

TS. BÙI THANH DUY

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

Trường Đại học Kiến trúc thành phố Hồ Chí Minh

Tailieu.vn

TOÁN CAO CẤP 1

Mục lục

1	HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN HÀM SỐ	1
1.1	ÁNH XẠ	1
1.1.1	Định nghĩa	1
1.1.2	Các loại ánh xạ	1
1.2	DÃY SỐ	1
1.2.1	Định nghĩa	1
1.2.2	Ví dụ	2
1.3	HÀM SỐ	2
1.3.1	Định nghĩa	2
1.3.2	Ví dụ về các hàm sơ cấp cơ bản	2
1.3.3	Hàm sơ cấp	3
1.4	GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	3
1.4.1	Định nghĩa	3
1.4.2	Các tính chất cơ bản	4
1.4.3	Một số kết quả thông dụng	4
1.4.4	Tính giới hạn của một dãy số	5
1.5	GIỚI HẠN HÀM SỐ	6
1.5.1	Định nghĩa	6
1.5.2	Các tính chất cơ bản	8
1.5.3	Giới hạn một bên	8
1.5.4	Các dạng vô định khi tính giới hạn của hàm số	9
1.5.5	Quy tắc L'Hospital	11
1.6	BÀI TẬP CHƯƠNG 1	11

2	BỔ SUNG VỀ ĐẠO HÀM HÀM MỘT BIẾN	15
2.1	ĐẠO HÀM	15
2.1.1	Đạo hàm của hàm số tại một điểm	15
2.1.2	Đạo hàm bên trái và bên phải	15
2.1.3	Đạo hàm của hàm số trên một khoảng và trên một đoạn	16
2.2	SỰ KHẢ VI	16
2.2.1	Mối liên hệ giữa tính khả vi và đạo hàm	16
2.2.2	Vi phân	16
2.3	ĐẠO HÀM HÀM HỢP	17
2.4	ĐẠO HÀM HÀM NGƯỢC	17
2.5	ĐẠO HÀM CẤP CAO	17
2.6	CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI	18
2.7	BÀI TẬP CHƯƠNG 2	18
2.8	BÀI ĐỌC THÊM	19
2.9	CÁC BÀI TOÁN ĐƯỢC KHẢO SÁT	20
3	TÍCH PHÂN SUY RỘNG	32
3.1	ĐIỂM GIÁN ĐOẠN CỦA HÀM SỐ	32
3.2	TÍCH PHÂN SUY RỘNG	32
3.2.1	Tích phân suy rộng loại 1	33
3.2.2	Tích phân suy rộng loại 2	35
3.3	Bảng Nguyên Hàm Của Một Số Hàm Cơ Bản	37
3.4	BÀI TẬP CHƯƠNG 3	38
4	HÀM NHIỀU BIẾN	41
4.1	TÍCH DESCARTES VÀ KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$	41
4.1.1	Tích Descartes	41
4.1.2	Không gian $\mathbb{R}^n$	41
4.2	HÀM NHIỀU BIẾN	41
4.3	GIỚI HẠN CỦA HÀM HAI BIẾN	42
4.3.1	Định nghĩa	42

4.3.2	Định lí	42
4.4	HÀM SỐ LIÊN TỤC	42
4.5	ĐẠO HÀM RIÊNG	43
4.6	ĐẠO HÀM CẤP CAO	44
4.7	SỰ KHẢ VI	45
4.7.1	Định nghĩa	45
4.7.2	Định lí	45
4.7.3	Vi phân toàn phần	45
4.8	ĐẠO HÀM HÀM HỢP	46
4.9	ĐẠO HÀM HÀM ẨN	46
4.9.1	Hàm ẩn	46
4.9.2	Đạo hàm hàm ẩn	47
4.10	CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN	47
4.10.1	Định nghĩa	47
4.10.2	Thuật toán tìm cực trị (tự do) của hàm hai biến	47
4.11	BÀI TẬP CHƯƠNG 4	48
5	MA TRẬN, ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	52
5.1	MA TRẬN	52
5.1.1	Định nghĩa	52
5.1.2	Các loại ma trận	52
5.2	CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN	53
5.2.1	Phép nhân hai ma trận	53
5.2.2	Lũy thừa ma trận	53
5.3	CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG	53
5.4	MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO	54
5.4.1	Định nghĩa	54
5.4.2	Cách tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng	54
5.5	HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	54
5.5.1	Ma trận bậc thang	54
5.5.2	Hạng của ma trận	54

5.5.3	Hệ phương trình tuyến tính	54
5.6	ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG	55
5.6.1	Định nghĩa	55
5.6.2	Các tính chất	55
5.6.3	Cách tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức	56
5.7	BÀI TẬP CHƯƠNG 5	56

Tailieu.vn

Chương 1

HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

1.1 ÁNH XẠ

1.1.1 Định nghĩa

Cho hai tập hợp E và F , ta gọi một ánh xạ từ tập E vào tập F là một quy luật tương ứng f sao cho với mỗi phần tử $x \in E$, có duy nhất một phần tử $y \in F$ được xác định bởi $y = f(x)$. Ta thường ký hiệu ánh xạ đó là $f : E \rightarrow F$.

1.1.2 Các loại ánh xạ

Cho ánh xạ $f : E \rightarrow F$. Ta nói

1. f là một đơn ánh nếu với mọi $y \in F$, có nhiều nhất một $x \in E$ sao cho $y = f(x)$.
2. f là một toàn ánh nếu với mọi $y \in F$, có ít nhất một $x \in E$ sao cho $y = f(x)$.
3. f là một song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.
4. Cho ánh xạ $f : E \rightarrow F$ và ánh xạ $g : F \rightarrow G$. Ta nói ánh xạ $h = g \circ f$ là ánh xạ hợp của g và f nếu với mọi $x \in E$, tồn tại duy nhất $z \in G$ được xác định bởi $z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
5. Cho ánh xạ $f : E \rightarrow F$ là một song ánh lúc này và ánh xạ $g : F \rightarrow E$ cũng là một song ánh sao cho với mọi $y \in F$, tồn tại duy nhất $x \in E$ được xác định bởi $x = g(y)$ với $y = f(x)$. g được gọi là ánh xạ ngược của f ký hiệu là $g = f^{-1}$.

1.2 DÃY SỐ

1.2.1 Định nghĩa

Cho ánh xạ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Với $n = 1, 2, 3, \dots$. Ta có các giá trị $f(1), f(2), f(3), \dots$ lập thành một dãy các số thực và ta nói đây là một dãy số thực. Nếu đặt $x_n = f(n)$, ta có dãy số $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, ký hiệu là $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hay $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2.2 Ví dụ

Cho dãy số (x_n) với x_n như sau

$x_n = 1$, ta có dãy $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$

$x_n = (-1)^n$, ta có dãy $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$

$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$, ta có dãy $0, 1, 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{n}, \dots$

1.3 HÀM SỐ

1.3.1 Định nghĩa

Một hàm số f là một ánh xạ đi từ một tập con D của $\mathbb{R}$ vào chính nó. D được gọi là miền xác định của hàm số và tập $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ gọi là miền giá trị của hàm số. Phần tử $x \in D$ gọi là biến số của hàm.

1.3.2 Ví dụ về các hàm sơ cấp cơ bản

Hàm lũy thừa

Là hàm số có dạng $y = f(x) = x^\alpha$ trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$. Hàm số này có miền xác định phụ thuộc vào α . Ví dụ như:

Nếu $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ thì miền xác định là $D = \mathbb{R}$.

Nếu $\alpha = -1, -2, \dots$ thì miền xác định là $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Nếu $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ thì miền xác định là $D = [0, +\infty)$.

Nếu $\alpha = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ thì miền xác định là $D = (0, +\infty)$.

Nếu $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ thì miền xác định là $D = \mathbb{R}$.

Nếu $\alpha = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$ thì miền xác định là $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Nếu α là số vô tỉ và $\alpha > 0$ thì $D = [0, +\infty)$, $\alpha < 0$ thì $D = (0, +\infty)$.

Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $D = (0, +\infty)$.

Hàm mũ

Là hàm số có dạng $y = f(x) = a^x$ trong đó $0 < a \neq 1$. Hàm số này có miền xác định là $D = \mathbb{R}$ và miền giá trị $f(D) = (0, +\infty)$. Hàm số tăng khi $a > 1$ và giảm khi $a \in (0, 1)$.

Hàm logarit

Là hàm số có dạng $y = f(x) = \log_a x$ trong đó $0 < a \neq 1$. Hàm số này có miền xác định là $D = (0, +\infty)$ và miền giá trị $f(D) = \mathbb{R}$. Hàm số tăng khi $a > 1$ và giảm khi $a \in (0, 1)$.

Các hàm lượng giác

$$y = f(x) = \sin x, y = f(x) = \cos x, y = f(x) = \tan x, y = f(x) = \cot x.$$

Các hàm lượng giác ngược

1. Hàm số $y = \arcsin x$. Hàm số này có miền xác định $D = [-1, 1]$ và miền giá trị $R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Với mọi $x \in (-1, 1)$, ta có $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Hàm số $y = \arccos x$. Hàm số này có miền xác định $D = [-1, 1]$ và miền giá trị $R = [0, \pi]$.

Với mọi $x \in (-1, 1)$, ta có $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Hàm số $y = \arctan x$. Hàm số này có miền xác định $D = \mathbb{R}$ và miền giá trị $R = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$. Hàm số này có miền xác định $D = \mathbb{R}$ và miền giá trị $R = (0, \pi)$. Với

mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

5. Chú ý:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y,$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,$$

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y.$$

1.3.3 Hàm sơ cấp

Hàm sơ cấp là những hàm được tạo ra từ một số hữu hạn các phép lấy tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

1.4 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**1.4.1 Định nghĩa**

Cho dãy số $(x_n) : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$. Ta nói số $L \in \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy số này nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ đủ bé cho trước, tồn tại số $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi chỉ số $n \geq n_\varepsilon$, ta có $|x_n - L| < \varepsilon$. Lúc này ta ký hiệu $L = \lim x_n$. Nói một cách dễ hiểu hơn, số $L \in \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy số (x_n) nếu $|x_n - L|$ tiến về 0 khi n tiến ra vô cùng.

Cho dãy số (x_n) , ta nói dãy số này có giới hạn là dương vô cùng hay dần tới dương vô cùng nếu với mọi số $M > 0$ đủ lớn cho trước, tồn tại số $n_M \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi chỉ số $n \geq n_M$, ta có

$x_n \geq M$. Lúc này ta viết $\lim x_n = +\infty$.

Cho dãy số (x_n) , ta nói dãy số này có giới hạn là âm vô cùng hay dần tới âm vô cùng nếu với mọi số $M < 0$ sao cho $|M|$ đủ lớn cho trước, tồn tại số $n_M \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi chỉ số $n \geq n_M$, ta có $x_n \leq M$. Lúc này ta viết $\lim x_n = -\infty$.

Ví dụ: Xét dãy số (x_n) , $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Nhận xét rằng khi n càng lớn thì $\frac{1}{n}$ càng nhỏ nên x_n tiến gần về 1. Do vậy ta sẽ chứng minh giới hạn của dãy số trên là 1. Thật vậy, ta xét $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$. Với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước, theo định nghĩa, để $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ thì $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Như vậy chọn $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$) thì với mọi $n \geq n_\varepsilon$, ta được $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tóm lại, với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước, tồn tại số $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ sao cho với mọi $n \geq n_\varepsilon$, ta có $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Vậy $\lim x_n = 1$.

1.4.2 Các tính chất cơ bản

1. $\lim A = A$, trong đó A là hằng số.
2. Cho $\lim x_n = A, \lim y_n = B$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có
 - (a) $\lim(x_n + \alpha y_n) = A + \alpha B$.
 - (b) $\lim x_n \lim y_n = AB$.
 - (c) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ với $B \neq 0$.
 - (d) Nếu $\lim x_n = A, \lim y_n = \infty$ thì $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.
 - (e) Nếu $\lim x_n = A, \lim y_n = 0$ thì $\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$.
3. $\lim \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.
4. Cho $P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$, ta có $\lim P_k(n) = \lim a_k n^k$.
5. $\lim \alpha^n = 0$ nếu $|\alpha| < 1$.

1.4.3 Một số kết quả thông dụng

1. Cho dãy số (x_n) . Nếu tồn tại hai dãy số $(y_n), (z_n)$ và số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $y_n \leq x_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$ đồng thời $\lim y_n = \lim z_n = L$ thì $\lim x_n = L$.
2. Nếu $\lim x_n = L$ thì $\lim x_{n+k} = L, \forall k \in \mathbb{Z}$.
3. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$,
4. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

5. Với $p > 0$, ta có $\lim \sqrt[n]{p} = 1$,
6. Với $p > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$
7. Với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{n^\alpha}{n!} = 0$,
8. Với $x \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$.

1.4.4 Tính giới hạn của một dãy số

Trong chương trình phổ thông, khi tính giới hạn của một dãy số ta thường gặp hai dạng vô định sau đây

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty.$$

Lúc này, ta không thể xác định được liệu là giới hạn đang xét có tồn tại hay không do đó phải tìm cách khử các dạng vô định này đi. Có nhiều phương pháp để khử các dạng vô định như: Quy đồng mẫu số, nhân lượng liên hợp, đặt thừa số chung, đặt ẩn phụ, dùng các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn, dùng các giới hạn cơ bản... Sau đây, ta nhắc lại một vài ví dụ cho hai dạng vô định này.

Dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Đây là dạng vô định thường gặp khi ta tính các giới hạn dạng phân thức, phương pháp chung là rút n có số mũ cao nhất nằm dưới mẫu ở trên tử lẫn dưới mẫu.

Ví dụ:

1. Tính $L_1 = \lim \frac{2n^5 - 3n^3 + n^2 + 1}{n^5 + 1}$.

$$L_1 = \lim \frac{n^5 \left(2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} \right)}{n^5 \left(1 + \frac{1}{n^5} \right)} = \lim \frac{2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5}}{1 + \frac{1}{n^5}} = 2.$$
2. Tính $L_2 = \lim \frac{\sqrt{n^3 + 2n + 1} + n^2 - 2}{n^2 + 2n + 3}$.

$$L_2 = \lim \frac{n^2 \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} - \frac{2}{n^4} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} - \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = 0.$$
3. Tính $L_3 = \lim \frac{n^3}{-n^2 + 1}$.

$$L_3 = \lim \frac{n^3}{n^2 \left(-1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{n}{-1 + \frac{1}{n^2}} = -\infty.$$

Dạng $\infty - \infty$. Để giải quyết dạng này ta thường đặt thừa số chung hoặc đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách nhân lượng liên hợp. Ta xem các trường hợp thường gặp sau đây.

Ví dụ:

1. Tính $L_4 = \lim \left(\sqrt{4n^2 + n + 1} - n \right).$

$$L_4 = \lim n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = +\infty.$$

2. Tính $L_5 = \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right).$

$$L_5 = \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) = \lim n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = 0$$

Cách làm trên sai vì dấu bằng thứ 2, giới hạn cần tính có dạng $0 \cdot \infty$ và đây cũng là một dạng vô định. Do đó, ta phải làm lại như sau

$$L_5 = \lim \frac{(n^2 + n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

3. Tính $L_6 = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - n \right).$

$$\begin{aligned} L_6 &= \lim \frac{n^2 + 1}{\left\{ \sqrt[3]{(n^3 + n^2 + 1)^2} \right\} + n \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} + n^2} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\left\{ \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2} \right\} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1.5 GIỚI HẠN HÀM SỐ

1.5.1 Định nghĩa

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và điểm $x_0 \in \mathbb{R}$. Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của hàm số nếu với mọi $h > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $(x_0 - h, x_0 + h) \setminus \{x_0\} \cap D \neq \emptyset$.

Giả sử x_0 là một điểm tụ của D , hàm số f được gọi là có giới hạn hữu hạn L khi x tiến về x_0 nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước, tồn tại số $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ thỏa $0 < |x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon)$, ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lúc này ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Nói một cách dễ hiểu hơn, hàm số f có giới hạn hữu hạn là L khi x tiến về x_0 ($x \neq x_0$) nếu $|f(x) - L| \rightarrow 0$ khi $|x - x_0| \rightarrow 0$.

Ví dụ: Ta xét hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ và tính giá trị của hàm số này tại các điểm x gần 2 như sau.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.5	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Ta thấy khi x gần bằng 2 thì giá trị hàm $f(x)$ gần bằng 4. Vậy ta có thể nói "4 là giới hạn hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ khi x tiến tới 2" và viết $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$.

Ta minh họa thêm bằng một ví dụ khác. Dự đoán giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$. Ta có bảng giá trị sau

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975

Hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ không xác định tại $x = 1$, nhưng vẫn có giới hạn tại 1, cụ thể khi $x \approx 1$ thì $f(x) \approx 0.5$ từ bảng giá trị ta đoán $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$.

Hàm số f dần về dương vô cùng khi x tiến về x_0 nếu với mọi số $M > 0$ đủ lớn cho trước, tồn tại số $\delta(x_0, M) > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ thỏa $0 < |x - x_0| < \delta(x_0, M)$, ta có $f(x) > M$. Lúc này ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Hàm số f dần về âm vô cùng khi x tiến về x_0 nếu với mọi số $M < 0$ sao cho $|M|$ đủ lớn, tồn tại số $\delta(x_0, M) > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ thỏa $|x - x_0| < \delta(x_0, M)$, ta có $f(x) < M$. Lúc này ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Một hàm số f không có giới hạn hữu hạn khi x tiến về x_0 được hiểu theo hai nghĩa. Một là giới hạn này bằng vô cùng. Hai là giới hạn này hoàn toàn không có.

Ngoài ra, người ta còn định nghĩa giới hạn của một hàm số thông qua giới hạn của dãy số như sau. Cho hàm số f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$. Ta nói hàm số có giới hạn hữu hạn là L tại x_0 nếu với mọi dãy $(x_n) \subset D$ sao cho $\lim x_n = x_0$ ($x_n \rightarrow x_0$), ta có $\lim f(x_n) = L$ ($f(x_n) \rightarrow L$). Lúc này, ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Ví dụ: Dùng định nghĩa tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x+2}$. Giới hạn đang xét được viết lại như sau $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, trong

đó $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ xác định với mọi $x \neq -2$. Với mọi dãy $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa $\lim x_n = 2$, ta có

$f(x_n) = \frac{x_n^2-1}{x_n+2}$ và $\lim f(x_n) = \frac{2^2-1}{2+2} = \frac{3}{4}$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{4}$.

1.5.2 Các tính chất cơ bản

1. Giới hạn của một hàm số nếu có là duy nhất.
2. Giả sử f là một hàm sơ cấp có tập xác định là $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Lúc này $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ như sau $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{2^2 - 1}{2 + 2} = \frac{3}{4}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x^n} = 0$, trong đó C là hằng số và $n \in \mathbb{N}$.
4. **(Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn 1)** Giả sử các hàm số f, g, w xác định trên một lân cận của x_0 ngoại trừ x_0 và thỏa $g(x) \leq f(x) \leq w(x)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
5. **(Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn 2)** Giả sử các hàm số f xác định trên $[a, +\infty)$ với a là một số dương đủ lớn. Hơn nữa f là hàm đơn điệu tăng và tồn tại M sao cho $f(x) \leq M$. Lúc này $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ tồn tại.
6. Giả sử các hàm số f và g đều có giới hạn trong cùng một quá trình ($x \rightarrow x_0$ hay $x \rightarrow \pm\infty$). Trong quá trình đó, ta có
 - (a) $\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$.
 - (b) $\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x)$.
 - (c) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ nếu $\lim g(x) \neq 0$.

7. Các giới hạn cơ bản

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

8. (a) Nếu $f(x) > 0$ trên một lân cận của x_0 và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln[f(x)] = \ln\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = \ln L$.
- (b) Nếu $f(x) > 0$ trên một lân cận của x_0 và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = L^K.$$

1.5.3 Giới hạn một bên

Cho hàm số f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Ta nói hàm số có giới hạn bên trái là L tại x_0 nếu với mọi dãy $(x_n) \subset D$ sao cho $x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Lúc này, ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

2. Ta nói hàm số có giới hạn bên phải là L tại x_0 nếu với mọi dãy $(x_n) \subset D$ sao cho $x_n > x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Lúc này, ta viết $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

Từ định nghĩa ta suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ tồn tại và bằng nhau.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Ví dụ:

1. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$.

Hơn nữa, do $x \rightarrow 1^+$ nên $x - 1 > 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} = -\infty$.

2. Xét sự tồn tại của giới hạn tại x_0 của các hàm số sau

- (a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1, \\ -x^2 + 4, & x \geq 1 \end{cases}$ ($x_0 = 1$). Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$. Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = 3$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.
- (b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x_0 = 0$). Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$. Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x}{x} = -1$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ không tồn tại.

1.5.4 Các dạng vô định khi tính giới hạn của hàm số

Khi tính giới hạn của một hàm số ta cũng thường gặp các dạng vô định sau đây

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Lúc này, ta phải tìm cách khử các dạng vô định này đi. Có nhiều phương pháp để khử các dạng vô định như đã đề cập ở phần giới hạn của dãy số. Sau đây là một vài ví dụ minh họa.

Ví dụ:

1. Dạng $\frac{0}{0}$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2) = -3 - 2 = -5$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x + 8} + 3)(x - 1)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x + 8} + 3)(x + 3)} = \frac{1}{24}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt[3]{3x^2 + 5}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x + 3} - 2) - (\sqrt[3]{3x^2 + 5} - 2)}{x - 1} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 3} + 2)} - \frac{3(x^2 - 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{(3x^2 + 5)^2 + 2\sqrt[3]{3x^2 + 5} + 4})} \right) =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x + 3} + 2} - \frac{3(x + 1)}{\sqrt[3]{(3x^2 + 5)^2 + 2\sqrt[3]{3x^2 + 5} + 4}} \right) = -\frac{1}{4}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(x-1)}$. Đặt $t = \sqrt[12]{x}$, suy ra $t \rightarrow 1$ khi $x \rightarrow 1$ và giới hạn trên trở thành

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - t^3}{t^6(t^{12} - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^3(t-1)(t^{11} + t^{10} + \dots + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^3(t^{11} + t^{10} + \dots + 1)} = \frac{1}{12}.$$

2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-3} = -\frac{2}{3}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-\frac{5}{x})(\frac{1}{x}-1)^2}{3-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+4}-1} = -1$ (Lưu ý $x \rightarrow -\infty$ nên $x < 0$ do đó khi rút x^2 ra khỏi căn ta được $-x$).

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x)\sqrt{\frac{3x-1}{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{\frac{(1-2x)^2(3x-1)}{x^3+1}} = -2\sqrt{3}$ (lưu ý $u = -\sqrt{u^2}$ nếu $u < 0$ và $u = \sqrt{u^2}$ nếu $u \geq 0$).

3. Dạng $\infty - \infty$.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(\sqrt[3]{x^3+x^2})^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2} = \frac{1}{3}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x) + (x-\sqrt{x^2-2x})) =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2} + \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}} \right) = 2.$

4. Dạng $0 \cdot \infty$.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$ (Dùng $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ với $u = \frac{1}{x}$).

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$ (Dùng $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ với $u = \frac{1}{x}$). Cách làm này sai vì $u = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow 0$. Do đó ta không thể áp dụng giới hạn cơ bản $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Bài toán này làm lại như sau. Với mọi $x \neq 0$, ta có $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$. Suy ra $\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$. Do đó $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$. Vì $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

5. Dạng 1^∞ . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)} \right\}^{-\frac{x}{x+1}} = e^{-1}$ (Dùng $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ với $u = -\frac{1}{x+1}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$).

6. Dạng 0^0 . $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. Với mọi $x > 0$, ta có $x^x = e^{x \ln x}$. Xét $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Đây là một giới hạn khó nếu chỉ dùng những biến đổi cơ bản. Do đó để có thể giải quyết bài toán này, ta dùng một ứng dụng của đạo hàm trong một quy luật sau.

1.5.5 Quy tắc L'Hospital

Giả sử các hàm f, g có đạo hàm ở lân cận điểm x_0 và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận x_0 . Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ và nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại hữu hạn thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Quy tắc này vẫn đúng cho trường hợp $x \rightarrow \infty$.

Quay lại ví dụ ở Dạng 0^0 , ta nhận thấy giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ có dạng $0 \cdot \infty$ do đó để sử dụng được quy tắc L'Hospital ta viết lại giới hạn này như sau $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ (Dạng $\frac{\infty}{\infty}$). Áp dụng quy

tắc L'Hospital ta được $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^L = e^0 = 1$.

7. Dạng ∞^0 . $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$. Với mọi $x > 0$, ta có $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Xét $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (Dạng $\frac{\infty}{\infty}$). Áp dụng quy tắc L'Hospital ta được $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^L = e^0 = 1$.

8. Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ không tồn tại. Giới hạn đang xét có thể không tồn tại theo hai nghĩa. Một là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \pm\infty$, hai là $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ không xác định. Do $\sin x \in [-1, 1]$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \pm\infty$ là vô lý. Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ là không xác định. Thật vậy, giả sử $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ tồn tại hữu hạn và có giá trị là L . Như vậy với mọi dãy $(x_n) \subset \mathbb{R}$ sao cho $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $\sin x_n \rightarrow L$. Chọn $x_n = \frac{\pi}{2} + n2\pi$, ta có $\sin x_n = 1$. Suy ra $L = 1$. Chọn $x_n = n\pi$, ta có $\sin x_n = 0$. Suy ra $L = 0$, điều này vô lý vì L là duy nhất. Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có các kết quả sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$ không tồn tại.

1.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Chứng minh rằng

1. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. (Đặt $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ và dùng Định lý kẹp.)

2. $\lim x^n = 0$ nếu $|x| < 1$. (Xét $x = 0$ sau đó xét $x \neq 0$, lúc này đặt $y = \frac{1}{|x|} - 1 > 0$ rồi dùng bất đẳng thức Bernoulli.)
3. Với $p > 0$, ta có $\lim \sqrt[n]{p} = 1$. (Xét $p \geq 1$. Đặt $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ và dùng Định lý kẹp.)
4. Với $p > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$. (Ta chỉ xét $\alpha > 0$. Chọn k là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn α . Xét $(1+p)^n \geq C_n^k p^k$.)
5. Với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{n^\alpha}{n!} = 0$. (Giả sử $L = \lim \frac{n^\alpha}{n!}$. Suy ra $\lim \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)!} = L$.
Suy ra $\lim \left(\frac{n^\alpha}{n!} - \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)!} \right)$. Suy ra $L = 0$.)
6. Với $x \in \mathbb{R}$, ta có $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$. (Tương tự câu trên.)
7. $\lim(\sin n)$ và $\lim(\cos n)$ không tồn tại.

Bài 2. Tính các giới hạn sau

1. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{19}}{\sqrt{x} - 3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 9}}{3x^2 + 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^x$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 10x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right)$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^4 x}{x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x - 1}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 - \cos x)}{x^3 + \sin^3 x}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1 + x^2)}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$.
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}.$
26. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$
27. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln(\sin x)}.$
28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sin^2 2x}{x^2 + \sin^2 2x}.$
29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x + \cos x}{x}.$
30. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}.$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-100}.$
33. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\pi - 2 \arctan x) \ln x.$
34. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4} \right)^{\tan \left(\frac{\pi x}{2} \right)}.$
35. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$
36. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x)^{\frac{\ln x}{x}}.$
37. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{1}{\tan x}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{(1 - \sqrt{\sin x})(1 + \tan^2 x)}.$
38. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)}{2x + 1}.$
39. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left((2x + 1)^2 + 4\sqrt{x^2 + 4} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} \right).$
40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + xe^{2x})}{x^2}.$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$
42. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \ln x} \right).$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$
44. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$
45. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-3x} + e^{-2x} \right)^{\frac{1}{x}}.$
46. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}.$
47. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x - 1)}.$
48. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2^{-x})^{-x}.$
49. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \ln^2 x}{e^x}.$
50. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} \frac{1}{e^x}.$
51. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x.$
52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$
53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} \quad (p \in \mathbb{R}^+).$
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log_3(1 + 4x) \ln 3}{4x} \right)^{\frac{1}{x}}.$
56. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \tan \frac{\pi x}{2}.$
57. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right).$
58. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x.$
59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$
60. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1 + \ln x}}.$

Bài 3. Một vật thể có khối lượng m được thả rơi tự do từ trạng thái nghỉ. Vận tốc của vật sau thời gian t giây, có tính lực cản của không khí được cho bởi công thức

$$v = \frac{mg}{c} (1 - e^{-\frac{ct}{m}})$$

trong đó g là gia tốc trọng trường, c là hằng số cản của không khí. Biết rằng lực cản của không khí là $f = cv$. Hãy chứng minh công thức trên. Giả sử vật thể rơi trong một không gian mở (không có đáy), hãy tìm vận tốc của vật lúc này. Với t cho trước, tính $\lim_{c \rightarrow 0^+} v$ qua đó ta có nhận xét gì về hiện tượng này.

Tailieu.vn

Chương 2

BỔ SUNG VỀ ĐẠO HÀM HÀM MỘT BIẾN

2.1 ĐẠO HÀM

2.1.1 Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số f xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Xét một số Δx sao cho $|\Delta x|$ nhỏ tùy ý để $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Nếu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tồn tại hữu hạn thì ta nói hàm số có đạo hàm tại x_0 và kí hiệu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2$ tại $x_0 = 1$. Xét

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0) = 2x_0.$$

Vậy $f'(x_0) = 2x_0$ nên $f'(1) = 2.1 = 2$. Từ đây ta cũng suy ra kết quả sau $f'(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2$.

2.1.2 Đạo hàm bên trái và bên phải

Cho hàm số f xác định trên $(a, x_0]$. Xét một số $\Delta x < 0$ sao cho $|\Delta x|$ nhỏ tùy ý để $x_0 + \Delta x \in (a, x_0]$. Nếu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

tồn tại hữu hạn thì giới hạn này gọi đạo hàm bên trái của hàm số f tại điểm x_0 và ta kí hiệu là $f'(x_0^-)$.

Cho hàm số f xác định trên $[x_0, b)$. Xét một số $\Delta x > 0$ nhỏ tùy ý để $x_0 + \Delta x \in [x_0, b)$. Nếu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$