàm:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$

Ta có:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall n, \forall x \in \mathbb{R}$$

mà chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên  $\mathbb{R}$  (theo tiêu chuẩn Weierstrass).