

Chương 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Một hàm số f đi từ tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ vào tập số thực $\mathbb{R}$ ($f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$), theo đó với mỗi số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$ cho tương ứng với duy nhất một số thực $x_n \in \mathbb{R}$. Mỗi hàm số như vậy được gọi là một *dãy số thực* và được biểu diễn như sau: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ viết gọn là $\{x_n\}$. Số x_n được gọi là *số hạng tổng quát*.

Ví dụ 1. Cho một hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định như sau: $f(n) = x_n = 1 + 3n$. Ta có $x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 10, x_4 = 13, \dots$ Khi đó ta có dãy số:

$$4, 7, 10, 13, \dots, 1 + 3n, \dots$$

Số hạng tổng quát $x_n = 1 + 3n$.

Định nghĩa 2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ về số thực a nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$. Và khi đó a được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$, kí hiệu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ hay } x_n \rightarrow a \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số sau đây hội tụ về 2017.

$$2018, 2017 + \frac{1}{2}, 2017 + \frac{1}{3}, 2017 + \frac{1}{4}, 2017 + \frac{1}{5}, \dots, 2017 + \frac{1}{n}, \dots$$

Giải. Ta có $x_n = 2017 + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n - 2017 = \frac{1}{n}$. Ta cần chứng minh

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } \forall n > N \text{ thì } |x_n - 2017| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Thật vậy, với mọi ε cho trước ta chọn $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ (là phần nguyên của $\frac{1}{\varepsilon}$), khi đó

$$\forall n > N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 + 1} = 0$.

Giải. Ta cần chứng minh $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N$ thì $\left| \frac{2n}{n^2 + 1} \right| < \varepsilon$. Nhận thấy rằng $\frac{2n}{n^2 + 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, để $\frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$, vậy với mọi ε cho trước ta chọn $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, khi đó $\forall n > N \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2n}{n^2 + 1} < \varepsilon$ (đpcm).

Định nghĩa 3. Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists N(E) \text{ sao cho } \forall n > N(E) \text{ thì } x_n > E.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists N(E) \text{ sao cho } \forall n > N(E) \text{ thì } x_n < -E.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ ($a > 1$).

Giải. Ta cần chứng minh $\forall E > 0, \exists N(E)$ sao cho $\forall n > N(E)$ thì $a^n > E$. Nhận thấy rằng để $a^n > E \Leftrightarrow \ln a^n > \ln E \Leftrightarrow n \ln a > \ln E \Leftrightarrow n > \frac{\ln E}{\ln a}$. Vậy $\forall E > 0$ ta chọn $N(E) = \left\lceil \frac{\ln E}{\ln a} \right\rceil$, khi đó $\forall n > N(E)$ thì $n > \frac{\ln E}{\ln a} \Leftrightarrow a^n > E$ (đpcm).

Định nghĩa 4.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực a sao cho $x_i \leq a, \forall x_i \in \{x_n\}$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực a sao cho $x_i \geq a, \forall x_i \in \{x_n\}$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là nếu tồn tại số thực a sao cho $|x_i| \leq a, \forall x_i \in \{x_n\}$.

1.2. Các định lý về giới hạn của dãy số

1.2.1. Tiêu chuẩn hội tụ 1: Nếu $y_n \leq x_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$ với n_0 là số tự nhiên lớn hơn 0 bất kỳ và $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

1.2.2. Tiêu chuẩn hội tụ 2 (tiêu chuẩn Cauchy): điều kiện cần và đủ để dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \forall n > N \text{ và } \forall p \in \mathbb{N}.$$

1.2.3. Tiêu chuẩn hội tụ 3: Dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

- Dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- Dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

1.2.4. Tính chất và các phép toán:

Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ, khi đó:

- Nếu $y_n \leq x_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ với $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$

1.2.5. Một số giới hạn cơ bản của dãy số:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ với α là hằng số.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^\alpha n} = 0$ với $\alpha > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ với mọi $p \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p} = 1$ với mọi $p \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ với $\alpha > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ với $|q| < 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

Ví dụ 5. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n + 6^n}{2^n + 7^n}$.

$$\text{Giải. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n + 6^n}{2^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \left[\left(-\frac{5}{6} \right)^n + 1 \right]}{7^n \left[\left(\frac{2}{7} \right)^n + 1 \right]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{5}{6} \right)^n + 1}{\left(\frac{2}{7} \right)^n + 1} = 0.1 = 0.$$

Bài 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

Giả sử f là hàm số xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $a \in D$ hoặc $a \notin D$.

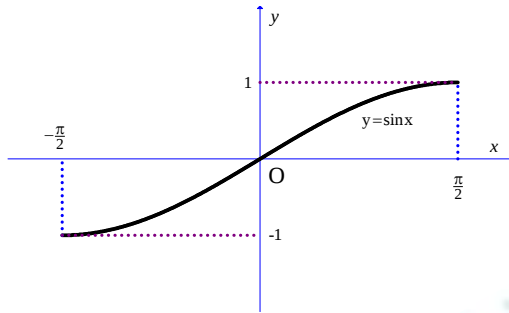
2.1. Giới thiệu các hàm số lượng giác ngược

a. Hàm số $y = \arcsin x$ (Đọc là ac-sinx).

Người ta chứng minh được rằng: $y = \sin x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \Leftrightarrow x = \arcsin y, -1 \leq y \leq 1$.

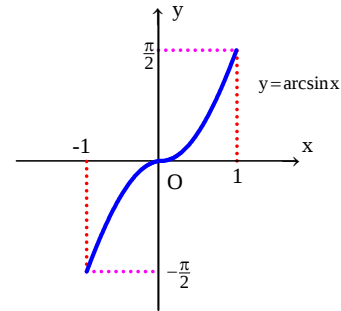
Như vậy, hàm số:

$$f : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1], x \mapsto \sin x$$



có hàm số ngược:

$$f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2], x \mapsto \arcsin x$$

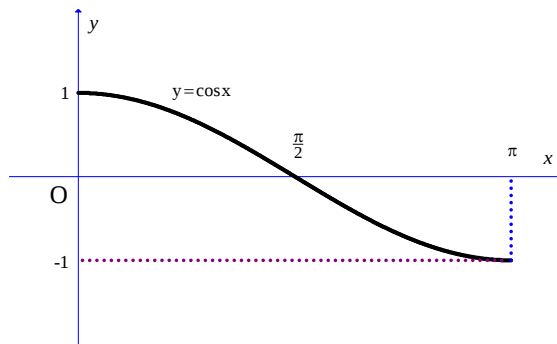


Hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định $[-1; 1]$, miền giá trị $[-\pi/2; \pi/2]$, là hàm số tăng trên $[-1; 1]$.

b. Hàm số $y = \arccos x$ (Đọc là ac-cosx).

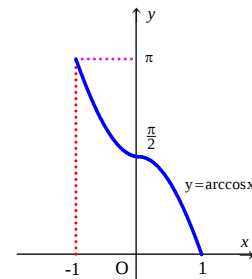
Ta có: $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow x = \arccos y, -1 \leq y \leq 1$.

Vậy, hàm số $f : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1], x \mapsto \cos x$



có hàm số ngược:

$$f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi], x \mapsto \arccos x$$

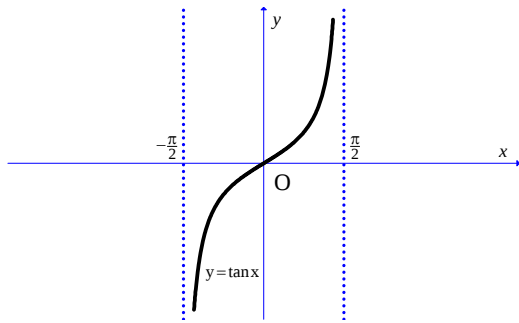


Hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định $[-1; 1]$, miền giá trị $[0; \pi]$, là hàm số giảm trên $[-1; 1]$.

c. Hàm số $y = \arctan x$ (Đọc là ac-tanx).

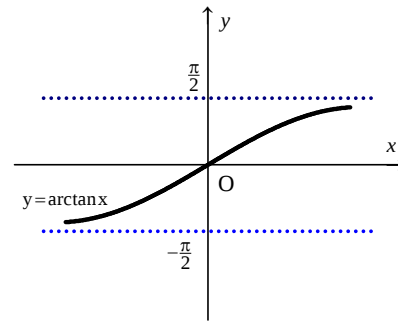
Ta có: $y = \tan x, -\pi/2 < x < \pi/2 \Leftrightarrow x = \arctan y, y \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f : (-\pi/2; \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$



có hàm số ngược:

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2; \pi/2), x \mapsto \arctan x$

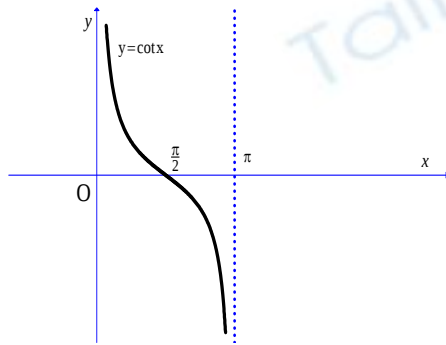


Hàm số $y = \arctan x$ có miền xác định $\mathbb{R}$, miền giá trị $(-\pi/2; \pi/2)$, là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

d. Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ (Đọc là ac-cotx).

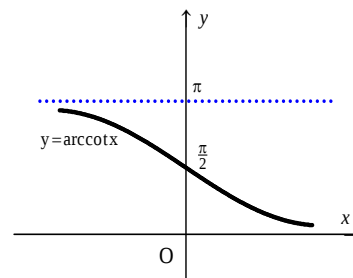
Ta có: $y = \cot x, 0 < x < \pi \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y, y \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cot x$



có hàm số ngược

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi), x \mapsto \operatorname{arccot} x$



Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ có miền xác định $\mathbb{R}$, miền giá trị $(0; \pi)$, là hàm số giảm trên $\mathbb{R}$.

2.2. Định nghĩa giới hạn hàm số

a. Giới hạn tại điểm hữu hạn.

Số $L \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của $f(x)$ tại điểm a nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn $0 < |x - a| < \delta$ thì ta có $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Viết gọn dưới dạng ký hiệu logic:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}.$$

Ví dụ. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9) = 0$. HD: $\forall \varepsilon > 0$, chọn $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

b. Giới hạn một bên.

Ta định nghĩa giới hạn phải, giới hạn trái của $f(x)$ tại a (nếu có) như sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}.$$

Nhận xét. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Ví dụ. Cho $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

c. Giới hạn tại vô cực.

Ta định nghĩa giới hạn của $f(x)$ tại $+\infty$ và $-\infty$ như sau:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in D: x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in D: x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}.$$

Ví dụ. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

HD: $\forall \varepsilon > 0$, lần lượt chọn $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ và $N' > \frac{1}{\varepsilon^3}$.

d. Giới hạn vô cực.

Ta định nghĩa:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \{\forall N > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \{\forall N > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N\}.$$

Ví dụ. Chứng tỏ rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$. HD: $\forall N > 0$, chọn $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{N}}$.

2.3. Tính chất

Tính chất 1. Cho $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$.

Trong đó L_1, L_2 hữu hạn, còn a có thể là hữu hạn hoặc vô cùng. Khi đó:

i) $\lim_{x \rightarrow a} C f_1(x) = C L_1$, với C là hằng số; ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] = L_1 + L_2$;

iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x)] = L_1 L_2$; iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, với $L_2 \neq 0$.

Tính chất 2.

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; với $e \approx 2,718281828$.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$. ĐS: $I = e$.

2.4. Các dạng vô định

a. Dạng $\frac{0}{0}$:

Trường hợp 1. Khi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với P, Q là các đa thức.

+ Nếu $Q(a) \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

+ Nếu $P(a) = 0$; $Q(a) = 0$ thì phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cần giản ước một hoặc vài lần cho $x - a$.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. ĐS: $I = -3$.

Trường hợp 2. Khi $f(x)$ là hàm có chứa các biểu thức vô tỷ, thì bằng cách đặt phép thế để đưa nó về dạng hữu tỷ hoặc biến đổi để đưa biểu thức vô tỷ từ mẫu số lên tử số hoặc ngược lại.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$. ĐS: $I = 2$.

Trường hợp 3. Khi $f(x)$ có chứa các biểu thức lượng giác, thường áp dụng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. ĐS: $I = \frac{1}{2}$.

b. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$:

Khi $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, trong đó $P_m(x), Q_n(x)$ là hai đa thức bậc m và n tương ứng. Ta chia tử số và mẫu số cho x^k , với $k = \max(m; n)$.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 2}{x^5 + 4}$. ĐS: $I = 0$.

c. Dạng $\infty - \infty$:

Để tìm giới hạn của hàm số trong trường hợp này, ta biến đổi để đưa nó về dạng $\frac{0}{0}$

hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, và tiếp theo là áp dụng các phương pháp giải như đã nói ở trên.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$. ĐS: $I = 2$.

d. Dạng $0 \cdot \infty$:

Trong trường hợp này, ta cũng biến đổi để đưa nó về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$. ĐS: $I = \frac{2}{\pi}$.

2.5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

a. Định nghĩa.

Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi $x \rightarrow a$ nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi $x \rightarrow a$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Nghịch đảo của VCB là VCL, và ngược lại.

Ví dụ. $f(x) = x^2$ là một VCB khi $x \rightarrow 0$.

b. Tính chất.

Cho $f_1(x), f_2(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow a$.

(i) Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ thì ta nói VCB $f_1(x)$ có bậc cao hơn VCB $f_2(x)$ và ký hiệu

$$f_1(x) = o(f_2(x)). \text{ Chẳng hạn: } x^2 = o(3x).$$

(ii) Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = C$ (với $C \neq 0$) thì ta nói VCB $f_1(x)$ cùng bậc với VCB $f_2(x)$ và ký

$$\text{hiệu } f_1(x) = O(f_2(x)).$$

Đặc biệt, nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì ta nói rằng VCB $f_1(x)$ tương đương với VCB $f_2(x)$ và ký

hiệu $f_1(x) \sim f_2(x)$ khi $x \rightarrow a$. Chẳng hạn: $\sin x \sim x$ khi $x \rightarrow 0$.

(iii) Nếu khi $x \rightarrow a$, có $f_1(x) \sim f_2(x)$; $g_1(x) \sim g_2(x)$ thì

$$f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x) \text{ và } \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Một số công thức (khi $x \rightarrow 0$):

$\sin x \sim x;$	$\tan x \sim x;$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$	$\ln(1+x) \sim x;$
$e^x - 1 \sim x;$	$a^x - 1 \sim x \ln a;$	$(1+x)^a - 1 \sim ax.$	

Ví dụ. Tính các giới hạn: $A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}$; $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$; $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

$$\text{ĐS: } A = \frac{1}{2}; B = \frac{a^2}{2}; C = -\frac{1}{2}.$$

Bài 3. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

3.1. Hàm số liên tục

Cho f là hàm số xác định trên (a, b) . Ta nói f liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f được gọi là liên tục trên (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc (a, b) .

Ví dụ. $f(x) = x + 2$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chú ý. Người ta còn định nghĩa hàm số liên tục theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ như sau.

$$f \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, b) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$$

3.2. Hàm số gián đoạn.

Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 , được gọi là gián đoạn tại điểm ấy.

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nếu xảy ra 1 trong các khả năng sau:

- + x_0 không thuộc miền xác định của $f(x)$;
- + x_0 thuộc miền xác định của $f(x)$, nhưng $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
- + Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ví dụ. $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0$.

3.3. Tính chất của hàm số liên tục

Tính chất 1. Cho $f(x), g(x)$ là 2 hàm số liên tục trong khoảng (a, b) , khi đó:

- i) $f(x) + g(x)$ liên tục trong (a, b) ;
- ii) $f(x)g(x)$ liên tục trong (a, b) . Đặc biệt $Cf(x)$ liên tục trong (a, b) (với C là hằng số);
- iii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trong (a, b) trừ ra những điểm x làm cho $g(x) = 0$.

Nhận xét. Các hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược, hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm lôgarit liên tục trên miền xác định của chúng.

Ví dụ 1. Khảo sát tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ 1, & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x, & \text{khi } x < 0 \\ 2a + x, & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$

Xác định a để $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$. ĐS: $a = 2$.

Tính chất 2. (Định lý về giá trị trung gian)

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định, liên tục trong (a, b) . Nếu có α, β thỏa mãn $a < \alpha < \beta < b$ và $f(\alpha)f(\beta) < 0$ thì tồn tại một $c \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f(c) = 0$.

Bài 4. ĐẠO HÀM – VI PHÂN

4.1. Định nghĩa đạo hàm

Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 , và được ký hiệu là $f'(x_0)$.

Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên (a, b) nếu f có đạo hàm tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$.

Khi hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 , ta nói f khả vi tại điểm x_0 .

Nhận xét. Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ thì (1.1) trở thành

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Ví dụ. Cho $f(x) = x^2$. Tính đạo hàm của f tại điểm x_0 theo định nghĩa.

Nhận xét. Nếu f là hàm số có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0 .

4.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) . Nếu f khả vi tại x_0 thì $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$.

Từ đó suy ra rằng: Nếu f khả vi tại điểm x_0 thì tiếp tuyến Δ của (C) tại $M_0(x_0, f(x_0))$ có phương trình là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

4.3. Đạo hàm một phía

+ Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $[x_0, b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R},$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm phải của f tại điểm x_0 , và ký hiệu là $f'(x_0^+)$.

+ Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a, x_0]$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R},$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm trái của f tại điểm x_0 , và ký hiệu là $f'(x_0^-)$.

Nhận xét. $f(x)$ khả vi (có đạo hàm) tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

tại điểm $x_0 = 0$.

Giải.

+ Đạo hàm bên trái của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 + x + 1) - e^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

+ Đạo hàm bên phải của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ta thấy $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$. Vậy hàm số đã cho có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ và $f'(0) = 1$.

Ví dụ 2. Cho $f(x) = |x|$. Tính $f'(0^+)$ và $f'(0^-)$.

Giải.

$$\text{Ta có } f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

+ Đạo hàm bên trái của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

+ Đạo hàm bên phải của hàm số tại điểm $x_0 = 0$:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Ta thấy $f'(0^-) \neq f'(0^+)$. Vậy hàm số đã cho không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

Ví dụ 3. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

tại điểm $x_0 = 1$.

Giải. Sinh viên tự làm xem như bài tập.

Ví dụ 4. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm (nếu có) của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

tại điểm $x_0 = 0$.

Giải. Sinh viên tự làm xem như bài tập.

4.4. Quy tắc tính đạo hàm

Giả sử các hàm số u và v có đạo hàm (hữu hạn) tại điểm x . Khi đó các hàm số $u + v$, uv , ku (k là hằng số) có đạo hàm tại điểm x và

$$\begin{aligned} \text{i) } (u + v)' &= u' + v'; & \text{ii) } (uv)' &= u'v + uv'; \\ \text{iii) } (ku)' &= ku'; & \text{iv) } \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ với } v(x) \neq 0; \end{aligned}$$

4.5. Bảng các đạo hàm cơ bản

$C' = 0, (C = \text{const});$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$	$(a^x)' = a^x \ln a;$	$(e^x)' = e^x;$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$	$(\ln x)' = \frac{1}{x};$	$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\text{arc cot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$		

4.6. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x và

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Ví dụ. Tính đạo hàm của hàm số $y = (\sin x + x^2 + x)^{10}$.

4.7. Đạo hàm cấp cao

Cho f là hàm số xác định trên (a, b) và giả thiết f khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$. Nếu $f'(x)$ khả vi thì đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp hai* của $f(x)$, ký hiệu $f''(x)$ hoặc $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Khi đó ta nói f khả vi 2 lần trên (a, b) . Tổng quát hơn, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên (a, b) . f được gọi là khả vi n lần trên (a, b) nếu f là khả vi $n-1$ lần trên (a, b) và $f^{(n-1)}(x)$ cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của f được định nghĩa bởi hệ thức:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Ví dụ. Cho $f(x) = \sin x$. Tính đạo hàm cấp n .

HD: Bằng quy nạp, tìm được: $f^{(n)}(x) = \sin[x + n \cdot (\pi/2)]$.

4.8. Vi phân

a. Định nghĩa.

Xét $y = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại x_0 . Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x = o(\Delta x).$$

Do đó:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (3.3)$$

trong đó $o(\Delta x)$ là vô cùng bé (VCB) có bậc cao hơn Δx .

Giá trị $f'(x_0) \Delta x$ được gọi là vi phân của hàm $y = f(x)$ tại x_0 , và ký hiệu là dy hoặc df .

Vậy:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Xét vi phân của hàm $y = x$ tại x_0 tùy ý. Khi đó $f'(x_0) = 1$ và do đó $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Vì vậy:

$$\boxed{dy = f'(x_0)dx}. \quad (3.4)$$

Đẳng thức trên được gọi là biểu thức vi phân của hàm $y = f(x)$ tại x_0 .

Ví dụ. Tìm vi phân của hàm $y = \sqrt{x} + 2^x - \log_3 x$ tại điểm $x_0 = 4$.

b. Vi phân của tổng, tích và thương.

Từ công thức tính đạo hàm của tổng, tích và thương của hai hàm số suy ra:

$$d(u + v) = du + dv; \quad d(uv) = vdu + u dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

c. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng.

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số khả vi tại x_0 . Theo (3.3) $\Delta y \sim f'(x_0) \cdot \Delta x$ khi $\Delta x \rightarrow 0$.

Vậy khi $|\Delta x|$ khá bé, ta có: $f'(x_0) \cdot \Delta x \approx \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Suy ra:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}. \quad (3.5)$$

Ví dụ. Tính gần đúng $A = \sqrt[4]{15,8}$.

HD: Xét $y = \sqrt[4]{x}$; chọn $x_0 = 16$; $\Delta x = -0,2$; $A \approx 1,9938$.

Bài 5. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG

A. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM

5.1. Các định lý cơ bản về hàm khả vi

a. Định lý Fermat. Giả sử hàm số f xác định trên (a, b) và đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$.

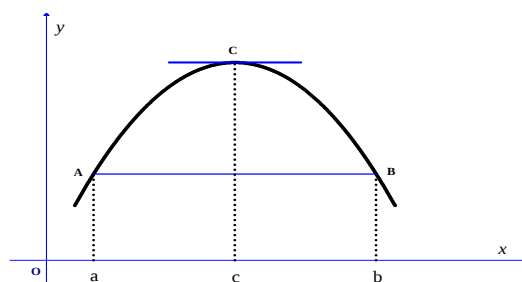
Nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Ý nghĩa hình học: Nếu f đạt cực trị tại x_0 và có đạo hàm tại x_0 thì tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành.

b. Định lý Rolle. Nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = 0. \quad (4.1)$$

Ý nghĩa hình học: Nếu cung AB của đường cong $y = f(x)$, với $A(a; f(a))$ và $B(b; f(b))$, liên tục và có tiếp tuyến tại mọi điểm, đồng thời $f(a) = f(b)$ thì trên cung ấy có ít nhất một điểm C có hoành độ $c \in (a, b)$, ở đó tiếp tuyến song song với trục Ox (cũng song song với dây cung AB).



Ví dụ. Cho $f(x) = (x+3)(x-2)(x-1)$.

i) Phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm?

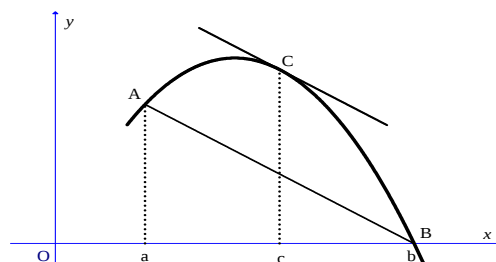
ii) CMR phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-3; 2)$.

c. Định lý Lagrange

Nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (4.2)$$

Ý nghĩa hình học: Nếu cung AB của đường cong $y = f(x)$ với $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, liên tục và có tiếp tuyến tại mọi điểm thì trên cung ấy có ít nhất một điểm C có hoành độ $c \in (a, b)$, ở đó tiếp tuyến song song với dây cung AB.



Nhận xét: Định lý Rolle là một trường hợp riêng của định lý Lagrange. Thật vậy, khi $f(a) = f(b)$ thì từ (5.2) suy ra $f'(c) = 0$.

Ví dụ. Áp dụng định lý Lagrange, CMR: $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

d. Định lý Cauchy. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên (a, b) và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (4.3)$$

Nhận xét: Định lý Lagrange chỉ là trường hợp riêng của định lý Cauchy, vì nếu chọn $g(x) = x$, ta có $g'(x) = 1; g'(c) = 1; g(a) = a; g(b) = b$. Thay vào (4.3), ta được (4.2).

Ví dụ. Hãy khảo sát xem các hàm $f(x) = x^2 - 2x + 3$ và $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ có thỏa mãn điều kiện định lý Cauchy trên đoạn $[1; 4]$ không? Nếu chúng thỏa mãn định lý Cauchy thì hãy tìm điểm $c \in (1; 4)$.

Ta có: + Rõ ràng f, g liên tục trên $[1; 4]$ và có đạo hàm trên $(1; 4)$;

$$+ g'(x) = 3x^2 - 14x + 20 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Vậy f và g thỏa mãn định lý Cauchy, do đó tồn tại $c \in (1; 4)$ thỏa mãn:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} \quad \text{hay} \quad \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20} = \frac{11 - 2}{27 - 9} \Leftrightarrow c^2 - 6c + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Ta chỉ nhận $c = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

5.2. Khử dạng vô định – quy tắc De L'Hospital

a. Dạng vô định $\frac{0}{0}$:

Giả sử f, g là hai hàm số xác định, khả vi trong lân cận U của điểm a (có thể trừ tại a).

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, g'(x) \neq 0, \forall x \in U$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ: $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$. ĐS: $I = 3a$

b. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$:

Giả sử f, g là hai hàm số xác định, khả vi trong lân cận U của điểm a (có thể trừ tại a).

Nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, g'(x) \neq 0, \forall x \in U$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3}$.

c. Dạng vô định $0 \cdot \infty$:

Ta chuyển về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Ví dụ. $I = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$. ĐS: $I = -1$.

d. Dạng vô định $\infty - \infty$:

Ta chuyển về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Ta có thể viết $f(x) - g(x)$ thành một trong các dạng sau:

$$u - v = uv \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right]; \quad u - v = u \left[1 - \frac{v}{u} \right]; \quad u - v = v \left[\frac{u}{v} - 1 \right].$$

Ví dụ. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$. HD: $(e^x - x^2) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right)$; $I = +\infty$.

e. Dạng vô định $0^0, \infty^0, 1^\infty$:

Ta viết $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\ln[f(x)]^{\varphi(x)}} = e^{\varphi(x) \ln f(x)}$.

Ví dụ. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $C = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$.

ĐS: $A = e^3$; $B = e$; $C = e^{-1}$.

5.3. Công thức Taylor

a. Công thức Taylor

Định lý. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp n trong khoảng đóng $[a, b]$ và có đạo hàm cấp $n+1$ trong khoảng mở $(a, b) \ni x_0$ thì tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho với mọi $x \in (a, b)$ ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (4.4)$$

với

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.5)$$

Công thức (4.4) gọi là *công thức Taylor*, số hạng cuối ở vế phải gọi là *số hạng dư Lagrange*. Biểu diễn của hàm số $f(x)$ dưới dạng (4.4) gọi là *khai triển hữu hạn của $f(x)$ ở lân cận điểm x_0* .

Khi $x_0 = 0$, công thức (4.4) trở thành:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (4.6)$$

Công thức (4.6) gọi là *công thức Maclaurin*.

Nhận xét. Công thức (4.4) cho phép biểu diễn $f(x)$ gần đúng với đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ở lân cận điểm x_0 với sai số:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ví dụ. i) Khai triển theo công thức Taylor của hàm $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ tại $x_0 = 2$

ii) Khai triển Maclaurin của hàm e^x đến cấp 3.

b. Bảng các công thức Maclaurin của một số hàm sơ cấp cơ bản

- $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^m, m \in \mathbb{Z}^+.$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}; 0 < \theta < 1.$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}; 0 < \theta < 1.$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}; 0 < \theta < 1.$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}; 0 < \theta < 1.$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}; 0 < \theta < 1.$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x; 0 < \theta < 1.$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x; 0 < \theta < 1.$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$

Đặc biệt:

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ và $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$

Ví dụ. Khai triển Maclaurin hàm $\sqrt[3]{1+x}$ đến cấp 2. Dùng kết quả khai triển, tính xấp xỉ $\sqrt[3]{1,03}.$

HD: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2).$

B. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TÌM NGHIỆM GẦN ĐÚNG

6.1. Mô tả phương pháp

Để áp dụng phương pháp Newton giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$, ta luôn giả thiết $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện: f, f', f'' liên tục trên $[a, b]$; $f(a)f(b) < 0$; mỗi hàm f', f'' đều có dấu cố định (dương hoặc âm) $\forall x \in [a, b]$; ngoài ra $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm.

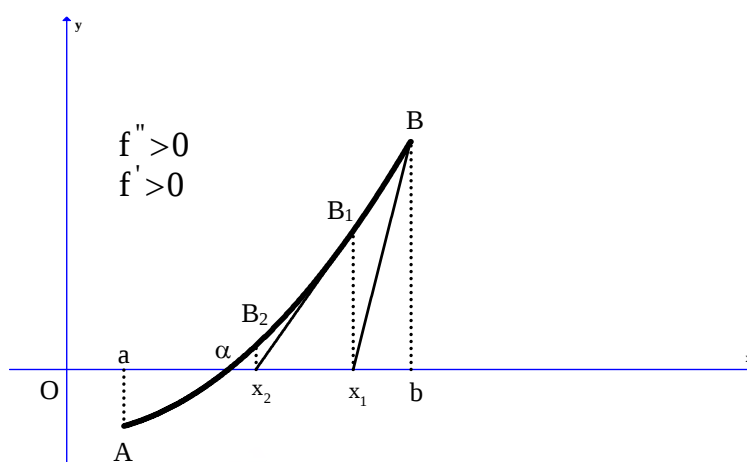
Có 4 trường hợp liên quan đến các tổ hợp về dấu của f', f'' và xác định nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$ như sau:

- i) $f'' > 0, f' > 0$; ii) $f'' > 0, f' < 0$; iii) $f'' < 0, f' < 0$; iv) $f'' < 0, f' > 0.$

Sau đây chúng ta chỉ mô tả cho trường hợp $f'' > 0$, $f' > 0$, các trường hợp còn lại là tương tự.

Ý tưởng của phương pháp Newton là tìm cách thay phương trình phi tuyến $f(x) = 0$, bằng *phương trình gần đúng tuyến tính*, cụ thể hơn là bằng *phương trình tiếp tuyến*. Cho nên phương pháp Newton còn có tên là **phương pháp tiếp tuyến**.

Vấn đề là chọn tiếp tuyến với tiếp điểm nào để giao điểm của nó với trục hoành thuộc (a, b) ?



Trên hình vẽ, nếu ta chọn tiếp tuyến với tiếp điểm tại A thì giao điểm của nó với trục hoành nằm ngoài $[a, b]$. Vậy ta xét tiếp tuyến với tiếp điểm tại B và chọn $x_0 = b$ (lưu ý rằng ta chọn x_0 sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f''). Phương trình của tiếp tuyến này là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Để tìm giao điểm của nó với trục hoành, ta thay $y = 0$ vào đẳng thức trên, tìm được:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Gọi $B_1(x_1; f(x_1))$, ta có cung AB_1 thu hẹp của cung AB. Tiếp tục xét tiếp tuyến với tiếp điểm tại điểm $B_1(x_1; f(x_1))$ và lặp lại bước tìm giao điểm của tiếp tuyến này với trục

hoành, ta tìm được $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, v.v ... và một cách tổng quát:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.1)$$

Dừng lại ở bước tính thứ n xác định nào đó, ta được x_n và xem x_n là giá trị gần đúng của nghiệm α .

Định lý sau đây đảm bảo cho sự hội tụ của dãy x_n và sai số của phương pháp.

6.2. Định lý về sự hội tụ và sai số

Định lý. Giả sử $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$; f, f', f'' liên tục trên $[a, b]$; $f(a)f(b) < 0$; mỗi hàm f', f'' đều có dấu cố định $\forall x \in [a, b]$. Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f'' . Khi đó x_n được tính bởi (8.1) hội tụ về α

khi $n \rightarrow +\infty$, cụ thể hơn ta có dãy x_n đơn điệu giảm tới α khi $f'f'' > 0$; và dãy x_n đơn điệu tăng tới α khi $f'f'' < 0$.

$$\text{Về sai số: } |\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \text{ với } 0 < m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

6.3. Ví dụ. Tìm nghiệm α gần đúng của phương trình $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ thuộc $[3;4]$, với độ chính xác tới 0,01.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$; $f''(x) = 6x - 4$; $f(3) = -10 < 0$; $f(4) = 9 > 0$;

Dễ thấy $f' > 0, f'' > 0$ trên $[3;4]$ và bài toán thỏa mãn các điều kiện của phương pháp Newton.

+ Chọn $x_0 = 4$, khi đó $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} \approx 3,7$ và $f(x_1) = f(3,7) = 1,473$.

Kiểm tra điều kiện sai số: $|\alpha - x_1| \leq \frac{|f(x_1)|}{m} < 0,01$?

với $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = \min_{3 \leq x \leq 4} |3x^2 - 4x - 4| = 11$.

Vì $|\alpha - x_1| \leq \frac{|f(x_1)|}{m} < \frac{1,473}{11} \approx 0,14$, nên không thỏa mãn bất đẳng thức trên. Như vậy giá trị $x_1 \approx 3,7$ chưa thỏa mãn độ chính xác đặt ra.

+ Tiếp tục tính x_2 :

$$x_2 = 3,7 - \frac{f(3,7)}{f'(3,7)} \approx 3,7 - 0,066 = 3,634; \quad f(x_2) = f(3,634) \approx 0,042.$$

Kiểm tra sai số: $|\alpha - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{m} < \frac{0,042}{11} \approx 0,004 < 0,01$.

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình đã cho là $x_2 = 3,634$, thỏa mãn độ chính xác đặt ra.

Nhận xét:

+ Trong thực tế người ta dừng lại quá trình tính khi: $|x_n - x_{n-1}| < \text{sai số cho phép } \varepsilon$.

+ Phương pháp Newton *hội tụ nhanh hơn* phương pháp chia đôi.

6.4. Tóm tắt phương pháp: (theo thuật toán)

Bước 1: + Cho phương trình $f(x) = 0$.

+ Kiểm tra các điều kiện: f, f', f'' liên tục trên $[a, b]$; $f(a)f(b) < 0$; mỗi hàm f', f'' đều có dấu cố định $\forall x \in [a, b]$; $[a, b]$ là khoảng phân ly nghiệm.

+ Ấn định sai số cho phép ε .

Bước 2: Chọn x_0 là a hoặc b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f'' .

Bước 3: + Tính $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

- + Tính $e = |x_1 - x_0|$.
- + Nếu $e \leq \varepsilon$ thì kết luận: $\alpha \approx x_1$, với sai số cho phép ε .
- + Nếu $e > \varepsilon$ thì quay lại bước 2.

TaiLieu.vn