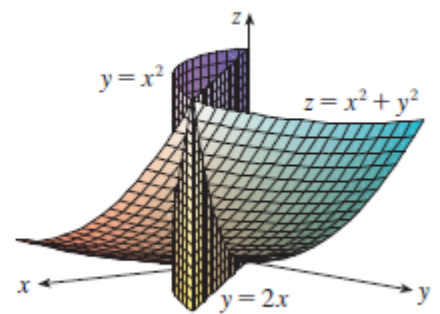
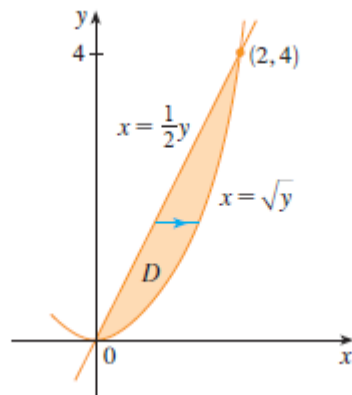
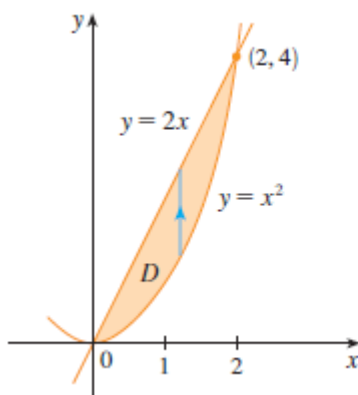
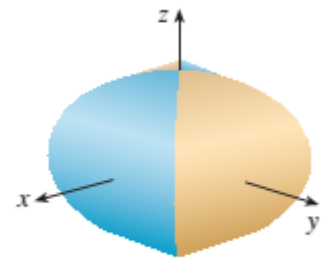
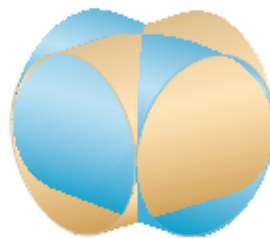
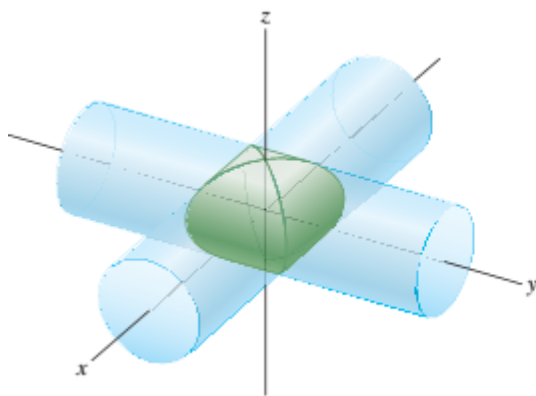


TS. BÙI THANH DUY

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

Trường Đại học Kiến trúc thành phố Hồ Chí Minh

TOÁN CAO CẤP 3



Mục lục

1	TÍCH PHÂN BỘI HAI	1
1.1	GIỚI THIỆU	1
1.2	CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN	4
1.3	PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BỘI HAI	4
1.4	CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN SỐ	8
1.5	ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI HAI	11
1.6	BÀI TẬP	14
2	TÍCH PHÂN BỘI BA	15
2.1	GIỚI THIỆU	15
2.2	CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN	17
2.3	PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BỘI BA	17
2.4	CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN SỐ	20
2.5	ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI BA	22
3	TÍCH PHÂN ĐƯỜNG	24
3.1	TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1	24
3.2	GIỚI THIỆU	24
3.3	CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN	25
3.4	PHƯƠNG PHÁP TÍNH	26
3.5	ỨNG DỤNG	26
3.6	TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2	28
3.7	BÀI TOÁN DẪN ĐẾN TÍNH TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2	28
3.8	CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN	29

3.9	ỨNG DỤNG	30
4	TÍCH PHÂN MẶT	32
4.1	TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1	32
4.2	BÀI TOÁN DẪN ĐẾN TÍNH TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1	32
4.3	CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN	33
4.4	PHƯƠNG PHÁP TÍNH	33
4.5	ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1	34
4.6	TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2	35
4.7	MẶT CONG ĐỊNH HƯỚNG	35
4.8	BÀI TOÁN TÍNH LƯU LƯỢNG CỦA DÒNG CHẢY QUA MỘT MẶT CONG ĐỊNH HƯỚNG	36
4.9	ĐỊNH NGHĨA	36
4.10	PHƯƠNG PHÁP TÍNH	37

Chương 1

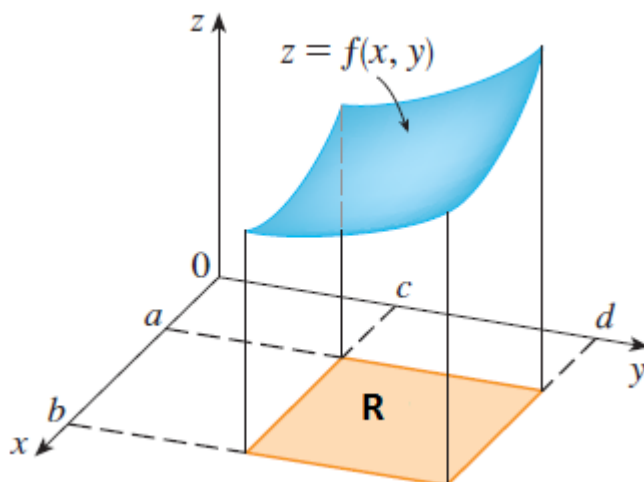
TÍCH PHÂN BỘI HAI

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

trong đó $f(x, y)$ là một hàm hai biến xác định trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$. $dx dy$ gọi là yếu tố diện tích.

1.1 GIỚI THIỆU

Cho $R = [a, b] \times [c, d]$ và hàm số $f(x, y)$ xác định trên R . Giả sử $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$ và có đồ thị là một mặt cong (S) nằm phía trên (Oxy) . Xét vật thể (Ω) bị giới hạn trên bởi (S) , giới hạn dưới bởi (Oxy) và bị giới hạn xung quanh bởi mặt trụ song song với trục Oz có đường chuẩn là biên của miền R . Bài toán đặt ra là làm thế nào để xác định được thể tích V của vật thể này.



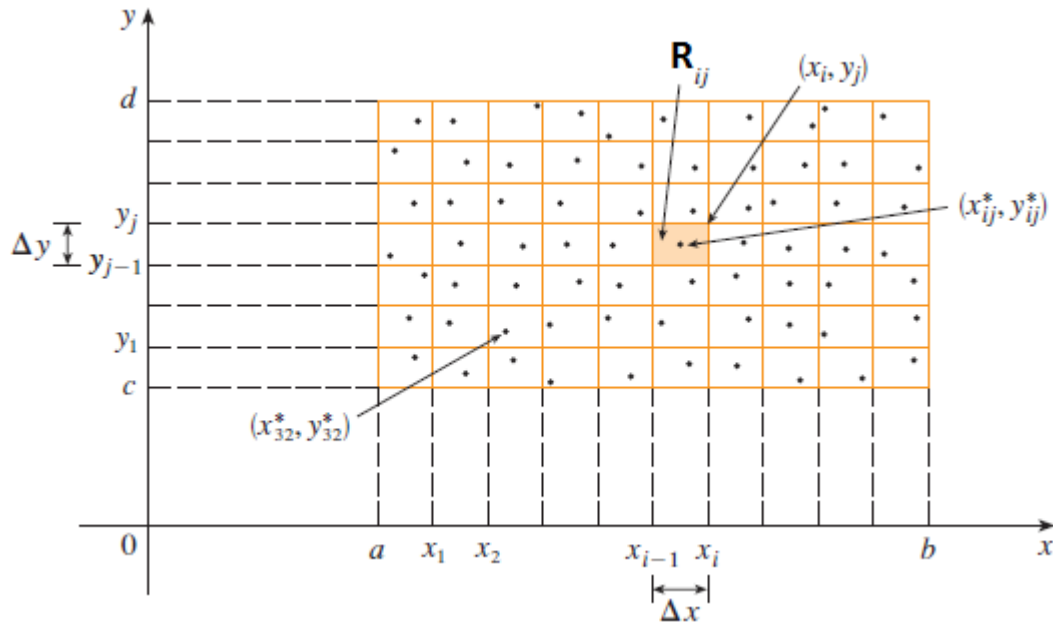
Để giải bài toán này người ta làm như sau

1. Chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn bằng nhau $[x_{i-1}, x_i]$ có độ dài $\Delta x = (b - a)/m$. Chia đoạn $[c, d]$ thành n đoạn bằng nhau $[y_{i-1}, y_i]$ có độ dài $\Delta y = (d - c)/n$. Khi đó hình chữ nhật R được

chia thành những hình chữ nhật nhỏ R_{ij} có dạng

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

có diện tích là $\Delta x \Delta y = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$.



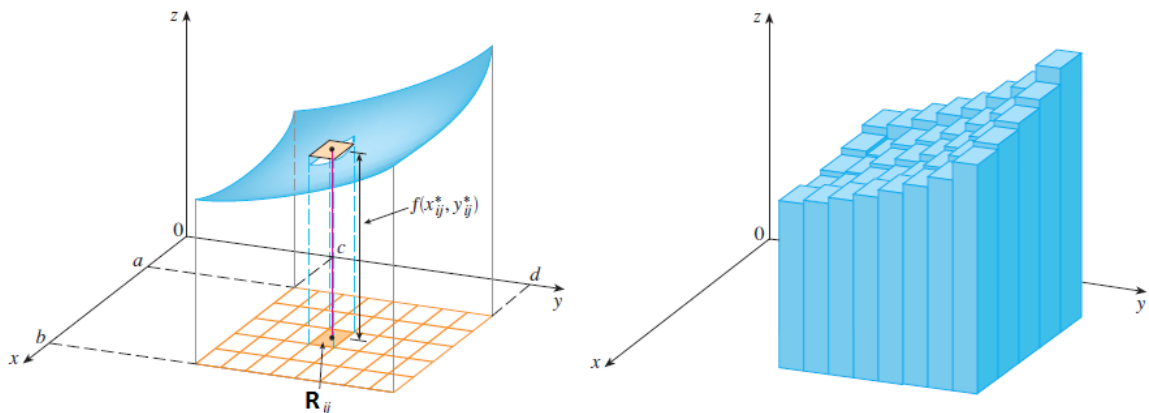
2. Tại ô R_{ij} ta tính thể tích hình hộp chữ nhật có đáy R_{ij} chiều cao $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, (với (x_{ij}^*, y_{ij}^*) tùy ý thuộc ô R_{ij}), cụ thể bằng

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

3. Dựng các khối trụ có đáy R_{ij} quét khắp R . Tổng thể tích các khối này gần bằng thể tích khối cần tìm. Tính tổng thể tích của dãy hình trụ thì ta được thể tích $\mathcal{V}_{mn}$ như sau

$$\mathcal{V}_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Thể tích này xấp xỉ gần bằng thể tích V của vật thể ban đầu.



4. Độ chính xác càng cao tức xấp xỉ càng tốt khi lưới được chia dày đặc hơn, hay m, n đủ lớn. Khi đường kính lớn nhất của các miền R_{ij} dần tới 0, tức là $m, n \rightarrow +\infty$ thì $\mathcal{V}_{mn}$ dần tới một giới hạn. Giới hạn này chính là thể tích V của vật thể ban đầu và bài toán đặt ra đã được giải. Vậy

$$V = \lim_{m,n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{mn} = \lim_{m,n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

Từ bài toán này người ta xây dựng định nghĩa tích phân bội hai cũng tương tự như vậy nhưng lúc này hàm f có dấu bất kì trên miền R . Ta có định nghĩa sau:

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên hình chữ nhật R . Nếu

$$\lim_{m,n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta x \Delta y \right)$$

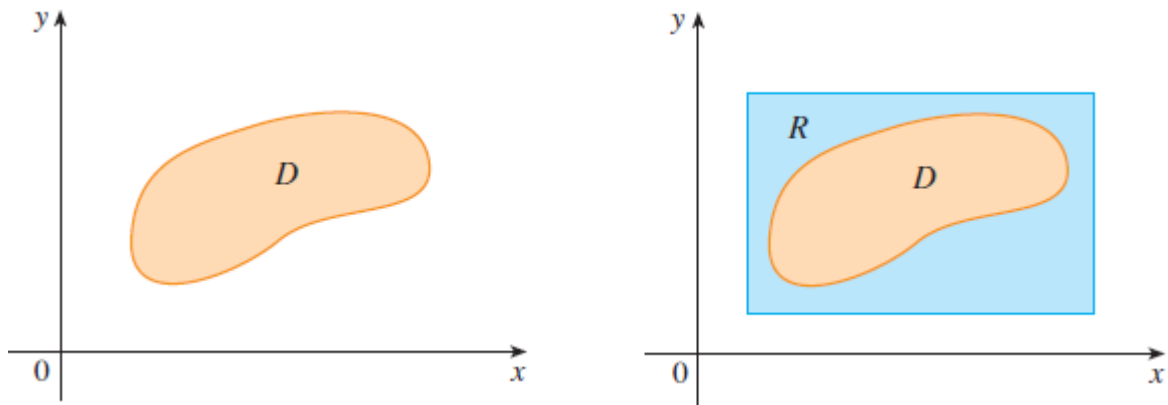
tồn tại thì giới hạn này được gọi là tích phân bội hai của f trên R , ký hiệu là $\iint_R f(x, y) dx dy$. Vậy

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m,n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta x \Delta y \right).$$

Như vậy trong trường hợp hàm $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in R$ thì thể tích của vật thể (Ω) được chính là tích phân bội hai của f trên R , tức là

$$V = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Để khảo sát tích phân $\iint_D f(x, y) dx dy$ trên miền D bất kỳ (hình bên dưới)



ta mở rộng hàm f xác định trên hình chữ nhật R bao quanh D bằng hàm F sau đây

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases} \quad (\text{Equation 1})$$

Nếu F có tích phân trên R thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy.$$

1.2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Ta có một vài tính chất cơ bản của tích phân bội hai như sau

1.

$$\begin{aligned}\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy &= \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy. \\ \iint_D A f(x, y) dx dy &= A \iint_D f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

2. Nếu D chia thành hai miền $D = D_1 \cup D_2$ trong đó D_1, D_2 không trùng lấp lên nhau thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3. Nếu $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

1.3 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BỘI HAI

Xét tích phân

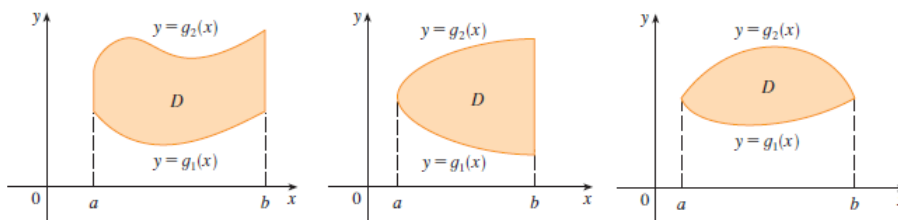
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Ta chia D thành các trường hợp sau.

1. Nếu $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (Miền hình chữ nhật) thì

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

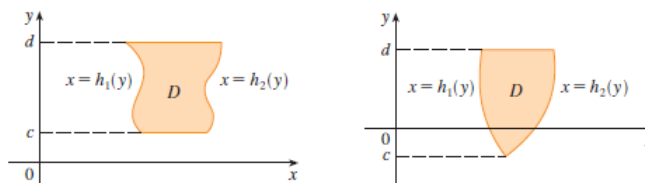
2. Nếu D là miền loại 1, tức là $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$



thì

$$I = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

3. Nếu $D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ (Miền loại 2)



thì

$$I = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Ta xem giải thích về công thức 2 trong tài liệu Calculus của James Stewart như sau.

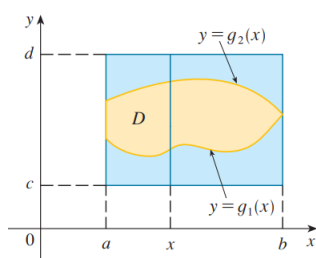


FIGURE 6

In order to evaluate $\iint_D f(x, y) dA$ when D is a region of type I, we choose a rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ that contains D , as in Figure 6, and we let F be the function given by Equation 1; that is, F agrees with f on D and F is 0 outside D . Then, by Fubini's Theorem,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Observe that $F(x, y) = 0$ if $y < g_1(x)$ or $y > g_2(x)$ because (x, y) then lies outside D . Therefore

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

Chứng minh tương tự cho công thức 3.

Ví dụ:

1. Tính tích phân

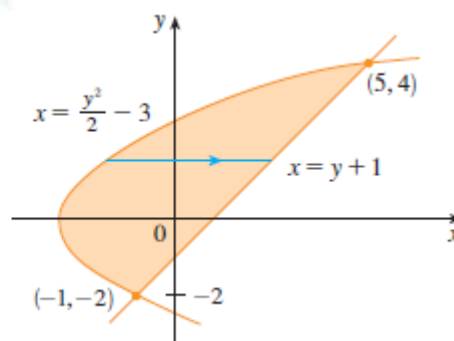
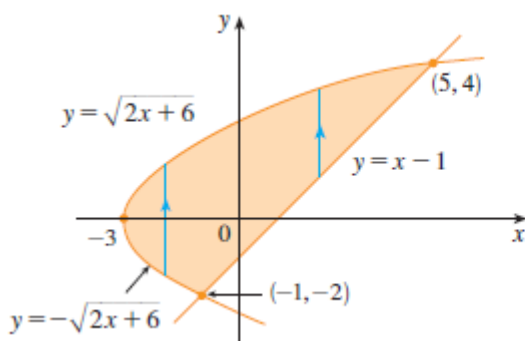
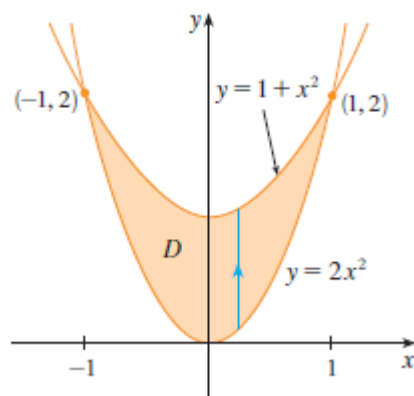
$$I = \iint_D (x + 2y) dx dy$$

với D giới hạn bởi đường cong $y = 2x^2$; $y = 1 + x^2$. Đáp số $I = \frac{32}{15}$.

2. Tính tích phân

$$I = \iint_D xy dx dy$$

trong đó D giới hạn bởi đường cong $y = x - 1$; $y^2 = 2x + 6$. Đáp số $I = 36$.



15.2 EXERCISES

1-2 Find $\int_0^5 f(x, y) dx$ and $\int_0^1 f(x, y) dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$ 2. $f(x, y) = y + xe^y$

3-14 Calculate the iterated integral.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$ 4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2) dy dx$
 5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \sin y dy dx$ 6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y dx dy$
 7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8 dx dy$ 8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$
 9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$ 10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y} dx dy$
 11. $\int_0^1 \int_0^1 (u - v)^5 du dv$ 12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$
 13. $\int_0^2 \int_0^\pi r \sin^2 \theta d\theta dr$ 14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t} ds dt$

15-22 Calculate the double integral.

15. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$
 16. $\iint_R \cos(x + 2y) dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
 17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$

18. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

19. $\iint_R x \sin(x + y) dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1+xy} dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R xye^{x^2y} dA$, $R = [0, 1] \times [0, 2]$

22. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} dA$, $R = [1, 2] \times [0, 1]$

23-24 Sketch the solid whose volume is given by the iterated integral.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dy dx$

25. Find the volume of the solid that lies under the plane $3x + 2y + z = 12$ and above the rectangle $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3\}$.

26. Find the volume of the solid that lies under the hyperbolic paraboloid $z = 4 + x^2 - y^2$ and above the square $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.



Exercises

1-6 ■ Evaluate the iterated integral.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$

2. $\int_1^2 \int_y^2 xy dx dy$

3. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x} dx dy$

4. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y) dy dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} du dv$

7-16 ■ Evaluate the double integral.

7. $\iint_D x^3 y^2 dA, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$

8. $\iint_D \frac{4y}{x^3 + 2} dA, D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$

9. $\iint_D \frac{2y}{x^2 + 1} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

10. $\iint_D e^{y^2} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

11. $\iint_D x \cos y dA, D$ is bounded by $y = 0, y = x^2, x = 1$

12. $\iint_D x \sqrt{y^2 - x^2} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

13. $\iiint_D y^3 dA,$

 D is the triangular region with vertices $(0, 2), (1, 1),$ and $(3, 2)$

14. $\iint_D (x + y) dA, D$ is bounded by $y = \sqrt{x}, y = x^2$

15. $\iint_D (2x - y) dA,$

 D is bounded by the circle with center the origin and radius 2

16. $\iint_D ye^x dA, D$ is the triangular region with vertices $(0, 0), (2, 4),$ and $(6, 0)$

17-24 ■ Find the volume of the given solid.

17. Under the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and above the region bounded by $y = x^2$ and $x = y^2$ 18. Under the paraboloid $z = 3x^2 + y^2$ and above the region bounded by $y = x$ and $x = y^2 - y$ 19. Under the surface $z = xy$ and above the triangle with vertices $(1, 1), (4, 1),$ and $(1, 2)$ 20. Bounded by the paraboloid $z = x^2 + y^2 + 4$ and the planes $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$ 21. Bounded by the planes $x = 0, y = 0, z = 0,$ and $x + y + z = 1$

Bài tập:

1. Tính

$$I = \iint_D x e^{xy} dx dy,$$

trong đó D là hình chữ nhật $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$.

2. Tính

$$I = \iint_D x \sin y dx dy,$$

trong đó D là hình tam giác OAB với $A(\pi, 0), B(\pi, \pi)$.

3. Tính

$$I = \iint_D (x^2 y - 2xy) dx dy,$$

trong đó D là hình chữ nhật $x \in [0, 3], y \in [-2, 0]$.

4. Tính

$$I = \iint_D y e^{xy} dx dy,$$

trong đó D là miền bị giới hạn bởi các đường $y = 1; y = 4; x = 0; xy = 1$