Chương 4

Trường điện từ chuẩn dừng

Trong chương 2 và chương 3 chúng ta đã nghiên cứu các trường tĩnh và trường dừng là những trường không biến thiên theo thời gian. Đối với các trường này điện trường và từ trường là độc lập với nhau và ta có thể khảo sát chúng một cách riêng rẽ. Sau đây ta sẽ nghiên cứu các trường biến thiên theo thời gian. Các phương trình Maxwell (1.33) và (1.34) cho ta thấy mối liên hệ giữa từ trường và điện trường biến thiên theo thời gian, chúng không tồn tại độc lập với nhau và do đó không thể khảo sát riêng rẽ. Trong chương này sẽ khảo sát trường điện từ chuẩn dừng, đó là trường biến thiên chậm theo thời gian.

4.1 Các phương trình của trường chuẩn dừng

4.1.1 Các điều kiện chuẩn dừng

Trường chuẩn dừng là trường biến thiên chậm theo thời gian, thỏa mãn hai điều kiện sau:

Điều kiện chuẩn dừng thứ nhất: Dòng điện dịch rất nhỏ, có thể bỏ qua được so với dòng điện dẫn.

$$\left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|_{\max} \ll |\vec{j}\,|_{\max} \tag{4.1}$$

Điều kiện chuẩn dừng thứ hai: Trong miền quan sát có thể bỏ qua hiệu ứng trễ, phụ thuộc vào vận tốc truyền hữu hạn của sóng điện từ.

Xét ví dụ về trường hợp thường gặp là trường biến thiên điều hòa với tần số góc bằng ω khi đó

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega\varepsilon \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}; \quad \vec{j} = \lambda \vec{E} = \lambda \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Do đó điều kiện chuẩn dừng thứ nhất có thể viết lại

$$\omega\varepsilon \ll \lambda \quad \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

Đối với dây dẫn bằng kim loại $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ và $\lambda \approx 10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ do đó $\frac{\lambda}{\varepsilon} \approx 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$, điều kiện chuẩn dừng thứ nhất tương ứng với $\omega \ll 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$ hay $\gamma \ll 10^{17}$Hz và bước sóng $\ell \gg 10^{-9}$m. Như vậy đối với dòng xoay chiều và sóng vô tuyến điện đều thỏa mãn điều kiện chuẩn dừng thứ nhất.

Giả sử điện trường biến thiên kể trên truyền đi theo trục x với vận tốc c dưới dạng sóng phẳng đơn sắc. Điện trường tại điểm quan sát cách nguồn một khoảng x

$$E(x,t) = E_0 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{c}}\right)\right\} = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \exp\left(i\omega\frac{x}{\mathrm{c}}\right) = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}\left\{1 - i\frac{\omega x}{\mathrm{c}} + \cdots\right\}$$

Ta thấy rằng nếu $\frac{\omega x}{\mathrm{c}} \ll 1$ thì $E(x,t)$ có dạng $\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{i\omega t}$, hay ta có thể bỏ qua hiệu ứng trễ. Khi đó

$$\frac{\omega}{\mathrm{c}} = \frac{2\pi}{\mathrm{c}T} = \frac{2\pi}{\ell}$$

Trong đó T là chu kỳ dao động của sóng điện từ, điều kiện chuẩn dừng thứ hai có dạng

$$x \ll \ell$$

Nghĩa là kích thước miền quan sát phải rất nhỏ so với bước sóng khảo sát.

Dòng điện xoay chiều trong kỹ thuật có tần số cỡ 50Hz ứng với bước sóng 6000km và những sóng vô tuyến điện thường có bước sóng từ vài chục mét đến vài nghìn mét thì phần lớn điện từ trường dùng trong vô tuyến điện kỹ thuật và nhất là trong điện kỹ thuật đều thuộc lĩnh vực trường chuẩn dừng.

4.1.2 Các phương trình của trường chuẩn dừng

Nếu bỏ qua dòng điện dịch so với dòng điện dẫn các phương trình Maxwell viết cho trường chuẩn dừng có dạng:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{4.5}$$

Các phương trình liên hệ

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}; \qquad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{(n)})$$

Phương trình liên tục trong trường chuẩn dừng có dạng

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{D}) = \mathrm{div}\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \approx \mathrm{div}\vec{j}$$
$$\mathrm{div}\vec{j} = 0$$

4.1.3 Thế véctơ và thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng

Nếu $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ là hàm véctơ của cả tọa độ và thời gian và thỏa mãn

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \tag{4.6}$$

gọi là thế véctơ của trường điện từ chuẩn dừng. Đối với thế véctơ $\vec{A}$ ta cũng đặt điều kiện định cỡ

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0 \tag{4.7}$$

Từ phương trình (4.2) rút ra

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{rot}\Big(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = 0$$

$\vec{E}$ không phải là véctơ thế mà $\Big(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big)$ mới là véctơ thế. Đặt $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$ hay:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{4.8}$$

trong đó $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ là hàm vô hướng của tọa độ và thời gian và được gọi là thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng. Nó cũng được định cỡ giống như thế vô hướng của trường tĩnh điện.

4.1.4 Các phương trình vi phân của thế

Phương trình vi phân của thế vô hướng

Ta có $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Thay $\vec{E}$ trong (4.8) ta có $\mathrm{div}\Big(-\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. Sử dụng điều kiện định cỡ (4.7) ta có:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.9}$$

(4.9) là phương trình Poisson của thế vô hướng của trường điện từ chuẩn dừng, có dạng tương tự như đối với trường tĩnh điện.

Phương trình vi phân của thế véctơ

Ta có $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\vec{j}$. Thay $\vec{B}$ trong (4.6) ta có $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j}$. Sử dụng điều kiện định cỡ (4.7) ta có:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \tag{4.10}$$

(4.10) là phương trình Poisson đối với thế véctơ.

4.2 Các mạch chuẩn dừng

4.2.1 Hệ dây dẫn có cảm ứng điện từ

Xét một hệ gồm nhiều dây dẫn liên kết hỗ cảm với nhau. Do hiện tượng cảm ứng điện từ, dòng điện chảy trong mỗi dây dẫn phụ thuộc vào các dòng khác trong dây dẫn khác. Áp dụng định luật Ohm suy rộng (3.7) cho dây dẫn thứ i và viết nó dưới dạng tích phân tương tự như (3.8)

$$\oint_{\ell_i} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \oint_{\ell_i} \vec{E}\, d\vec{l} + \oint_{\ell_i} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} \tag{4.11}$$

Theo (3.10) thì

$$\oint_{\ell_i} \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = I_i R_i$$

Tích phân thứ hai ở vế phải của (4.11) là thế điện động ngoại lai trên dây thứ i.

$$\oint_{\ell_i} \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l} = \mathcal{E}_{(n)i}$$

Sử dụng $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, tích phân thứ nhất trong vế phải của (4.11) có thể biến đổi được thành:

$$\oint_{\ell_i} \vec{E}\, d\vec{l} = -\oint_{\ell_i} \text{grad}\varphi\, d\vec{l} - \oint_{\ell_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, d\vec{l}$$

Để ý

$$\oint_{\ell_i} \text{grad}\varphi\, d\vec{l} = \oint_{\ell_i} d\varphi = 0$$

$$\oint_{\ell_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, d\vec{l} = \frac{d}{dt}\oint_{\ell_i} \vec{A}\, d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_{S_i} \text{rot}\vec{A}\, d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_{S_i} \vec{B}\, d\vec{S} = \frac{d\phi_i}{dt}$$

Trong đó ϕ_i là từ thông qua mặt S_i do dây dẫn thứ i giới hạn. Nên (4.11) viết lại

$$I_i R_i = \mathcal{E}_{(n)i} - \frac{d\phi_i}{dt} \tag{4.12}$$

Theo (3.65) ta có $\phi_i = \sum_k L_{ik} I_k$. Do đó (4.12) cũng viết được thành:

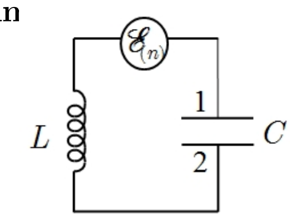
$$I_i R_i = \mathcal{E}_{(n)i} - \sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} \tag{4.13}$$

Nếu ta có một hệ gồm N dây dẫn và các lượng R_i, L_{ik} và $\mathcal{E}_{(n)i}$ là cho trước, ta viết được một hệ phương trình theo kiểu (4.13) chứa N ẩn $I_1, I_2 \dots I_N$. Hệ phương trình đó cho phép tính được cường độ dòng điện trong từng dây dẫn.

4.2.2 Mạch điện có điện dung và tự cản

Trên hình 4.1 là một mạch điện đơn giản có điện dung C và độ tự cảm L. lấy tích phân định luật Ohm suy rộng (3.7) dọc theo mạch điện từ bản này đến bản kia của tụ điện (từ điểm 1 đến điểm 2)

$$\int_1^2 \frac{\vec{j}\, d\vec{l}}{\lambda} = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{(n)}\, d\vec{l}$$



Hình 4.1:

Thực hiện các phép biến đổi

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_1^2 \text{grad}\varphi\,d\vec{l} - \frac{d}{dt}\int_1^2 \vec{A}\,d\vec{l}$$

$$\int_1^2 \text{grad}\varphi\,d\vec{l} = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Vì thế véctơ $\vec{A}$ là một hàm liên tục và khoảng cách giữa hai bản tụ điện (điểm 1 và điểm 2) là rất nhỏ so với độ dài của toàn mạch, ta có thể coi tích phân $\int_1^2 \vec{A}\,d\vec{l}$ là tích phân theo đường kín.

$$\int_1^2 \vec{A}\,d\vec{l} = \oint \vec{A}\,d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{A}\,d\vec{S} = \int_S \text{rot}\vec{B}\,d\vec{S} = \phi$$

Trong đó ϕ là từ thông qua mặt do mạch điện (bao gồm cả khoảng cách rất nhỏ giữa hai bản của tụ điện) giới hạn. kết quả ta có:

$$IR = \mathcal{E}_{(n)} - (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{d\phi}{dt} \tag{4.14}$$

Gọi q là điện tích trên tụ, ta có $\varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{q}{C}$ và $\phi = LI$ do đó (4.14) thành:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} + RI = \mathcal{E}_{(n)} \tag{4.15}$$

Lấy đạo hàm (4.15) theo thời gian và chú ý rằng $\dfrac{dq}{dt} = I$ ta có:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{(n)} \tag{4.16}$$

Nếu biết trước $\mathcal{E}$, R, L, C giải phương trình (4.16) sẽ tính được cường độ dòng điện I trong mạch. Phương trình (4.15) còn có thể viết dưới dạng:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_{(n)} \tag{4.17}$$

Nếu biết trước $\mathcal{E}$, R, L, C giải phương trình này sẽ tính được điện tích q của tụ điện.

Ở trên ta viết các phương trình cho một mạch điện có chứa điện dung và tự cảm. Trong trường hợp nếu có một hệ gồm N mạch điện kiểu như trên thì ta có thể viết được các phương trình cho mạch điện thứ i như sau:

$$I_iR_i = \mathcal{E}_{(n)i} - (\varphi_2 - \varphi_1)_i - \frac{d\phi_i}{dt}$$

Thay $\phi_i = \sum_k L_{ik}I_k$ ta có:

$$I_iR_i + \frac{q_i}{C_i} + \frac{d}{dt}\Big(\sum_k L_{ik}I_k\Big) = \mathcal{E}_{(n)i} \tag{4.18}$$

Lấy đạo hàm hai vế (4.18) theo thời gian ta có:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\frac{d^2I_k}{dt^2} + R_i\frac{dI_i}{dt} + \frac{I_i}{C_i} = \frac{d\,\mathcal{E}_{(n)i}}{dt} \tag{4.19}$$

Thay $i = 1, 2 \ldots N$ ta được hệ N phương trình vi phân xác định các dòng I_i trên mỗi mạch. Nếu biết trước $\mathcal{E}_{(n)i}$, R_i, L_{ik}, C_i giải hệ N phương trình (4.19) sẽ tính được cường độ dòng điện I_i trong mỗi mạch.

Nếu biểu diễn qua điện tích trên các tụ ta có:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\frac{d^2q_k}{dt^2} + R_i\frac{dq_i}{dt} + \frac{q_i}{C_i} = \mathcal{E}_{(n)i} \tag{4.20}$$

Thay $i = 1, 2 \ldots N$ ta được hệ N phương trình vi phân xác định điện tích q_i trên tụ C_i của mạch thứ i. Tương tự nếu biết trước $\mathcal{E}_{(n)i}$, R_i, L_{ik}, C_i giải hệ N phương trình (4.20) sẽ tính được điện tích q_i trên tụ C_i của mạch thứ i.

4.2.3 Các ví dụ

Ví dụ 1

Xét một mạch điện chỉ có R, L không có C. Tại thời điểm $t = 0$ ta tác dụng vào mạch một thế điện động ngoại lai không đổi $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_0 = \text{const}$. *Tính cường độ dòng điện chảy trong mạch.*

Áp dụng phương trình (4.15), ta có:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

Với điều kiện ban đầu $I(0) = 0$. Nghiệm của tổng quát của phương trình vi phân trên có dạng

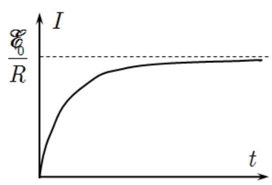
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Sử dụng điều liện đầu $I(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + A = 0 \Longrightarrow A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$. Do đó

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Ta thấy rằng cường độ dòng điện I trong mạch tăng theo thời gian, khi t khá lớn để có thể coi $t \longrightarrow \infty$ thì $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$. Dòng I_0 gọi là *dòng ổn định*. Còn dòng $I_c = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ xuất hiện do hiện tượng tự cảm, nó được gọi là *dòng cảm ứng*

Hình 4.2 là đồ thị của I. Khi đóng mạch điện có thể coi dòng điện I chảy trong mạch là tổng của hai dòng: dòng ổn định I_0 và dòng cảm ứng $I_c = I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. Dòng cảm ứng chảy ngược chiều với dòng ổn định và tắt dần theo thời gian. Sau mỗi khoảng thời gian $\triangle t = \frac{L}{R}$ nó giảm e lần.



Hình 4.2:

Trong trường hợp ta ngắt mạch điện (lúc đầu có $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)} = \text{const}$) bài toán cũng được giải tương tự như trên. Bây giờ phương trình (4.15) trở thành:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

Với điều kiện ban đầu $I(0) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{R}$. Nghiệm của phương trình vi phân với điều kiện đầu trên là:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Nghĩa là ngay sau khi ngắt mạch điện thì cường độ dòng điện trong mạch không lập tức bị tắt (bằng 0) mà do hiện tượng tự cảm nó tắt dần theo quy luật hàm mũ (Hình **??**)

Ví dụ 2

Xét dòng điện chảy trong một mạch có L, C và điện trở nhỏ không đáng kể $R = 0$ trong trường hợp không có thế điện động ngoại lai $\mathcal{E}_{(n)} = 0$.

Trong trường hợp này phương trình (4.16) có dạng:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Nghiệm của tổng quát của phương trình vi phân trên có dạng

$$I = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Trong đó ω là tần số góc của dòng điện

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A và B là biên độ của dao động, có giá trị xác định bằng những điều kiện ban đầu. Như vậy dòng điện trong mạch dao động với chu kỳ bằng:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Dao động đó có thể được kích thích lúc đầu bằng cảm ứng điện từ và những điều kiện kích thích sẽ xác định biên độ A và B. Một mạch điện như trên gọi là *mạch dao động* và dòng điện trong mạch không bao giờ tắt.

Trong thực tế mạch bao giờ cũng có một giá trị điện trở nào đó, dù rất nhỏ và dòng điện trong mạch là dòng tắt dần vì năng lượng của dòng điện biến dần thành nhiệt năng theo định luật Joule – Lentz.

Ví dụ 3

Xét dòng điện chảy trong mạch có R, L, C trong trường hợp thế điện động ngoại lai biến thiên tuần hoàn với tần số góc ω theo quy luật $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)}\cos(\omega t)$.

Viết $\mathcal{E}_{(n)}$ lại dưới dạng phức $\mathcal{E}_{(n)} = \mathcal{E}_{(0)}\mathrm{e}^{-i\omega t}$ và tìm nghiệm của (4.16) dưới dạng:

$$I(t) = I_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Thay nghiệm $I(t)$ vào (4.16) và thực hiện các phép đạo hàm được phương trình:

$$\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]I = \mathcal{E}_{(n)}$$

Đặt $Z^* = Z\mathrm{e}^{-i\alpha} = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, định luật Ohm cho toàn mạch có dạng

$$I = \frac{\mathcal{E}_{(n)}}{Z^*}$$

Trong đó Z^* gọi *trở kháng phức* và Z là *trở kháng* của mạch. Ta có

$$\begin{aligned} Z^2 = Ze^{-i\alpha}Ze^{i\alpha} &= \Big[R - i\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)\Big]\Big[R + i\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)\Big] \\ &= R^2 + \Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)^2 \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)^2}$$

Mặt khác $Ze^{-i\alpha} = Z\cos\alpha - iZ\sin\alpha = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ do đó

$$\cos\alpha = \frac{R}{Z}; \qquad \sin\alpha = \frac{1}{Z}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big); \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{R}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big)$$

Từ đó

$$I = \frac{\mathcal{E}_{(0)}e^{-i\omega t}}{Ze^{-i\alpha}} = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{Z}e^{-i(\omega t - \alpha)}$$

Hay viết dưới dạng lượng giác

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{(0)}}{Z}\cos(\omega t - \alpha)$$

Dòng điện trong mạch cũng dao động với tần số ω như dao động của thế điện động ngoại lai, nhưng nó lệch pha so với thế điện động ngoại lai. Độ lệch pha α phụ thuộc vào R, L, C và tần số ω của thế điện động ngoại lai. Độ lệch pha $\alpha = 0$ khi tg$\alpha = 0$ tức là khi:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Trong trường hợp đó trong mạch có *hiện tượng cộng hưởng* và tần số ω_0 gọi là *tần số cộng hưởng*. Khi đó

$$Z = Z_{\min} = R; \quad I = I_{0\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

4.3 Hiệu ứng mặt ngoài

Chúng ta biết rằng dòng điện không đổi được phân bố đều theo tiết diện của dây dẫn. Nhưng đối với dòng điện biến thiên, sự phân bố thay đổi khác hẳn, phần lớn dòng điện tập trung ở lớp ngoài của dây dẫn và tần số của dòng điện càng lớn thì lớp ngoài của dây dẫn chứa dòng điện càng mỏng. Hiện tượng đó gọi là *hiệu ứng mặt ngoài*[1].

Giả sử ta có một dây dẫn đồng chất và vô hạn chiếm một nửa không gian ứng với $z \geq 0$, và dòng điện chảy theo phương trục x song song với mặt ngoài của dây dẫn. Dòng điện biến thiên tuần hoàn theo thời gian với tần số góc bằng ω và chỉ là hàm của một tọa độ z theo

$$\vec{j} = \vec{j}(z,t) = \vec{J}_0(z)e^{i\omega t} \tag{4.21}$$

[1] cũng gọi là hiệu ứng lớp da

Các thành phần của nó là:

$$j_x = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t};\ j_y = j_z = 0 \tag{4.22}$$

Sử dụng các phương trình Maxwell

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

lấy đạo hàm theo thời gian phương trình đầu kết hợp với phương trình thứ hai ta có:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{E} + \frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Vì trong dây dẫn $\vec{j} = \lambda\vec{E}$ và từ phương trình liên tục $\mathrm{div}\vec{j} = \mathrm{div}\lambda\vec{E} = 0$ ta có

$$\nabla^2\vec{j} = \lambda\mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \tag{4.23}$$

Theo giả thiết $\vec{j}$ chỉ có một thành phần $j_x(z) = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t} \neq 0$ nên (4.23) trở thành

$$\frac{\partial^2 J_0(z)}{\partial z^2} = 2ip^2 J_0(z) \tag{4.24}$$

trong đó

$$p^2 = \frac{1}{2}\lambda\mu\omega \tag{4.25}$$

Nghiệm tổng quát của (4.24) là

$$J_0(z) = A_0\mathrm{e}^{\sqrt{2ip^2}\,z} + B_0\mathrm{e}^{-\sqrt{2ip^2}\,z}$$

Chú ý rằng $\sqrt{2ip^2} = p\sqrt{2i} = p(1+i)$ nên

$$J_0(z) = A_0\mathrm{e}^{pz}\mathrm{e}^{ipz} + B_0\mathrm{e}^{-pz}\mathrm{e}^{-ipz} \tag{4.26}$$

Số hạng thứ nhất của (4.26) dần tới vô cùng khi z dần tới vô cùng, điều đó không có ý nghĩa vật lý. Vì vậy phải chọn $A_0 = 0$ và (4.26) trở thành

$$J_0(z) = B_0 e^{-pz}e^{-ipz} \tag{4.27}$$

Khi $z = 0$ thì $B_0 = \mathbb{J}_0$ là biên độ của dòng điện tại mặt ngoài của dây dẫn. Do đó

$$J_0(z) = \mathbb{J}_0 e^{-pz}e^{-ipz}$$
$$j_x = J_0(z)\mathrm{e}^{i\omega t} = \mathbb{J}_0 e^{-pz}\mathrm{e}^{i(\omega t - pz)}$$

Biểu diễn dưới dạng lượng giác

$$j_x = \mathbb{J}_0\mathrm{e}^{-pz}\cos(\omega t - pz) \tag{4.28}$$

Như vậy càng đi sâu vào trong dây dẫn thì biên độ dòng điện càng giảm theo quy luật hàm mũ. Ở độ sâu $d = \frac{1}{p}$ biên độ dòng điện giảm đi e lần so với giá trị của nó ở mặt ngoài. Theo (4.25) ta có

$$d = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{1}{\lambda\mu\omega}} = \sqrt{\frac{T}{\pi\lambda\mu}} \tag{4.29}$$

Nhận xét

1. Đối với kim loại $\mu \approx \mu_0$, $\lambda \approx 10^7\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ và với dòng điện có $T = 10^{-5}$s ứng với bước sóng $\ell = cT = 3$km ta tính được $d \approx 0,5$mm. Đối với dòng điện có tần số rất cao ω rất lớn thì $d \to 0$ tức là dòng điện chỉ tập trung ở lớp mỏng bên ngoài của dây dẫn. Đối với dòng điện không đổi $\omega = 0$ thì $d \to \infty$, tức là không có hiệu ứng mặt ngoài.

2. Điện trở của dây dẫn được tính theo công thức

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S}$$

   S là tiết diện dây dẫn. Ở tần số càng cao dòng điện tập trung ở lớp ngoài của dây dẫn nên tiết diện của nó giảm và điên trở của nó tăng. *Tần số dòng điện chảy dây dẫn càng cao càng cao thì điện trở dây dẫn càng lớn.*

3. Năng lượng từ trường của dòng điện là

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

   L là hệ số tự cảm của dây dẫn. Nếu dòng điện chảy theo lớp ngoài của dây dẫn thì từ trường ở bên trong dây dẫn bằng không, còn từ trường ở phía bên ngoài dây không thay đổi. Như vậy năng lượng của từ trường bên trong dây dẫn giảm đi, còn năng lượng của từ trường bên ngoài dây vẫn như cũ. Kết quả là năng lượng toàn phần giảm đi trong khi độ lớn dòng điện không đổi. Nên thì hệ số tự cảm của dây cũng giảm. *Tần số của dòng điện trong chảy dây dẫn càng cao thì hệ số tự cảm của nó càng nhỏ.*

4.4 Năng lượng của các mạch chuẩn dừng

Xuất phát tư phương trình (4.18), nhân hai vế của nó với I_i và lấy tổng theo tất cả các mạch điện ta được:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k + \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i^2}{C_i}\Big) + \sum_i RI_i^2 = \sum_i \mathcal{E}_{(n)i}I_i$$

Hay

$$\frac{dW}{dt} + Q = N_0 \tag{4.30}$$

Trong đó

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k + \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i^2}{C_i} \tag{4.31}$$

là năng lượng từ trường của tất cả các cuộn dây và năng lượng điện trường của tất cả tụ điện trong hệ mạch.

$$Q = \sum_i RI_i^2 \tag{4.32}$$

là nhiệt lượng Joule – Lentz tỏa ra trên tất cả các mạch.

$$N_0 = \sum_i \mathcal{E}_{(n)i} I_i \tag{4.33}$$

(4.30) là biểu thức của định luật bảo toàn năng lượng đối với hệ các mạch chuẩn dừng.

Công suất của trường lạ thực hiện đối với các dòng điện trong hệ mạch bằng sự biến đổi năng lượng trường điện từ trong hệ mạch trong một đơn vị thời gian và nhiệt lượng Joule – Lentz do hệ mạch tỏa ra.

Chương 5

Sóng điện từ

Điện trường và từ trường trong trường điện từ tĩnh và dừng chỉ tồn tại khi có các nguồn là điện tích và dòng điện. Chúng không thể tồn tại biệt lập khỏi nguồn này. Trong trường điện từ chuẩn dừng ta cũng mới chỉ xét hiện tượng cảm ứng điện từ, tức là sự gây ra điện trường do từ trường biến thiên theo thời gian, mà chưa xét đến sự xuất hiện từ trường do điện trường biến thiên. Nhưng đối với trường điện từ biến thiên nhanh ta xét đầy đủ cả hai quá trình tương tác giữa điện trường và từ trường. Do đó trường điện từ biến thiên nhanh có thể tồn tại biệt lập khỏi các nguồn là điện tích và dòng điện dưới dạng sóng điện từ. Sóng điện từ là trường điện từ tự do lan truyền trong không gian hay trường điện từ biến thiên nhanh theo tọa độ và thời gian biệt lập khỏi các nguồn.

5.1 Các phương trình của trường điện từ biến thiên nhanh

5.1.1 Các phương trình của trường biến thiên nhanh

Nếu muốn nghiên cứu sự bức xạ sóng điện từ, tức là nghiên cứu đến những nguyên nhân phát sinh ra sóng điện từ, ta phải dùng các phương trình Maxwell tổng quát nhất, trong đó phải xét đến điện tích và dòng điện

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{5.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{5.4}$$

và các phương trình liên hệ

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

5.1.2 Thế vô hướng và thế vectơ của trường điện từ biến thiên nhanh

Tương tự với trường điện từ chuẩn dừng, khi chỉ có các nguồn điện ta có thể đưa vào thế vô hướng φ và thế vectơ $\vec{A}$ theo các công thức sau:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{5.5}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.6}$$

Dễ thấy rằng thế vô hướng φ và thế vectơ $\vec{A}$ xác định trường điện từ theo (5.5) và (5.6) là không đơn trị. Thật vậy nếu ta cho một hàm vô hướng bất kì của tọa độ và thời gian $u(\vec{r}, t)$ thì

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,u$$

cũng là thế của trường điện từ đó. Thật vậy

$$\vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\,(\vec{A} + \text{grad}\,u) = \text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\text{grad}\,\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad}\Big(\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\vec{A} + \text{grad}\,u\Big) = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

như vậy các thế φ' và $\vec{A}'$ cũng mô tả trường điện từ như các thế φ và $\vec{A}$

Đối với trường điện từ biến thiên nhanh chúng ta sử dụng điều kiện định cỡ Lorentz:

$$\text{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{5.7}$$

5.1.3 Phương trình vi phân của thế vô hướng và thế vectơ

Ta có

$$\text{rot}\mu\vec{H} = \mu\vec{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sử dụng thế vectơ $\vec{A}$ và thế vô hướng φ theo (5.5) và (5.6) ta có

$$\text{rot}\,\text{rot}\vec{A} = \mu\vec{j} + \varepsilon\mu\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(-\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big)$$

$$\text{grad}\,\text{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} - \varepsilon\mu\,\text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad}\Big(\text{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big) = -\mu\vec{j}$$

Sử dụng điều kiện định cỡ Lorentz (5.7) ta có

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \tag{5.8}$$

Thay $\vec{E}$ trong (5.5) vào phương trình $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ ta có

$$\text{div}\Big(-\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\Big) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\text{div}\,\text{grad}\,\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} = \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Theo điều kiện định cỡ Lorentz $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Do đó

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.9}$$

Các phương trình (5.8) và (5.9) được gọi là các phương trình vi phân của thế vectơ và thế vô hướng của trường điện từ biến thiên nhanh.

5.1.4 Nghiệm của phương trình thế. Thế trễ

Các phương trình (5.8) và (5.9) có thể viết chung lại dưới dạng:

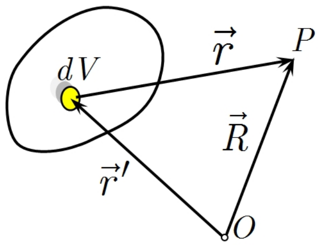
$$\nabla^2\psi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -f(\vec{r}\,', t) \tag{5.10}$$

trong đó ψ là thế vectơ $\vec{A}$ hoặc thế vô hướng φ và $f(\vec{r}\,', t)$ là $\mu\vec{j}$ hoặc $\frac{\rho}{\varepsilon}$. Phương trình (5.10) gọi là phương trình sóng d' Alembert có vế phải.

Nếu $f(\vec{r}\,', t) = 0$ trong toàn thể không gian ta xó phương trình d'Alembert không có vế phải, đó là phương trình của dòng điện từ tự do ta sẽ nghiên cứu sau này. Nếu $f(\vec{r}\,', t) \neq 0$ trong một miền V hữu hạn nào đó của không gian thì nghiệm của phương trình Đalămbe đối với toàn không gian có dạng:

$$\psi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{f\left(\vec{r}\,', t \pm \dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV \tag{5.11}$$

Trong đó $\vec{R}$ là bán kính vectơ của điểm quan sát, t là thời điểm quan sát, $\vec{r}\,'$ là bán kính vectơ của thể tích dV (chứa $\vec{j}$ hoặc ρ), $|\vec{r}| = |\vec{R} - \vec{r}\,'|$ là khoảng cách từ nguyên tố thể tích dV tới điểm quan sát (Hình 5.1) và $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ là vận tốc truyền sóng điện từ.



Hình 5.1:

Trong nghiệm (5.11) hàm $\psi(\vec{R}, t)$ biểu diễn trạng thái điện từ trường và $f\left(\vec{r}\,', t \pm \frac{r}{v}\right)$ là hàm biểu diễn trạng thái nguồn gây ra điện từ trường. Như vậy trạng thái của điện từ trường tại thời điểm t do trạng thái của nguồn tại thời điểm $\left(t \pm \frac{r}{v}\right)$ xác định.

Xét các nghiệm

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV \tag{5.12}$$

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV \tag{5.13}$$

Do đó vi phân thế véctơ $d\vec{A}$ do nguồn nguyên tố $\vec{j}\,dV$ và vi phân thế vô hướng $d\varphi$ do nguồn nguyên tố $\rho\,dV$ gây ra là

$$d\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV$$

$$d\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}\,dV$$

Thế $d\vec{A}$ tại thời điểm t phụ thuộc giá trị của mật độ dòng điện $\vec{j}$ của nguồn tại thời điểm $\left(t-\frac{r}{v}\right)$, tức là trước thời điểm t một khoảng thời gian là $\Delta t=\frac{r}{v}$. Thời gian đó chính là thời gian cần thiết để sóng truyền từ nguồn tới điểm quan sát. Tương tự đối với thế vô hướng $d\varphi$ cũng như vậy.

Trong trường hợp này sự biến thiên của thế tại điểm quan sát xảy ra muộn hơn so với biến thiên của nguồn, cho nên thế tại điểm quan sát được gọi là thế trễ. Thế trễ truyền đi từ nguồn theo mọi phương của không gian.

Xét các nghiệm

$$\vec{A}(\vec{R},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}dV \tag{5.14}$$

$$\varphi(\vec{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}dV \tag{5.15}$$

Do đó vi phân thế véctơ $d\vec{A}$ do nguồn nguyên tố $\vec{j}\,dV$ và vi phân thế vô hướng $d\varphi$ do nguồn nguyên tố $\rho\,dV$ gây ra là

$$d\vec{A}(\vec{R},t)=\frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}dV$$

$$d\varphi(\vec{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\left(\vec{r}\,',t+\dfrac{r}{v}\right)}{r}dV$$

Ta thấy rằng giá trị của thế tại điểm quan sát vào thời điểm t, phụ thuộc giá trị của nguồn vào thời điểm $\left(t+\frac{r}{v}\right)$, tức là sau thời điểm t một khoảng thời gian là $\frac{r}{v}$.

Trong trường hợp này sự biến thiên của thế tại điểm quan sát xảy ra sớm hơn so với biến thiên của nguồn, cho nên thế được gọi là thế sớm. Thế sớm truyền từ mọi phương của không gian về nguồn. Nó không có ý nghĩa vật lí như thế trễ nên nó ít được dùng đến.

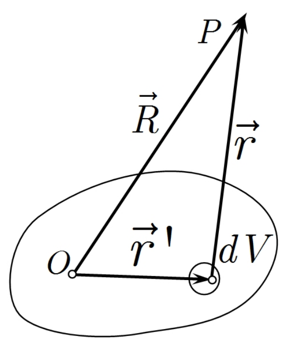
5.2 Sự bức xạ của lưỡng cực

5.2.1 Định nghĩa lưỡng cực bức xạ

Xét hệ điện tích trung hoà nằm trong một miền không gian V, trong đó mật độ điện tích và mật độ dòng điện ở từng điểm biến thiên theo thời gian

$$\rho=\rho\,(\vec{r},t)\,;\quad \vec{j}=\vec{j}\,(\vec{r},t)$$

nhưng không có điện tích và dòng điện đi ra ngoài hoặc vào trong miền V. Một hệ như vậy sẽ là một nguồn bức xạ điện từ. Vì ta có thể coi hệ đó như một lưỡng cực biến thiên theo thời gian, nên nó được gọi là lưỡng cực bức xạ. Chúng ta xét một điểm quan sát P ở cách xa lưỡng cực, và chọn góc toạ độ trong miền V (Hình 5.2). Ta có $R\gg r'$, $r\gg r'$ và $R\approx r$. Giả sử lưỡng cực được đặt trong chân không hoặc trong không khí, trong (5.12) và



Hình 5.2:

(5.13) thay $\varepsilon = \varepsilon_0,\ \mu = \mu_0$ và $v = \mathrm{c} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Sử dụng chúng có thể tính thế của điện từ trường do lưỡng cực bức xạ ra.

5.2.2 Thế vô hướng của lưỡng cực bức xạ

Theo (5.13) ta có

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{r}{\mathrm{c}}\right)}{r}\, dV$$

Vì $r = |\vec{R} - \vec{r}\,'|$ và $r' \ll R$, ta có thể khai triển lượng trong dấu tích phân theo chuỗi Taylor

$$\frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{r}{\mathrm{c}}\right)}{|\vec{R} - \vec{r}\,'|} = \frac{\rho^*}{R} - (\vec{r}\,'\nabla)\frac{\rho^*}{R} + \cdots = \frac{\rho^*}{R} - \nabla\frac{\vec{r}\,'\rho^*}{R} + \cdots$$

trong đó $\rho^* = \rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$. Chú ý rằng trong (5.12) và (5.13) và các công thức khác rút ra từ chúng, tích phân ở vế phải lấy theo dV là hàm của $\vec{r}$, nên khi lấy tích phân ta coi R là hằng số. Do đó

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_V \rho^*\, dV - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{R}\int_V \vec{r}\,'\rho^*\, dV \tag{5.16}$$

tích phân thứ nhất trong vế phải (5.16) bằng không vì hệ là trung hòa. Tích phân thứ hai là giá trị của mômen lưỡng cực của hệ tại thời điểm $\left(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$

$$\int_V \vec{r}\,'\rho^*\, dV = \vec{p}^{\,*} = \vec{p}\Big(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\Big)$$

Do đó (5.16) trở thành

$$\varphi(\vec{R},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec{p}^{\,*}}{R} \tag{5.17}$$

5.2.3 Thế véctơ của lưỡng cực bức xạ

Theo (5.12) ta có

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)}{r}\, dV$$

khai triển hàm dưới dấu tích phân theo chuỗi Taylor

$$\frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)}{r} = \frac{\vec{j}^{\,*}}{R} - (\vec{r}\,'\nabla)\frac{\vec{j}^{\,*}}{R} + \cdots$$

trong đó $\vec{j}^{\,*} = \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{\mathrm{c}}\right)$. khi lấy tích phân số hạng thứ nhất ta có $\frac{1}{R}\int_V \vec{j}^{\,*}\, dV \neq 0$ vì thế ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai và khi đó

$$\vec{A}(\vec{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{j}^{\,*}\, dV$$

Biến đổi tích phân ở vế phải. Lấy đạo hàm theo thời gian $\vec{p}^{\,*} = \int \vec{r}\,'\rho^* \, dV$ ta có

$$\frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = \int_V \vec{r}\,' \frac{\partial \rho^*}{\partial t} \, dV$$

Từ phương trình liên tục $\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{j}^{\,*}$ do đó

$$\frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = -\int_V \vec{r}\,' \mathrm{div}\vec{j}^{\,*} \, dV$$

Nhân hai vế của phương trình trên với véctơ không đổi bất kỳ $\vec{a}^{\,0}$ ta có

$$\vec{a}^{\,0} \frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = -\int_V \left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right) \mathrm{div}\vec{j}^{\,*} \, dV$$

Ta có $-\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right) \mathrm{div}\vec{j}^{\,*} = \vec{j}^{\,*}\mathrm{grad}\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right) - \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}$, trong đó đạo hàm lấy theo $\vec{r}\,'$ nên $-\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right) \mathrm{div}\vec{j}^{\,*} = \vec{a}^{\,0}\vec{j}^{\,*} - \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\}$ do đó

$$\vec{a}^{\,0} \frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = \vec{a}^{\,0} \int_V \vec{j}^{\,*} \, dV - \int_V \mathrm{div}\{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\} \, dV = \vec{a}^{\,0} \int_V \vec{j}^{\,*} \, dV - \oint_S \{\left(\vec{a}^{\,0}\vec{r}\,'\right)\vec{j}^{\,*}\} \, d\vec{S}$$

Vì không có dòng điện chảy qua mặt kín S bao quanh thể tích V nên tích phân thứ hai bằng không nên $\vec{a}^{\,0}\frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = \vec{a}^{\,0}\int_V \vec{j}^{\,*} \, dV$ hay

$$\int_V \vec{j}^{\,*} \, dV = \frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t}$$

Do đó

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{\partial \vec{p}^{\,*}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\vec{p}}^{\,*} \tag{5.18}$$

5.2.4 Điện từ trường của dao động tử tuyến tính

Lưỡng cực bức xạ đơn giản nhất là dao động tử Hertz, nó gồm hai hòn bi nhỏ bằng kim loại nối với nhau bằng một dây dẫn. Khi truyền cho hai hòn bi đó hai điện tích bằng nhau và ngược dấu, rồi dùng dây dẫn nối chúng lại, sẽ diễn ra một quá trình dao động điện. Điện tích trên mỗi hòn bi sẽ giảm dần đến không và đổi dấu, tăng dần đến cực đại, rồi lại giảm dần đến không và đổi dấu v.v..., trong dây dẫn có một dòng điện biến thiên tuần hoàn. Nếu điểm quan sát ở xa dao động tử, điện từ trường của dao động tử có thể được coi như điện từ trường của một lưỡng cực có mômen lưỡng cực biến thiên tuần hoàn.

Dao động tử tuyến tính là một dao động tử mà mômen lưỡng cực có phương cố định. Mômen lưỡng cực đó biến thiên theo quy luật

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 f(t) \tag{5.19}$$

trong đó $\vec{p}_0$ là một vectơ không đổi, $f(t)$ là một hàm vô hướng tuần hoàn. Chú ý rằng trong những biểu thức của thế vô hướng (5.17) và thế vectơ (5.18) ta phải tính toán với $\vec{p}^{\,*} = \vec{p}_0 f^*$, với $f^* = f(t') = f(t - \frac{R}{c})$. Khi lấy đạo hàm theo thời gian ta có

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t'} \tag{5.20}$$

Lấy đạo hàm theo toạ độ ta có $\nabla f^* = \frac{\partial f^*}{\partial t}\nabla t'$, do $\nabla t' = \frac{1}{\mathrm{c}}\nabla R = -\frac{\vec{n}}{\mathrm{c}}$, trong đó $\vec{n}$ là vectơ đơn vị theo phương của $\vec{R}$ nên:

$$\nabla f^* = -\frac{\vec{n}}{\mathrm{c}}\frac{\partial f^*}{\partial t'} = -\frac{\vec{n}}{\mathrm{c}}\frac{\partial f^*}{\partial t} = -\frac{\vec{n}}{\mathrm{c}}\dot{f}^* \tag{5.21}$$

Sau đây ta sẽ tính điện từ trường ở miền cách xa giao động tử, ứng với $R \gg r'$. Trong đó ta chỉ cần giữ những số hạng chứa $\frac{1}{R}$, bỏ qua những số hạng chứa $\frac{1}{R^2}$ trở lên, vì $\frac{1}{R^2} \ll \frac{1}{R}$. Áp dụng (5.18) để tính từ trường

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rot}\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R}$$

Ta có rot $\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R} = \left[\nabla \times \frac{\dot{\vec{p}}^*}{R}\right] = \left[\left(\nabla\frac{1}{R}\right) \times \dot{\vec{p}}^*\right] + \frac{1}{R}[\nabla \times \dot{\vec{p}}^*]$, bỏ qua số hạng chứa $\left(\nabla\frac{1}{R}\right)$ còn

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\frac{\dot{\vec{p}}^*}{R} &= \frac{1}{R}\left[\nabla \times \dot{\vec{p}}^*\right] = \frac{1}{R}\left[\nabla \times \left(\vec{p}_0\dot{f}^*\right)\right] = \frac{1}{R}\left[\left(\nabla\dot{f}^*\right) \times \vec{p}_0\right] \\ &= -\frac{1}{R\mathrm{c}}\left[\left(\vec{n}\ddot{f}^*\right) \times \vec{p}_0\right] = \frac{1}{R\mathrm{c}}\left[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\right]\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R\mathrm{c}}[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \tag{5.22}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi R\mathrm{c}}[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \tag{5.23}$$

Áp dụng (5.17) và (5.18) để tính điện trường

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\vec{p}}^*}{R}$$

Ta có $\nabla\,\frac{\vec{p}^*}{R} = \vec{p}^*\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\nabla\vec{p}^*$, bỏ qua số hạng chứa $\nabla\frac{1}{R}$

$$\nabla\frac{\vec{p}^*}{R} = \frac{1}{R}\nabla\vec{p}^* = \frac{\vec{p}_0}{R}\nabla f^* = \frac{\vec{p}_0}{R}\left(\frac{-\vec{n}\dot{f}^*}{\mathrm{c}}\right) = -\frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{R\mathrm{c}}$$

Do đó

$$\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) = -\nabla\left(\frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{R\mathrm{c}}\right) = \frac{\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*}{R}\nabla\frac{1}{R} - \frac{1}{R\mathrm{c}}\nabla(\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*\,)$$

bỏ qua số hạng chứa $\nabla\frac{1}{R}$

$$\nabla\left(\nabla\frac{\vec{p}^*}{R}\right) = -\frac{1}{R\mathrm{c}}\nabla(\vec{n}\,\dot{\vec{p}}^*\,) = -\frac{\vec{n}\,\vec{p}_0}{R\mathrm{c}}\nabla\dot{f}^* = -\frac{\vec{n}\,\vec{p}_0}{R\mathrm{c}}\left(-\frac{\vec{n}\,\ddot{f}^*}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*)}{R\mathrm{c}^2}$$

Do $\frac{1}{\mathrm{c}^2} = \mu_0\varepsilon_0$ nên

$$\vec{E} = \frac{\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*)}{4\pi\varepsilon_0 R\mathrm{c}^2} - \ddot{\vec{p}}^*\frac{\mu_0}{4\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi R}[\vec{n}\,(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*]$$

để ý $[\vec{n}(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*] = \vec{n}(\vec{n}\,\ddot{\vec{p}}^*) - \ddot{\vec{p}}^*(\vec{n}\vec{n}\,) = [\,[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}] \times \vec{n}\,]$ nên

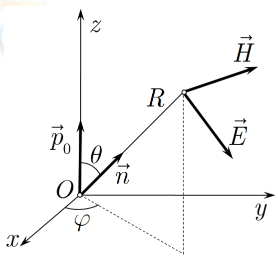
$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\left[[\ddot{\vec{p}}^* \times \vec{n}\,] \times \vec{n}\right] \tag{5.24}$$

5.2.5 Tính chất điện từ trường của dao động tử tuyến tính

Theo (5.23) và (5.24) thì tại điểm quan sát P bất kỳ điện trường $\vec{E}(\vec{R},t)$ và từ trường $\vec{H}(\vec{R},t)$ do dao động tử tuyến tính bức xạ ra là một hàm phụ thuộc vào giá trị của $\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$. Như vậy *điện từ trường do dao động tử tuyến tính bức xạ ra là sóng điện từ truyền từ nguồn (dao động tử) đi ra mọi phương của không gian với vận tốc* c.

Nếu xét ở miền xa nguồn, ta thấy rằng trên mặt cầu bán kính R có tâm tại nguồn sóng thì điện từ trường đều phụ thuộc một giá trị của $\vec{p}\left(t-\frac{R}{c}\right)$. Do đó mặt cầu đó là mặt đồng pha hay mặt sóng. *Sóng điện từ do dao động tử tuyến tính bức xạ ra ở miền xa nguồn là sóng cầu.* Miền ở xa dao động tử được gọi là *miền sóng.*

Theo (5.23) và (5.24) thì điện trường $\vec{E}(\vec{R},t)$ và từ trường $\vec{H}(\vec{R},t)$ phụ thuộc vào phương truyền sóng. Đối với mỗi phương truyền $\vec{n}$ điện trường và từ trường tỉ lệ với $\ddot{p}^*\sin\theta$. Khi $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{p}_0$ thì $\sin\theta=0$ nên $E=H=0$. Khi $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{p}_0$ thì $\sin\theta=1$, bức xạ là cực đại



Hình 5.3:

$$E=E_{\max}=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R};\;\; H=H_{\max}=\frac{\ddot{p}^*}{4\pi R c}$$

Khi bức xạ theo phương bất kỳ thì $0<\sin\theta<1$, lúc đó

$$E=E_{\max}\sin\theta=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R}\sin\theta;\quad H=H_{\max}\sin\theta=\frac{\ddot{p}^*}{4\pi R c}\sin\theta$$

Theo (5.23) và (5.24) thì $\vec{E}(\vec{R},t)$ và $\vec{H}(\vec{R},t)$ *đều vuông góc với phương truyền* $\vec{n}$ và $\vec{E}=\mu_0 c[\vec{H}\times\vec{n}\,]$ hay

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{E}=\sqrt{\mu_0}\,[\vec{H}\times\vec{n}\,]$$

về độ lớn

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,E=\sqrt{\mu_0}\,H$$

Như vậy ở xa nguồn bức xạ sóng điện từ có tính chất của sóng cầu và trong khoảng không gian tương đối nhỏ nó có tính chất của sóng phẳng.

5.2.6 Lưỡng cực bức xạ tuần hoàn

Xét một lưỡng cực bức xạ là một dao động tử tuyến tính dao động theo quy luật

$$\vec{p}=\vec{p}_0\cos\omega t$$

Trong đó ω là tần số dao động của dao động tử[1]. Ta có

$$\ddot{\vec{p}}^*=-\omega^2\vec{p}_0\cos\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)$$

Do đó tại mỗi điểm của không gian ta có

$$E=\frac{\mu_0\ddot{p}^*}{4\pi R}\sin\theta=\frac{\omega^2\mu_0 p_0}{4\pi R}\sin\theta\cos\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)$$

[1]Đó là mẫu đơn giản nhất của nguyên tử bức xạ, hay của ăngten trạm phát sóng vô tuyến

$$H = \frac{\mu_0 \ddot{p}^*}{4\pi R\mathrm{c}} \sin\theta = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi R\mathrm{c}} \sin\theta \cos\omega\Big(t - \frac{R}{\mathrm{c}}\Big)$$

Như vậy tần số bức xạ bằng tần số dao động của lưỡng cực, biên độ của điện trường và từ trường tỉ lệ với ω^2 và tỉ lệ nghịch với khoảng cách R từ điểm quan sát tới nguồn. Mật độ năng lượng tỉ lệ với ω^4 và tỉ lệ nghịch với R^2. Tức là sóng điện từ có tần số càng lớn (bước sóng càng nhỏ) thì năng lượng càng lớn và sóng truyền càng xa thì năng lượng của nó càng giảm.

Để ý khi truyền càng xa nguồn diện tích mặt sóng tăng tỉ lệ với R^2 trong khi mật độ năng lượng giảm tỉ lệ với R^2, người ta tính được thông lượng của véctơ mật độ dòng năng lượng qua mỗi mặt sóng là không đổi, tức là năng lượng không bị mất mát đi. Xét trong toàn không gian thì năng lượng sóng điện từ được bảo toàn.

5.3 Trường điện từ tự do

5.3.1 Các phương trình của trường điện từ tự do

Trường điện từ tồn tại độc lập với điện tích và dòng diện gọi là trường điện từ tự do. Trường điện từ tự do nói chung cũng do điện tích và dòng điện sinh ra nhưng sau khi được hình thành chúng tuân theo quy lật riêng và không phụ thuộc vào nguồn gốc sinh ra chúng nữa.

Các phương trình của trường điện từ tự do (không có điện tích và dòng điện)

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.25}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.26}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0 \tag{5.27}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{5.28}$$

Đối với trường điện từ tự do điện trường và từ trường không tách rời nhau. Chúng đều là các trường xoáy và biến thiên theo thời gian.

Lấy rota hai vế (5.25) ta có $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\,\mathrm{rot}\vec{H}}{\partial t} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, mặt khác $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$ do đó

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.29}$$

Tương tự đối với $\vec{H}$

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.30}$$

Điện trường và từ trường thoả mãn một phương trình như nhau đó là phương trình sóng không có vế phải (phương trình d' Alembert). *Trường điện từ tự do tồn tại dưới dạng sóng điện từ*, không có trường điện từ tự do tĩnh.