

TRƯỜNG ĐẠI HỌC LÂM NGHIỆP
PHÂN HIỆU ĐH LÂM NGHIỆP

Tailieu.vn

BÀI GIẢNG
CƠ HỌC LÝ THUYẾT

GV: Lê Thị Hà

CHƯƠNG 1: CƠ HỌC GIẢI TÍCH

1.1. Các khái niệm cơ bản về cơ hệ không tự do

1.1.1. Cơ hệ không tự do

Cơ hệ không tự do là tập hợp các chất điểm mà trong đó chuyển động của các chất điểm thuộc cơ hệ không những chỉ phụ thuộc vào lực tác dụng mà còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

1.1.2. Liên kết

a. Định nghĩa

Liên kết là những điều kiện ràng buộc chuyển động về mặt hình học và động học của cơ hệ. Những điều kiện này không phụ thuộc vào lực tác dụng và điều kiện ban đầu.

b. Phương trình liên kết

Phương trình liên kết là các phương trình hay bất phương trình biểu thị về mặt toán học sự ràng buộc về mặt hình học và động học của các chất điểm thuộc cơ hệ. Chúng có dạng như sau:

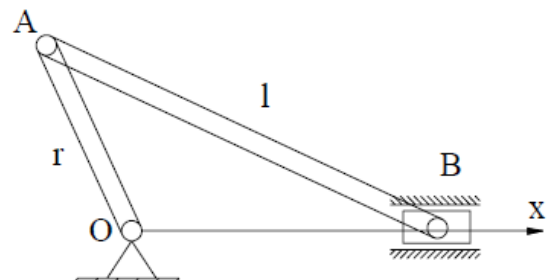
$$f_i(t, \vec{r}_k, \vec{v}_k) \geq 0$$

trong đó: $k = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, s}$ với s là số phương trình liên kết.

Với cơ cấu tay quay, thanh truyền như hình vẽ, ta có thể viết các phương trình liên kết của cơ cấu phẳng tay quay thanh truyền như sau:

$$x(0) = y(0) = 0$$

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$



$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

c. Phân loại liên kết

Dựa vào dạng của phương trình liên kết mà ta phân loại các liên kết.

Liên kết dừng: là liên kết mà phương trình của nó không chứa yếu tố thời gian.

$$f_i(\vec{r}_k, \vec{v}_k) \geq 0$$

Liên kết không dừng: là liên kết mà phương trình của nó có chứa yếu tố thời gian t .

$$f_i(t, \vec{r}_k, \vec{v}_k) \geq 0$$

Liên kết hình học: là liên kết mà phương trình liên kết của nó không chứa yếu tố vận tốc $\vec{v}_k$ hoặc nếu có ta có thể tích phân được để đưa về dạng không chứa yếu tố vận tốc.

Liên kết động học: là liên kết mà phương trình liên kết của nó chứa yếu tố vận tốc $\vec{v}_k$.

Từ phần này trở đi, tất cả các liên kết mà chúng ta xét đều là liên kết dừng và hình học, nghĩa là

$$f_i(\vec{r}_k) = 0 \Leftrightarrow f_i(x_k, y_k, z_k) = 0$$

1.1.3. Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ

a. Định nghĩa

Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là tập hợp các di chuyển vô cùng bé mà mỗi chất điểm của cơ hệ có thể thực hiện được để sao cho phù hợp với liên kết tại vị trí đang xét.

Di chuyển khả dĩ của chất điểm được ký hiệu $\delta \vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ với $\vec{r}$ là vector định vị của chất điểm, còn di chuyển thực được ký hiệu là $d\vec{r}(dx, dy, dz)$. Di chuyển

khả dĩ chỉ có ý nghĩa về mặt hình học, nó không phụ thuộc vào lực tác dụng và thời gian t.

Như vậy, di chuyển khả dĩ hay còn gọi là di chuyển ảo của hệ phải thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ Di chuyển vô cùng bé.

+ Các di chuyển thực hiện được mà không phá vỡ liên kết.

b. Số bậc tự do

Định nghĩa: Số bậc tự do của cơ hệ bằng số di chuyển khả dĩ độc lập của hệ đó.

Giả sử cơ hệ có n chất điểm thì có $3n$ di chuyển khả dĩ độc lập. Nhưng hệ lại có m phương trình liên kết, do đó số bậc tự do của hệ sẽ là $S = 3n - m$

Ví dụ: Một chất điểm ở trên đường thẳng có một bậc tự do.

Một chất điểm tự do trong không gian có 3 bậc tự do.

Một vật rắn tự do trong không gian có 6 bậc tự do.

1.1.4. Tọa độ suy rộng và lực suy rộng của cơ hệ

Các tham số độc lập, nếu chúng có số lượng đúng bằng số bậc tự do của hệ và xác định duy nhất được vị trí của hệ thì gọi là các tọa độ suy rộng của hệ.

Ta ký hiệu tọa độ suy rộng bằng: $\{q_i\} = q_1, q_2, \dots, q_s$

Tọa độ suy rộng có thể là đoạn thẳng, các cung, các góc, diện tích... Việc chọn tọa độ suy rộng gắn liền với việc xác định số bậc tự do và bằng số di chuyển khả dĩ của cơ hệ.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Đề-các của chất điểm thuộc cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Hay
$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n) = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$$

Khi hệ chuyển động thì các tọa độ suy rộng biến đổi liên tục theo thời gian t , nghĩa là:

$$q_1 = q_1(t) ; q_2 = q_2(t) ; \dots q_s = q_s(t)$$

Các biểu thức trên gọi là phương trình chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng.

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian các tọa độ suy rộng ta thu được vận tốc suy rộng tương ứng của cơ hệ.

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} ; \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} ; \dots ; \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$$

b. Lực suy rộng

Xét cơ hệ có n chất điểm chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \dots; \vec{F}_n$. Vì cơ hệ có liên kết hình học nên số tọa độ suy rộng đủ để xác định vị trí của cơ hệ đúng bằng số bậc tự do của cơ hệ đó $q_1, q_2, \dots, q_s$.

Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ, trong đó chỉ có tọa độ suy rộng q_1 biến đổi với số gia δq_1 , còn các tọa độ suy rộng khác không đổi thì vectơ $\vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$ của các chất điểm nhận được một di chuyển nguyên tố là $\delta(\vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1$.

Tổng công nguyên tố của các lực tác dụng lên hệ trên di chuyển $\delta(\vec{r}_k)_1$ sẽ là:

$$\delta A_1 = \vec{F}_1 \delta(\vec{r}_1)_1 + \vec{F}_2 \delta(\vec{r}_2)_1 + \dots + \vec{F}_n \delta(\vec{r}_n)_1$$

$$\delta A_1 = \vec{F}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \vec{F}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \vec{F}_n \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1$$

$$\delta A_1 = \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = Q_1 \delta q_1 \text{ với } Q_1 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}$$

Q_1 gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_1 . Tương tự ta có các lực suy rộng $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$. Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ mà tất cả các tọa độ suy rộng đồng thời biến đổi, khi đó tổng công của các lực tác dụng lên cơ hệ trên di chuyển khả dĩ đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j$$

Nếu các lực tác dụng lên hệ là lực có thế. Khi đó:

$$\sum \delta A_k = -\delta \Pi = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \delta q_s \right)$$

$$\text{Vậy: } Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} ; Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} ; \dots ; Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

Vậy nếu các lực tác dụng lên cơ hệ là lực có thế thì lực suy rộng bằng đạo hàm riêng của thế năng (với dấu “-”) theo tọa độ suy rộng tương ứng.

1.2. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

1.2.1. Công khả dĩ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi lực tác dụng lên chất điểm trên di chuyển trùng với di chuyển khả dĩ của chất điểm đó.

Công khả dĩ của lực hoạt động $\vec{F}$ trên di chuyển khả dĩ được ký hiệu là: δA^F .

Công khả dĩ của phản lực liên kết $\vec{N}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^N .

1.2.2. Liên kết lý tưởng

Liên kết của cơ hệ được gọi là liên kết lý tưởng nếu tổng công nguyên tố của các phản lực liên kết tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^N = \sum \overrightarrow{N_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$$

1.2.3. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Nội dung: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$$

Chứng minh nguyên lý:

* Điều kiện cần

GT	- Hệ có liên kết lý tưởng - Hệ cân bằng
KL	$\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$

Xét chất điểm thứ k thuộc hệ, chịu tác dụng của $\overrightarrow{F_k}$ và $\overrightarrow{N_k}$. Theo giả thiết:

$$\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k} = 0$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ thì chất điểm thứ k có di chuyển khả dĩ $\overrightarrow{\delta r_k}$. Ta có:

$$\delta A_k = (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k}) \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$$

Đối với toàn hệ ta có: $\sum \delta A_k = \sum (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k}) \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0 \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} + \sum \overrightarrow{N_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$

$\Rightarrow \sum \overrightarrow{F_k} \cdot \overrightarrow{\delta r_k} = 0$ (Vì hệ có liên kết lý tưởng)

* Điều kiện đủ:	GT	- Hệ có liên kết lý tưởng - $\sum \delta A_k^F = \sum \vec{F}_k \cdot \vec{\delta r}_k = 0$
	KL	- Hệ cân bằng

Giả sử hệ cân bằng, trên hệ có các lực hoạt động thỏa mãn điều kiện

$$\sum \vec{F}_k \cdot \vec{\delta r}_k = 0.$$

Nếu tại thời điểm nào đó cơ hệ bắt đầu chuyển động thì ta có: $\delta T \neq 0$.

Theo định lý động năng: $\delta T = \sum \vec{F}_k \cdot \vec{\delta r}_k + \sum \vec{N}_k \cdot \vec{\delta r}_k \neq 0$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_k \cdot \vec{\delta r}_k \neq 0 \text{ (Vì hệ có liên kết lý tưởng)}$$

Điều này trái với giả thiết nên hệ cân bằng mãi mãi.

Ý nghĩa: Nguyên lý di chuyển khả dĩ thiết lập được điều kiện cân bằng ở dạng tổng quát của cơ hệ bất kỳ. Nó cho phép ta sử dụng phương pháp tĩnh học để giải bài toán động lực một cách tổng quát.

1.2.3. Vận dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ

a. Ví dụ 1

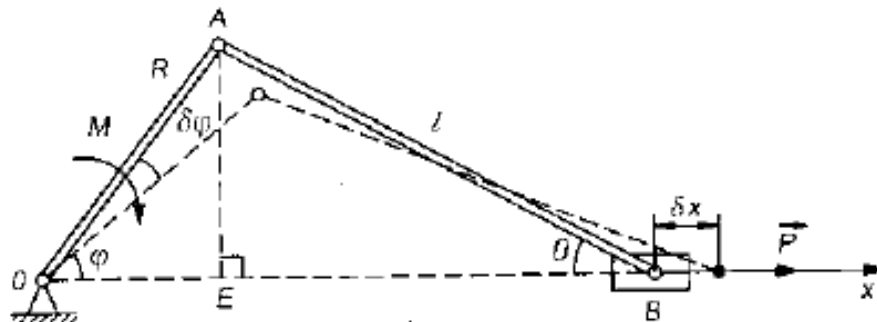
Tìm hệ thức liên hệ giữa mômen M của ngẫu lực tác dụng lên tay quay của cơ cấu thanh truyền và áp lực P lên pittông khi cân bằng. Cho biết $OA = r$ và $AB = l$.

Giải

Cơ cấu có một bậc tự do. Lực $\vec{P}$ và ngẫu lực $\vec{M}$ sinh công.

Cho tay quay di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, khi đó con trượt B di chuyển δx .

Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ: $M\delta\varphi + P\delta x = 0$



Ta có:

$$r \sin \varphi = l \sin \alpha \Rightarrow r \cos \varphi \delta \varphi = l \cos \alpha \delta \alpha$$

$$\Rightarrow \delta \alpha = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \alpha} \delta \varphi = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi$$

$$x = r \cos \varphi + l \cos \alpha \Rightarrow \delta x = -r \sin \varphi \delta \varphi - l \sin \alpha \delta \alpha$$

Mà:

$$\Rightarrow \delta x = (-r \sin \varphi \delta \varphi - r \sin \varphi \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi)$$

$$\Rightarrow \delta x = -(r \sin \varphi + \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}) \delta \varphi$$

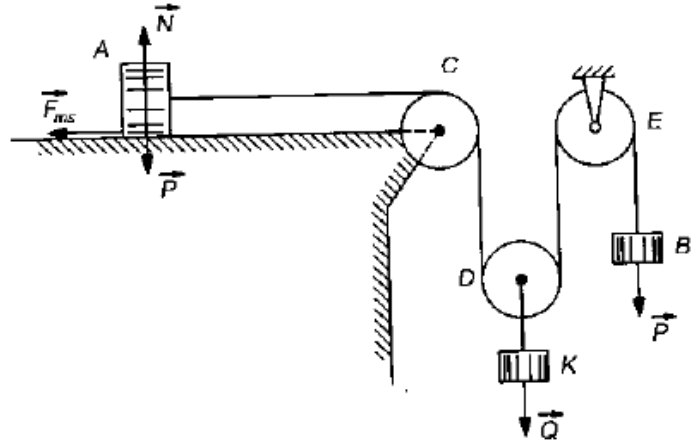
Thế vào pt trên, ta được:

$$M \delta \varphi + P \delta x = 0 \Leftrightarrow M \delta \varphi - P(r \sin \varphi + \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}) \delta \varphi = 0$$

$$\Rightarrow M = Pr \sin \varphi (1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}})$$

b. Ví dụ 2

Người ta buộc hai vật nặng A và B có cùng trọng lượng vào hai đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng. Dây đi từ vật A song song với mặt phẳng ngang không nhẵn, vắt qua ròng rọc cố định C rồi lồng vào ròng rọc động D, sau đó lại vắt qua ròng rọc cố định E và buộc vào vật nặng B. Vật nặng K có trọng lượng Q treo vào trục ròng rọc động D. Xác định trọng lượng P của mỗi vật A và B cũng như hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng ngang, biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng. Bỏ qua trọng lượng các ròng rọc.



Giải

Hệ khảo sát gồm các vật A, B, ròng rọc D và vật K. Hệ có hai bậc tự do nên có hai điều kiện cân bằng.

Ta cố định vật A, cho vật B rơi xuống một đoạn δs_B . Khi đó vật K đi lên một đoạn δs_K . Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$-Q\delta s_K + P\delta s_B = 0 \Leftrightarrow -Q.\delta s_K + P.2\delta s_K = 0 \Rightarrow P = \frac{Q}{2}$$

Ta cố định vật B, cho vật K rơi xuống một đoạn δs_K thì vật A di chuyển một đoạn δs_A . Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$Q\delta s_K - F_{ms}\delta s_A = 0 \Leftrightarrow Q\delta s_K - f.P.2\delta s_K = 0 \\ \Rightarrow f = \frac{Q}{2P} = 1$$

1.2.2. Điều kiện cân bằng trong tọa độ suy rộng độc lập đủ

a. Trường hợp chung

Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ, điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không. Trong tọa độ suy rộng, điều kiện đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_s\delta q_s = 0$$

Vì các $\delta q_1; \delta q_2; \dots; \delta q_s$ độc lập nhau nên đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi: $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_s = 0$.

Định lý: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng trong tọa độ suy rộng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng của cơ hệ đều bằng không.

b. Trường hợp các lực có thế

Trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên hệ là những lực có thế và hàm thế năng có dạng là $\Pi = \Pi(q_1; q_2; \dots; q_s)$ thì điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng tại một vị trí nào đó là hàm thế năng đạt cực trị tại vị trí đó.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j = \overline{1, s})$$

1.3. Nguyên lý Đalămbe – Lagrăng (Phương trình tổng quát động lực học)

1.3.1. Nguyên lý Đalămbe – Lagrăng

Xét cơ hệ gồm n chất điểm có liên kết lý tưởng, và đang chuyển động. Ngoài lực hoạt động $\vec{F}_k$ và phản lực liên kết $\vec{N}_k$, ta thêm vào chất điểm thứ k lực $\vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{W}_k$.

Theo nguyên lý Đalămbe ta thu được một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{F}_k; \vec{N}_k; \vec{F}_k^{qt}) \square 0$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ, áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có:

$$\sum (\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{F}_k^{qt}) \cdot \delta \vec{r}_k \square 0 \Leftrightarrow \sum (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{qt}) \delta \vec{r}_k + \sum \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

Vì hệ đang xét có liên kết lý tưởng nên $\sum \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$. Do đó

$$\sum (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{qt}) \delta \vec{r}_k = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình tổng quát động lực học hay còn gọi là nguyên lý Đalămbe – Lagrăng.

Phát biểu nguyên lý: Nếu cơ hệ có liên kết lý tưởng thì tại mỗi thời điểm, tổng công nguyên tố của các lực hoạt động và lực quán tính đặt vào cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không.

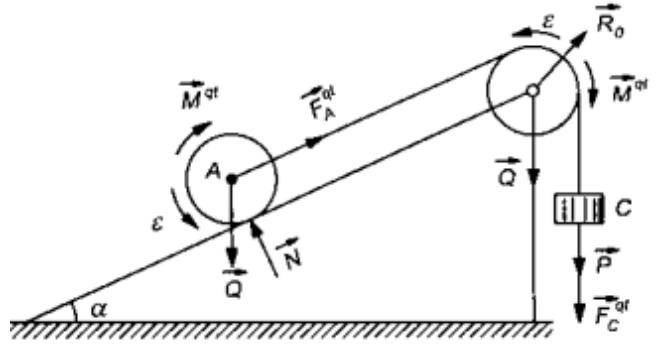
Phương trình động lực học có thể được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\sum [(F_{kx} + F_{kx}^{qt}) \delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^{qt}) \delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^{qt}) \delta z_k] = 0$$

1.3.2. Áp dụng nguyên lý

a. Ví dụ 1

Một con lăn A trọng lượng Q trong khi lăn không trượt xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α , đã nâng vật C trọng lượng P nhờ một sợi dây không giãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc cố định B. Khi đó ròng rọc B quay quanh trục cố định đi qua tâm O của nó và trục giao với mặt phẳng của ròng rọc. Con lăn A và ròng rọc B là những đĩa tròn đồng chất có cùng bán kính và trọng lượng. Tìm gia tốc của trục con lăn.



Giải

Hệ khảo sát gồm: Con lăn A, ròng rọc B, vật nặng C và dây. Hệ có một bậc tự do.

Các lực chủ động gồm: $\vec{Q}; \vec{P}$

Phản lực liên kết gồm: $\vec{N}; \vec{R}_0$

Các lực quán tính gồm: $\vec{F}_C^{qt} = -m_C \vec{W}_C = -\frac{P}{g} \vec{W}_C$

$$\vec{F}_A^{qt} = -m_A \vec{W}_A = -\frac{P}{g} \vec{W}_A$$

$$M_{qt} = J \cdot \epsilon = \frac{1}{2} m_A R^2 \cdot \epsilon = \frac{Q}{2g} R^2 \epsilon$$

Áp dụng phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$\begin{aligned} (Q \sin \alpha - F_A^{qt}) \delta s - (P + F_C^{qt}) \delta s - 2M^{qt} \delta \varphi &= 0 \\ \Leftrightarrow (Q \sin \alpha - \frac{Q}{g} W_A) \delta s - (P + \frac{P}{g} W_C) \delta s - 2 \frac{Q}{2g} R^2 \epsilon \delta \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Vì dây không giãn nên: $W_A = W_C = W$, $\delta s = R \delta \varphi$

Thế vào phương trình trên và biến đổi:

$$\begin{aligned}
& (Q \sin \alpha - \frac{Q}{g} W) \delta s - (P + \frac{P}{g} W) \delta s - 2 \frac{Q}{2g} R^2 \frac{W}{R} \frac{\delta s}{R} = 0 \\
& \Leftrightarrow Q \sin \alpha - \frac{2Q+P}{g} W - P = 0 \\
& \Rightarrow W = \frac{Q \sin \alpha - P}{2Q+P} g
\end{aligned}$$

b. Ví dụ 2

Hai vật A và B có trọng lượng P_1 và P_2 được buộc vào sợi dây vòng qua hai ròng rọc C, D. Để đưa vật A lên, người ta tác dụng vào ròng rọc C một ngẫu lực có mômen M không đổi. Các ròng rọc C, D có cùng trọng lượng Q , bán kính R . Tìm gia tốc vật A, bỏ qua khối lượng dây.

Giải

Cơ hệ gồm có hai ròng rọc và hai vật A, B. Hệ có một bậc tự do.

Các lực hoạt động gồm: $\vec{P}_1$; $\vec{P}_2$; $\vec{Q}$, M

Các lực quán tính gồm:

$$F_{qt}^A = \frac{P_1}{g} W_A; F_{qt}^B = \frac{P_2}{g} W_B; M_C^{qt} = M_D^{qt} = J \cdot \varepsilon = \frac{Q}{2g} R^2 \varepsilon = \frac{Q}{2g} R W_A$$

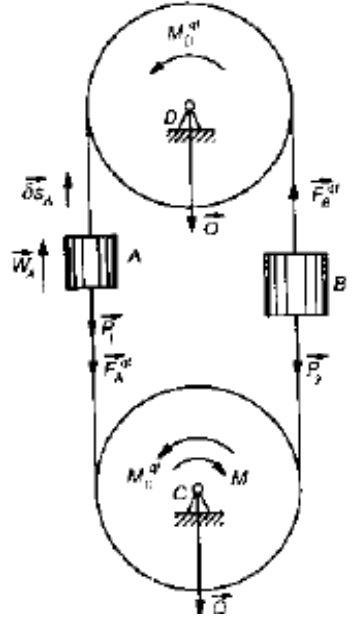
Vì dây không giãn nên ta có: $W_A = W_B$, $\delta s_A = \delta s_B$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe – Lagrăng ta có:

$$(-P_1 - F_{qt}^A) \delta s_A + (P_2 - F_{qt}^B) \delta s_B + M \delta \varphi - 2M^{qt} \delta \varphi = 0$$

Thế các lực quán tính vào và biến đổi (lưu ý: $\delta s_A = \delta s_B = R \delta \varphi$), ta được:

$$W_A = \frac{M + R(P_2 - P_1)}{R(Q + P_1 + P_2)} g$$



1.4. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ không tự do

1.4.1. Phương trình Lagrăng loại II

a. Trường hợp chung

Từ phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$\sum (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{qt}) \delta \vec{r}_k = 0 \Leftrightarrow \sum \delta A_k^F + \sum \delta A_k^{qt} = 0$$

Giả sử hệ có s bậc tự do và vị trí của cơ hệ được xác định bởi các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, \dots, q_s$. Ta có:

$$\sum \delta A_k^F = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s$$

$$\sum \delta A_k^{qt} = Q_1^{qt} \delta q_1 + Q_2^{qt} \delta q_2 + \dots + Q_s^{qt} \delta q_s$$

Với $Q_1^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}$; $Q_2^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}$; ...; $Q_s^{qt} = \sum \vec{F}_k^{qt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}$ là các lực quán tính suy rộng.

Thay vào phương trình trên ta được:

$$(Q_1 + Q_1^{qt}) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{qt}) \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^{qt}) \delta q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_1^{qt} = 0; Q_2 + Q_2^{qt} = 0; \dots; Q_s + Q_s^{qt} = 0$$

$$\text{Ta có: } Q_1^{qt} = - \sum m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = - \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) - m_k \vec{V}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) \right]$$

$$\text{mà } \vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s$$

với $\dot{q}_1; \dot{q}_2; \dots; \dot{q}_s$ là vận tốc suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, \dots, q_s$.

Đạo hàm $\vec{V}_k$ theo vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$, ta được:

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Thay đổi thứ tự lấy đạo hàm, ta được:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d \vec{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial q_i}$$

Thay hai phương trình trên vào biểu thức của lực quán tính, thực hiện một số phép biến đổi, ta có:

$$Q_1^{qt} = - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow Q_1^{qt} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right] \Rightarrow Q_1 = -Q_1^{qt} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right]$$

Đối với các lực quán tính suy rộng khác, ta có các biểu thức tương tự. Vậy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s$$

Đây là hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng, hay còn gọi là phương trình Lagrăng loại II.

Nếu các lực tác dụng lên hệ là lực có thế thì

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

Do $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ không phụ thuộc các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ nên các phương trình trên có thể viết:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_2} = 0$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_s} = 0$$

Ta gọi $L = T - \Pi$ là hàm Lagrăng thì phương trình Lagrăng loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$$

Phương trình Lagrăng loại II cho ta phương pháp tổng quát để giải bài toán động lực học.

1.4.2. Các tích phân đầu của chuyển động

a. Tích phân năng lượng

Xét hệ có n chất điểm chịu liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng. Giả sử vị trí của cơ hệ được xác định bởi s tọa độ suy rộng độc lập và đủ $q_1, q_2, \dots, q_s$ và các lực hoạt động đều là lực có thế. Khi đó phương trình Lagrăng loại II sẽ là:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \text{ với } i = 1, 2, \dots, s$$

Trong đó T và Π là động năng và thế năng của hệ được biểu diễn qua các tọa độ suy

rộng độc lập đủ. Ta có: $\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i$

Và động năng T được tính theo các vận tốc suy rộng

$$T = \sum \frac{1}{2} m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k \vec{V}_k \vec{V}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \sum_{i=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Nếu ký hiệu $\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = a_{ij}$ gọi là hệ số quán tính của cơ hệ với $a_{ij} = a_{ji}$

thì động năng của hệ là $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$

Vậy động năng của cơ hệ là hàm đẳng cấp bậc hai đối với các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$. Do đó ta có hệ thức sau:

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

Ta nhân cả hai vế của phương trình Lagrăng với vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$ rồi lấy tổng cả hai vế theo chỉ số i, ta được:

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\text{Mà } \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \dot{q}_s = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sum \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{d}{dt} (2\dot{T}) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \\ &= 2 \frac{dT}{dt} - \left(\frac{dT}{dt} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\Rightarrow - \sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + \Pi) = 0$$

$$\Rightarrow T + \Pi = E = \text{const}$$

Vậy cơ năng của hệ được bảo toàn. Biểu thức trên gọi là tích phân năng lượng, còn E được gọi là hằng số năng lượng, nó được xác định từ điều kiện ban đầu của chuyển động.

b. Tích phân xyclic

Định nghĩa tọa độ xyclic: Tọa độ suy rộng q_k nào đó được gọi là tọa độ xyclic nếu

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0; \quad Q_k = 0$$

Tức là q_k là tọa độ xyclic nếu nó không có mặt trong biểu thức động năng, thế năng của cơ hệ, còn lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với nó bằng không.

Phương trình Lagrăng loại II ứng với tọa độ xyclic q_k là:

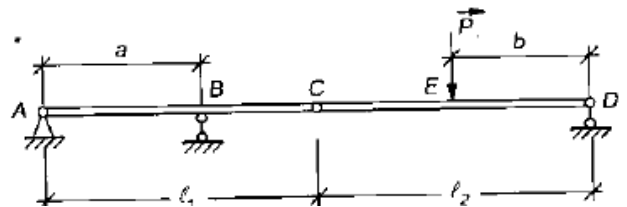
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}$$

Đẳng thức này gọi là tích phân xyclic.

BÀI TẬP

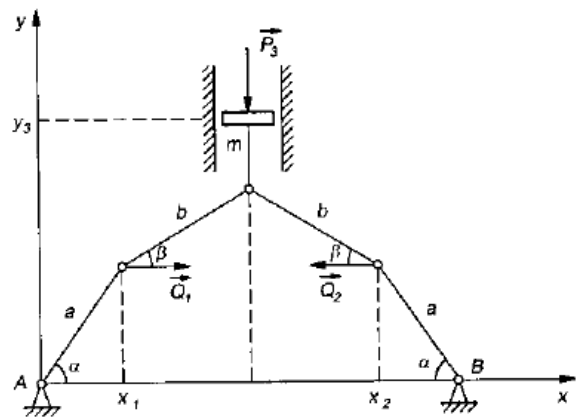
I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Bài 1: Hai dầm AC và CD nối với nhau bằng bản lề tại C và chịu tác dụng của lực P đặt tại E. Kích thước cho như trên hình vẽ.

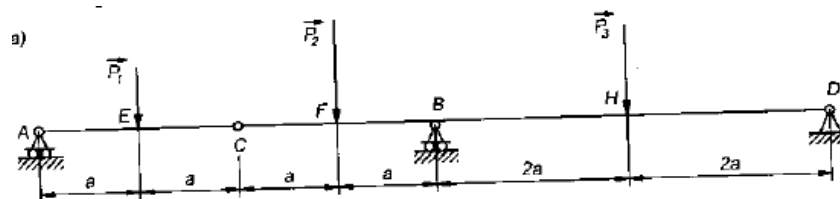


Tìm phản lực tại gối tựa B, bỏ qua trọng lượng các dầm.

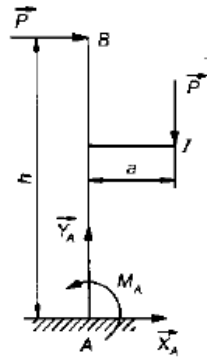
Bài 2: Cho sơ đồ một máy nén như hình bên dưới. Tìm liên hệ giữa các lực $\vec{Q}_1; \vec{Q}_2; \vec{P}_3$ khi hệ cân bằng ($Q_1 = Q_2 = Q$ và $P_3 = P$). Góc α và β cho trước. Bỏ qua trọng lượng các thanh.



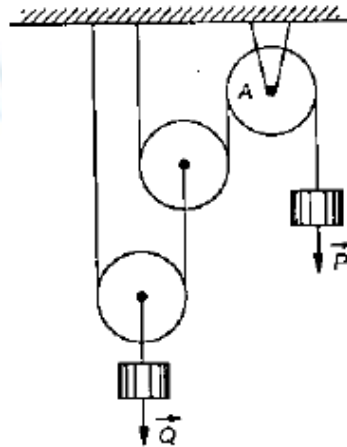
Bài 3: Cho hệ thanh chịu lực và chịu liên kết như hình bên dưới. Cho $P_1 = 2\text{kN}$; $P_2 = 6\text{kN}$; $P_3 = 3\text{kN}$. Tính phản lực tại A, B, D.



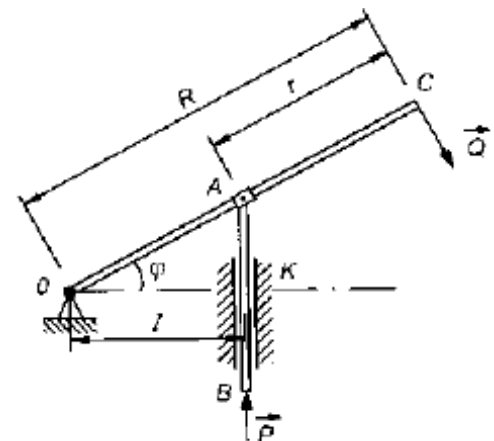
Bài 4: Cột AB chịu liên kết ngàm tại A và chịu lực như hình bên dưới. Hãy tìm phản lực tại A.



Bài 5: Một cơ hệ gồm có ròng rọc cố định A và n ròng rọc động. Xác định tỷ số giữa tải trọng được nâng Q và lực P đặt vào đầu dây vắt qua ròng rọc cố định A để hệ cân bằng



Bài 6: Cho một cơ cấu thanh trượt. Khi tay quay OC quay quanh trục nằm ngang O thì con chạy A chuyển dịch dọc theo tay quay OC làm cho thanh AB chuyển động trong rãnh thẳng đứng K. Cho biết $OC = R$, $OK = l$. Tại C cần phải đặt lực Q vuông góc với OC bằng bao nhiêu để cân bằng với lực P tác dụng vào thanh AB như hình bên.



Bài 7: Cho hệ dầm như hình vẽ. Tìm các phản lực tại A và B. Cho biết $q = 4,9\text{N/m}$.

