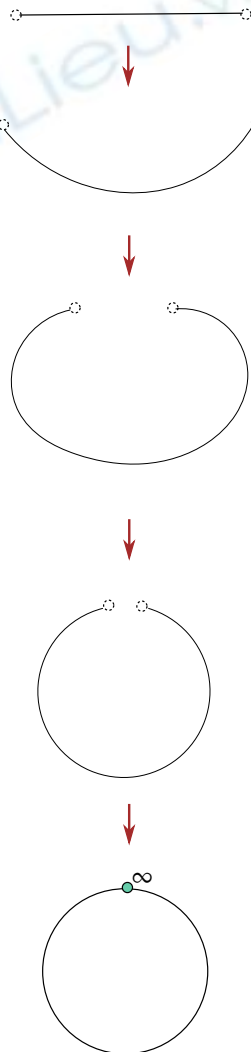


Bài giảng Tôpô

Huỳnh Quang Vũ

Phiên bản 30 tháng Tám, 2018



Đây là tập bài giảng phục vụ cho một chuỗi các buổi học giới thiệu về môn tôpô cho sinh viên tại Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh. Nó được viết để tác giả trình bày cho các sinh viên của mình. Tác giả không viết nó để nhắm đến với các giảng viên khác hay những người đọc tự học.

Khi viết các bài giảng này tác giả dự định rằng nhiều sự giải thích và thảo luận hơn sẽ được triển khai tại lớp. Bằng cách ưu tiên trình bày những vấn đề thiết yếu, tác giả hy vọng bài giảng sẽ phù hợp hơn để sử dụng trong lớp học. Một số chi tiết sẽ được để dành cho các bạn sinh viên tự hoàn chỉnh hoặc để thảo luận ở lớp.

Dấu ✓ trước một vấn đề nhằm lưu ý người đọc rằng vấn đề đó là điển hình, hoặc quan trọng (là một kết quả sẽ được dùng về sau). Các vấn đề được đánh dấu * là tương đối khó hơn.

Phiên bản mới nhất của tập bài giảng này được viết bằng tiếng Anh, cập nhật tại địa chỉ <http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/n.pdf>, và file nguồn có ở <http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/n.zip>.

Bản dịch tiếng Việt Phần Tôpô Đại cương này là của Lê Chiêu Hoàng Nguyên, tháng 10 năm 2018.

Địa chỉ: Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Email: hqvu@hcmus.edu.vn

This work is released to Public Domain (CC0) wherever applicable, see <http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>, otherwise it is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License, see <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Tailieu.vn

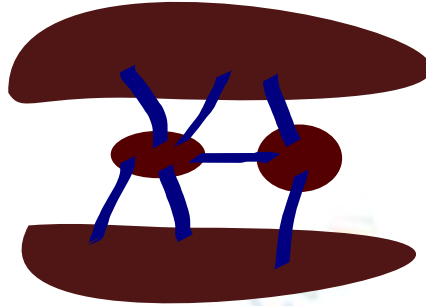
Mục lục

Giới thiệu	1
I Tôpô đại cương	3
1 Tập hợp vô hạn	5
2 Không gian tôpô	13
3 Sự liên tục	19
4 Sự liên thông	25
5 Sự hội tụ	33
6 Không gian compac	40
7 Tích của các không gian	47
8 Hàm thực và các Không gian hàm	54
9 Không gian thương	61
Một số đề tài khác	73
Gợi ý cho một số bài tập	75
Tài liệu	78

TaiLieu.vn

Giới thiệu

Tôpô (Topology) là một ngành toán học nghiên cứu về các hình dạng. Một tập hợp sẽ trở thành một không gian tôpô (topological space) nếu mỗi phần tử của nó được cho một lớp các lân cận (neighborhoods). Trên các không gian tôpô các phép toán phải liên tục, nghĩa là, mang các lân cận nhất định vào các lân cận. Một điều thú vị là ở đây lại không có khái niệm khoảng cách. Tôpô là một phần của Hình học mà ở đó không đề cập đến khoảng cách.



Hình 0.1: Có thể nào thực hiện được một chuyến đi kín sao cho mỗi cây cầu được băng qua đúng một lần duy nhất? Đây là bài toán “Bảy cây cầu ở Königsberg”, được nghiên cứu bởi Leonard Euler vào thế kỷ 18. Ta thấy rằng vấn đề này chẳng phụ thuộc gì đến kích thước của những cây cầu.

Đặc trưng của ngành Tôpô

Các phép toán trên các đối tượng tôpô được nới lỏng hơn so với trong hình học: bên cạnh việc di chuyển quen thuộc, tôpô còn cho phép thực hiện các động tác như kéo giãn hay uốn cong, vốn không được phép trong hình học. Ví dụ, trong Tôpô, mọi đường tròn - cho dù to nhỏ hay được đặt ở bất cứ đâu - đều như nhau. Mọi đường ellipse và đường tròn là như nhau. Tuy vậy, mặt khác, trong tôpô sự xé hay phá vỡ là không được phép: đường tròn vẫn khác đường thẳng. Các phép toán tôpô, dù linh hoạt hơn, vẫn gìn giữ một vài tính chất thiết yếu của các không gian.

Những đóng góp của ngành Tôpô

Tôpô cung cấp những khái niệm cơ bản cho toán học khi xuất hiện nhu cầu về khái niệm liên tục. Nó tập trung vào một số tính chất thiết yếu của các không gian, do đó được sử dụng trong việc nghiên cứu định tính. Nó có thể hữu dụng khi các metric hay tọa độ là không sẵn có, không tự nhiên, hoặc không cần thiết.

Tôpô thường không đứng một mình: có nhiều ngành như Tôpô đại số (Algebraic topology), Tôpô vi phân (Differential topology), Tôpô hình học (Geometric topology), Tôpô tổ hợp (Combinatorial topology), Tôpô lượng tử (Quantum topology), ... Tôpô không thường tự mình giải quyết các vấn đề, mà nó đóng góp một sự hiểu biết căn bản cùng những sự thiết lập và công cụ quan trọng. Tôpô đóng một vai trò nổi bật trong Hình học vi phân, Giải tích toàn cục, Hình học đại số, Vật lý lý thuyết...

TaiLieu.vn

Phần I Tôpô đại cương

1 Tập hợp vô hạn

Tôpô đại cương, hay còn gọi là tôpô tập điểm, nghiên cứu về những điều căn bản của lân cận, giới hạn, và sự liên tục – những khái niệm cơ bản được sử dụng xuyên suốt toàn bộ toán học. Trong Tôpô đại cương chúng ta thường làm việc với những sự thiết lập rất tổng quát. Nói riêng, ta thường đề cập đến những tập hợp vô hạn.

Ta sẽ không định nghĩa tập hợp là gì. Nói cách khác, ta sẽ làm việc trong khuôn khổ của “lí thuyết tập hợp ngây thơ”, được đề xuất bởi Georg Cantor vào cuối thế kỷ 19. Những khái niệm quen thuộc như hội, giao, ảnh xạ, tích Descartes của hai tập ... sẽ được sử dụng mà không nhắc lại định nghĩa. Ta cũng sẽ không quay lại định nghĩa của tập hợp các số tự nhiên và tập hợp các số thực.

Mặc dù vậy, chúng ta cần biết một số vấn đề nhất định trong lí thuyết tập hợp ngây thơ này.

Ví dụ (nghịch lí Russell). Xét tập hợp $S = \{x \mid x \notin x\}$ (là tập tất cả các tập hợp không là phần tử của chính nó). Ta không thể kết luận được rằng $S \in S$ hay không, vì trả lời có hoặc không đều dẫn tới mâu thuẫn.¹

Các hệ tiên đề cho lí thuyết tập hợp đã được phát triển kể từ đó. Trong hệ tiên đề Von Neumann–Bernays–Gödel, một khái niệm tổng quát hơn tập hợp, gọi là **lớp** (class), được sử dụng. Trong môn học này, chúng ta không phân biệt các khái niệm tập hợp, lớp, hay **họ** (collection), nhưng mỗi khi đề cập đến “tập các tập hợp”, khái niệm **họ** sẽ thường được ưu tiên. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm ở [End77, p. 6], [Dug66, p. 32].

Họ được đánh chỉ số

Một ánh xạ $f : I \rightarrow A$, với I là một tập hợp và A là một họ, được gọi là một họ được đánh chỉ số. Ta thường viết $f_i = f(i)$, và ký hiệu họ f bằng $(f_i)_{i \in I}$ hoặc $\{f_i\}_{i \in I}$. Chú ý rằng có thể xảy ra $f_i = f_j$ khi $i \neq j$.

Ví dụ. Một dãy các phần tử trong tập hợp A là một họ các phần tử của A được đánh chỉ số bởi tập $\mathbb{Z}^+$ các số nguyên dương, và thường được viết là $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

Quan hệ

Một **quan hệ** (relation) R trên tập hợp S là một tập con khác rỗng của tập hợp $S \times S$.

Khi $(a, b) \in R$, ta nói a quan hệ với b và thường viết $a \sim_R b$.

Một quan hệ được gọi là:

- (a) phản xạ (reflexive) nếu $\forall a \in S, (a, a) \in R$.
- (b) đối xứng (symmetric) nếu $\forall a, b \in S, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
- (c) phản đối xứng (anti-symmetric) nếu $\forall a, b \in S, ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b$.
- (d) bắc cầu (transitive) nếu $\forall a, b, c \in S, ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R$.

Một **quan hệ tương đương** (equivalence relation) trên S là một quan hệ thỏa các tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

¹Được tìm ra vào năm 1901 bởi Bertrand Russell. Một phiên bản nổi tiếng của nó là nghịch lí thợ cắt tóc: Trong một ngôi làng nọ có một anh thợ cắt tóc cho dân làng; công việc của anh ta là cắt tóc cho ai khi và chỉ khi người đó không tự cắt tóc cho mình. Xét nhóm gồm tất cả những người dân trong làng được anh thợ cắt tóc cho. Hỏi rằng bản thân anh thợ có thuộc nhóm này không?

Nếu R là một quan hệ tương đương trên S thì một **lớp tương đương** (equivalence class) được đại diện bởi $a \in S$ là tập hợp $[a] = \{b \in S \mid (a, b) \in R\}$. Hai lớp tương đương thì hoặc trùng nhau hoặc rời nhau, do đó tập S được phân hoạch thành một hội rời các lớp tương đương của nó.

Thứ tự

Một **thứ tự** (order) trên tập S là một quan hệ R trên S thỏa các tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Chú ý rằng hai phần tử a và b bất kỳ không nhất thiết so sánh được với nhau, nghĩa là, cặp (a, b) không nhất thiết thuộc R . Bởi lý do này một thứ tự thường được gọi là một thứ tự một phần.

Khi $(a, b) \in R$ ta thường viết $a \leq b$. Nếu $a \leq b$ và $a \neq b$, ta viết $a < b$.

Nếu mỗi hai phần tử bất kỳ của S đều so sánh được với nhau thì thứ tự được gọi là **thứ tự toàn phần** (total order) và $(S, \leq)$ được gọi là một **tập hợp được sắp toàn phần** (totally order set).

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực với thứ tự thông thường $\leq$ là một tập được sắp toàn phần.

Ví dụ. Cho tập hợp S . Ta ký hiệu **họ tất cả các tập hợp con** của S bởi $\mathcal{P}(S)$ hoặc 2^S . Với quan hệ bao hàm, $(2^S, \subseteq)$ là một tập được sắp một phần, và không được sắp toàn phần nếu S có hơn một phần tử.

Ví dụ. Cho $(S_1, \leq_1)$ và $(S_2, \leq_2)$ là hai tập hợp được sắp. Quan hệ $\leq$ sau đây là một thứ tự trên $S_1 \times S_2$: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ nếu $(a_1 <_1 a_2)$ hoặc $((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \leq_2 b_2))$. Đây được gọi là **thứ tự từ điển** (dictionary order).

Trong một tập hợp được sắp, **phần tử nhỏ nhất** (smallest element) là phần tử nhỏ hơn mọi phần tử khác. Một cách chính xác, với S là một tập được sắp, phần tử nhỏ nhất của S là phần tử $a \in S$ thỏa $a \leq b, \forall b \in S$. Phần tử nhỏ nhất, nếu tồn tại, là duy nhất.

Phần tử cực tiểu (minimal element) là phần tử không có phần tử nào nhỏ hơn. Chính xác hơn, một phần tử cực tiểu của S là phần tử $a \in S$ thỏa $\forall b \in S, b \leq a \Rightarrow b = a$. Có thể có nhiều hơn một phần tử cực tiểu.

Một **chặn dưới** (lower bound) của tập con của một tập được sắp thứ tự là một phần tử nhỏ hơn hoặc bằng mọi phần tử trong tập con đó. Một cách chính xác, nếu $A \subset S$ thì một chặn dưới của A trong S là một phần tử $a \in S$ sao cho $\forall b \in A, a \leq b$.

Các khái niệm phần tử lớn nhất, phần tử cực đại, và chặn trên được định nghĩa tương tự.

Sự tương đương tập hợp

Hai tập hợp được gọi là **tương đương** (set-equivalent) nếu có một song ánh từ một tập đến tập kia.

Một tập hợp được gọi là **hữu hạn** nếu tập đó hoặc rỗng hoặc tương đương với một tập con $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ nào đó của tập $\mathbb{Z}^+$ tất cả các số nguyên dương. Một cách chính xác, tập hợp S là hữu hạn nếu $S = \emptyset$ hoặc tồn tại $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho S tương đương với tập $\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq N\}$.

Nếu một tập hợp là không hữu hạn, ta nói nó vô hạn.

Một tập hợp được gọi là **vô hạn đếm được** (countably infinite) nếu nó tương đương với $\mathbb{Z}^+$. Một tập được gọi là **đếm được** (countable) nếu nó hoặc hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

Một cách trực quan, một tập vô hạn đếm được có thể được “đếm” bằng các số nguyên dương. Các phần tử của một tập như vậy có thể được đánh chỉ số bằng tập $\mathbb{Z}^+$ như một dãy $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{Z}$ tất cả các số nguyên là đếm được. Ta có thể đếm, chẳng hạn, luân phiên số dương rồi số âm, bởi

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^+ &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ chẵn}, \\ \frac{1-n}{2}, & n \text{ lẻ}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ánh xạ ngược mang mỗi số nguyên dương thành một số chẵn, và mỗi số nguyên âm thành một số lẻ:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}^+ \\ m &\mapsto n = \begin{cases} 2m, & m > 0, \\ -2m + 1, & m \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mệnh đề. Tập con của một tập hợp đếm được thì đếm được.

Chứng minh. Phát biểu trên tương đương với phát biểu rằng tập con của $\mathbb{Z}^+$ thì đếm được. Giả sử A là một tập con vô hạn của $\mathbb{Z}^+$. Gọi a_1 là số nhỏ nhất trong A . Bằng quy nạp, gọi a_n là số nhỏ nhất trong $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Khi đó $a_{n-1} < a_n$, và $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ là một tập con vô hạn đếm được của A .

Ta chứng tỏ rằng mọi phần tử m của A là một a_n với n nào đó, và do đó $B = A$.

Gọi $C = \{a_n \mid a_n \geq m\}$. Ta có $C \neq \emptyset$ do B vô hạn. Đặt $\min C = a_{n_0}$. Ở đây, lưu ý rằng ta đang sử dụng **tính sắp tốt** của tập tất cả các số nguyên dương: mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất. Ta có $a_{n_0} \geq m$. Hơn nữa, do $a_{n_0-1} < a_{n_0}$ nên $a_{n_0-1} \notin C$, nghĩa là $a_{n_0-1} < m$. Suy ra $m \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$. Vì $a_{n_0} = \min(A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\})$ nên ta phải có $a_{n_0} \leq m$. Do đó $a_{n_0} = m$. $\square$

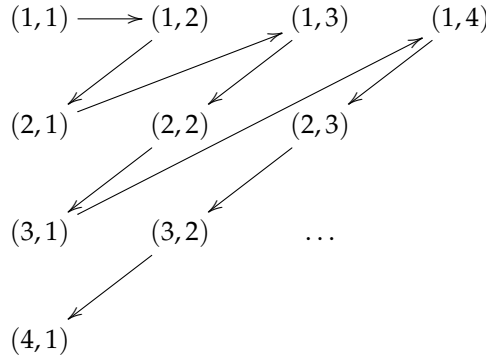
Hệ quả. Nếu tồn tại một đơn ánh từ tập S vào $\mathbb{Z}^+$ thì S đếm được.

1.1 Mệnh đề. Nếu tồn tại một toàn ánh từ $\mathbb{Z}^+$ tới một tập S thì S đếm được.

Chứng minh. Giả sử tồn tại một toàn ánh $\phi : \mathbb{Z}^+ \rightarrow S$. Với mỗi $s \in S$, tập $\phi^{-1}(s)$ là khác rỗng. Gọi $n_s = \min \phi^{-1}(s)$. Vì ánh xạ $s \mapsto n_s$ là một đơn ánh từ S tới $\mathbb{Z}^+$, nên S đếm được. $\square$

Mệnh đề. $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ đếm được.

Chứng minh. Ta có thể đánh chỉ số $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ bằng cách đếm dọc theo các đường chéo, chẳng hạn ta đề xuất một cách được minh họa bằng sơ đồ dưới đây:



Để chi tiết ta có thể dẫn ra một công thức tường minh cho phép đếm trên:

$$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

$$(m, n) \mapsto (1 + 2 + \cdots + ((m + n - 1) - 1)) + m = \frac{(m + n - 2)(m + n - 1)}{2} + m.$$

Ta kiểm tra tính đơn ánh cho ánh xạ này. Đặt $k = m + n$. Giả sử $\frac{(k-2)(k-1)}{2} + m = \frac{(k'-2)(k'-1)}{2} + m'$. Nếu $k = k'$ thì phương trình nhất định sẽ dẫn đến $m = m'$ và $n = n'$. Nếu $k < k'$ thì

$$\begin{aligned} \frac{(k-2)(k-1)}{2} + m &\leq \frac{(k-2)(k-1)}{2} + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2} < \\ &< \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq \frac{(k'-2)(k'-1)}{2} + m', \end{aligned}$$

mâu thuẫn. □

1.2 Định lý. *Hội của một họ đếm được các tập đếm được thì đếm được.*

Chứng minh. Một họ như vậy có thể được đánh chỉ số $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ (nếu họ là hữu hạn thì ta có thể cho các A_i trùng nhau với mọi i từ một chỉ số nào đó trở đi). Các phần tử của mỗi tập A_i có thể được đánh chỉ số $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,j}, \dots$ (nếu A_i hữu hạn thì ta có thể cho các $a_{i,j}$ trùng nhau với mọi j từ một chỉ số nào đó trở đi). Cách đánh chỉ số trên định nghĩa một toàn ánh từ tập chỉ số $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tới hội $\bigcup_{i \in I} A_i$, cho bởi $(i, j) \mapsto a_{i,j}$. □

Định lý. *Tập hợp $\mathbb{Q}$ tất cả các số hữu tỉ là đếm được.*

Chứng minh. Ta có thể chứng minh kết quả trên bằng cách viết $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$, sau đó sử dụng 1.2.

Một cách khác, quan sát rằng nếu ta viết mỗi số hữu tỉ dưới dạng $\frac{p}{q}$ với $q > 0$ và $\gcd(p, q) = 1$ thì ánh xạ $\frac{p}{q} \mapsto (p, q)$ từ $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là đơn ánh. □

1.3 Định lý. *Tập hợp $\mathbb{R}$ tất cả các số thực là không đếm được.*

Chứng minh. Đây là **lí luận đường chéo của Cantor** (Cantor diagonal argument). Ta sử dụng tính chất rằng mọi số thực có thể được viết dưới dạng thập phân. Chú ý rằng có những số thực mà biểu diễn thập phân của chúng là không duy nhất, chẳng hạn $\frac{1}{2} = 0.5000\dots = 0.4999\dots$ (Xem 1.17 tham khảo thêm về chủ đề này.)

Giả sử tập tất các số thực trong đoạn $[0, 1]$ là đếm được, và được đánh số như một dãy $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}^+\}$. Ta viết

$$a_1 = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} \dots$$

$$a_2 = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3} \dots$$

$$a_3 = 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3} \dots$$

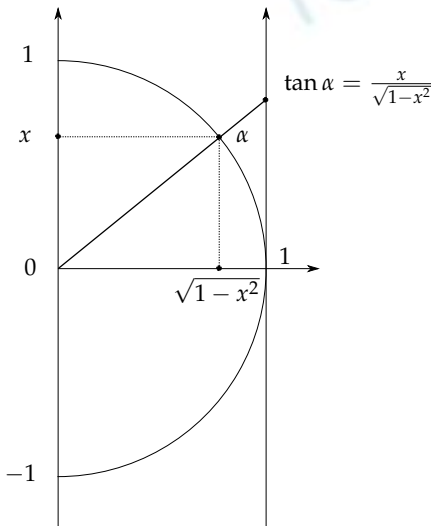
$$\vdots$$

Chọn một số $b = 0.b_1b_2b_3 \dots$ sao cho $b_n \neq 0;9$ và $b_n \neq a_{n,n}$. Ta có $b \neq a_n$ với mọi n . Do đó số b không nằm trong bảng trên, mâu thuẫn. $\square$

Ví dụ. Hai đoạn $[a, b]$ và $[c, d]$ trên đường thẳng thực là tương đương. Một song ánh có thể được đề xuất là hàm tuyến tính $x \mapsto \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$. Tương tự, hai khoảng (a, b) và (c, d) là tương đương.

1.4 Ví dụ. Khoảng $(-1, 1)$ tương đương với $\mathbb{R}$ thông qua một ánh xạ có liên hệ với hàm tan:

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



1.5 Định lý. Tập hợp khác rỗng thì không tương đương với tập tất cả các tập con của nó. Đặc biệt hơn, nếu $S \neq \emptyset$ thì không tồn tại toàn ánh nào từ S tới 2^S .

Chú ý rằng tồn tại đơn ánh từ S vào 2^S , chẳng hạn $a \mapsto \{a\}$.

Chứng minh. Gọi ϕ là một ánh xạ bất kỳ từ S tới 2^S . Đặt $X = \{a \in S \mid a \notin \phi(a)\}$. Giả sử có $x \in S$ sao cho $\phi(x) = X$. Khi đó chân trị của phát biểu $x \in X$ (đúng hay sai) là không thể quyết định. Mâu thuẫn. Do đó không tồn tại $x \in S$ nào sao cho $\phi(x) = X$, nên ϕ không toàn ánh. $\square$

Kết quả này nói lên rằng mọi tập hợp đều “nhỏ hơn” tập tất cả các tập con của nó. Vậy nên không tồn tại tập hợp nào “lớn hơn” mọi tập khác. Không tồn tại “tập vũ trụ”, “tập chứa mọi thứ”, hay “tập tất cả các tập”.

Có một khái niệm về kích cỡ của tập hợp, được gọi là lực lượng (cardinality), tuy vậy ta không thảo luận nó ở đây.

Tiên đề chọn

Mệnh đề. Các phát biểu sau là tương đương:

- (a) **Tiên đề chọn:** Cho một họ các tập hợp khác rỗng, tồn tại một hàm xác định trên họ này, gọi là **hàm chọn**, liên kết mỗi tập hợp trong họ với một phần tử của tập hợp đó.
- (b) **Bổ đề Zorn:** Nếu mọi tập con được sắp toàn phần của một tập được sắp thứ tự X đều có chặn trên thì X có phần tử cực đại.

Thông thường bổ đề Zorn là một dạng tiện dụng của Tiên đề chọn.

Một cách trực quan, một hàm chọn sẽ chọn một phần tử từ mỗi tập hợp của họ được cho gồm các tập khác rỗng. Tiên đề chọn cho phép ta thực hiện vô hạn lần các phép chọn bất kì.² Tiên đề chọn cũng thường được sử dụng trong việc xây dựng các hàm, dãy, hoặc lưới, xem một ví dụ ở 5.5. One common application is the use of the product of an infinite family of sets – the Cartesian product, discussed below.

Tiên đề chọn rất cần thiết cho nhiều kết quả quan trọng trong toán học, chẳng hạn như định lý Tikhonov trong Tôpô, định lý Hahn-Banach và Banach-Alaoglu trong Giải tích hàm, sự tồn tại của tập không đo được Lebesgue trong Giải tích thực, ...

Có những trường hợp mà tiên đề này có thể không cần dùng đến. Ví dụ, trong chứng minh của 1.1 ta đã sử dụng tính sắp tốt của $\mathbb{Z}^+$ để thay thế. Xem thêm chẳng hạn ở [End77, p. 151] để có thêm thông tin về chủ đề này.

Tích Descartes

Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập hợp được đánh chỉ số bởi tập I . **Tích Descarte** (Cartesian product) $\prod_{i \in I} A_i$ của họ được đánh chỉ số này được định nghĩa là họ tất cả các ánh xạ $a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ sao cho $a(i) \in A_i$ với mọi $i \in I$. Sự tồn tại của những ánh xạ như vậy là một hệ quả của Tiên đề chọn. Một phần tử a của $\prod_{i \in I} A_i$ thường được ký hiệu bởi $(a_i)_{i \in I}$, với $a_i = a(i) \in A_i$ là tọa độ ứng với chỉ số i , tương tự với trường hợp tích hữu hạn.

Bài tập

1.6. Cho f là một hàm. Chứng minh rằng:

- (a) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$.
- (b) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$. Nếu f là đơn ánh (1-1) thì dấu bằng xảy ra.
- (c) $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$.
- (d) $f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$.

1.7. Cho f là một hàm. Chứng minh rằng:

- (a) $f(f^{-1}(A)) \subset A$. Nếu f là toàn ánh thì dấu bằng xảy ra.
- (b) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Nếu f là đơn ánh thì dấu bằng xảy ra.

1.8. Chứng minh rằng nếu tập A là hữu hạn và tập B là đếm được thì $A \cup B$ tương đương với A .

1.9. Cho một chứng minh khác của 1.2, bằng cách kiểm tra rằng ánh xạ $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+, (m, n) \mapsto 2^m 3^n$ là đơn ánh.

²Bertrand Russell nói rằng việc chọn ra một chiếc giày từ mỗi đôi giày của một lô gồm vô hạn các đôi giày thì không cần đến Tiên đề chọn (vì trong mỗi đôi giày, do chiếc bên trái khác chiếc bên phải nên ta có thể định nghĩa phép chọn của mình), nhưng đối với một đôi bít tất, thường thì hai chiếc bít tất sẽ y như nhau, nên việc chọn một chiếc từ mỗi đôi bít tất trong một lô gồm vô hạn các đôi bít tất cần đến Tiên đề chọn.

1.10. ✓ Cho tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^n$ có các tọa độ đều là số hữu tỉ. Chứng tỏ rằng tập này đếm được.

1.11. Chứng minh rằng nếu A có n phần tử thì $|2^A| = 2^n$.

1.12. Chứng minh rằng tập tất cả các hàm $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ tương đương với 2^A .

1.13. Một số thực α được gọi là một số đại số (algebraic number) nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng tập tất cả các số đại số là đếm được.

Một số thực không là một số đại số thì được gọi là một số siêu việt (transcendental number). Ta biết rằng π và e là các số siêu việt. Chứng minh rằng tập tất cả các số siêu việt là không đếm được.

1.14. Một tập hợp được gọi là *continuum* nếu nó tương đương với $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hội đếm được các tập continuum là một tập continuum.

1.15 (tập Cantor). Xóa đi khoảng mở $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ từ đoạn $[0, 1]$ trong tập số thực, ta được một không gian gồm có hai đoạn $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Tiếp tục, xóa đi các khoảng mở $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ và $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Tổng quát, trên mỗi đoạn còn lại sau mỗi lần xóa, ta lại xóa đi khoảng mở ở giữa có độ dài bằng $\frac{1}{3}$ đoạn đó. Tập Cantor là tập hợp các điểm còn lại. Nó có thể được mô tả là tập các số thực $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n = 0, 2$. Nói cách khác, đây là tập các số thực trong $[0, 1]$ có thể được viết trong cơ số 3 mà không cần dùng đến chữ số 1.

Chứng minh rằng tổng độ dài của các khoảng bị xóa đi bằng 1. Tập Cantor có đếm được không?

1.16 (Định lý Cantor–Schoeder–Bernstein). Ta sẽ chứng minh: Nếu A tương đương với một tập con của B và B tương đương với một tập con của A thì A và B tương đương với nhau ([KF75, p. 17], [End77, p. 148]).

Giả sử $f : A \mapsto B$ và $g : B \mapsto A$ là các đơn ánh. Đặt $A_0 = A$ và $B_0 = B$. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, đặt $B_{n+1} = f(A_n)$ và $A_{n+1} = g(B_n)$.

(a) Chứng minh rằng $A_{n+1} \subset A_n$ và $B_{n+1} \subset B_n$.

(b) Chứng minh A_{n+2} tương đương với A_n , và $A_n \setminus A_{n+1}$ tương đương với $A_{n+2} \setminus A_{n+3}$.

(c) Bằng cách viết

$$A = [(A_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots] \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

$$A_1 = [(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots] \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

hãy chứng tỏ rằng A tương đương với A_1 .

1.17. Chứng minh rằng mọi số thực có thể được viết trong cơ số d với bất kỳ $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 2$. Đặc biệt hơn, mọi số thực dương x có thể được viết thành

$$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots = a_0 + \frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d^2} + \frac{a_3}{d^3} + \cdots$$

với $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_0$, nếu $i \geq 1$ thì $0 \leq a_i \leq d - 1$. Tuy nhiên hai dạng trong cơ số d có thể biểu diễn cùng một số thực, như đã thấy ở 1.3. Điều này xảy ra chỉ khi xuất phát từ một chữ số nhất định, mọi chữ số của một dạng là 0 và của dạng kia là $d - 1$. (Kết quả này đã được sử dụng ở 1.3.)

1.18 ($\mathbb{R}^n$ tương đương với $\mathbb{R}$). Ở đây chúng ta chứng minh rằng $\mathbb{R}^2$ tương đương với $\mathbb{R}$, nói cách khác, một mặt phẳng là tương đương với một đường thẳng, hoặc tập $\mathbb{C}$ các số phức là tương đương với tập $\mathbb{R}$ các số thực. Hệ quả, $\mathbb{R}^n$ tương đương với $\mathbb{R}$.

Ta hãy xây dựng một ánh xạ từ $[0, 1) \times [0, 1)$ tới $[0, 1)$, như sau: cho một cặp số thực ở dạng thập phân $0.a_1a_2\cdots$ và $0.b_1b_2\cdots$ tương ứng với số thực $0.a_1b_1a_2b_2\cdots$. Vì 1.17, ta chỉ cho phép các biểu diễn thập phân mà trong đó không xảy ra việc chỉ có toàn chữ số 9 từ một chữ số nào đó trở đi. Kiểm tra tính đơn ánh của ánh xạ này.

1.19. Ta chứng minh rằng $2^{\mathbb{Z}^+}$ tương đương với $\mathbb{R}$.

- (a) Chứng minh rằng $2^{\mathbb{Z}^+}$ tương đương với tập hợp tất cả các dãy các số nhị phân. Suy ra sự tồn tại của một đơn ánh từ $[0, 1]$ vào $2^{\mathbb{N}}$.
- (b) Xét ánh xạ $f : 2^{\mathbb{Z}^+} \rightarrow [0, 2]$, với mỗi dãy nhị phân $a = a_1a_2a_3 \dots$, nếu từ một chữ số nhất định mà mọi chữ số đều bằng 1 thì đặt $f(a) = 1.a_1a_2a_3 \dots$ ở dạng nhị phân, còn lại ta đặt $f(a) = 0.a_1a_2a_3 \dots$. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

Một phát biểu nói rằng không tồn tại một tập hợp lớn hơn $\mathbb{Z}^+$ và nhỏ hơn $\mathbb{R}$ (nghĩa là, một tập hợp S sao cho có một đơn ánh từ $\mathbb{Z}^+$ vào S nhưng không có song ánh nào, và có một đơn ánh từ S vào $\mathbb{R}$ nhưng không có song ánh nào) được gọi là *giả thuyết Continuum*.

1.20 (**nguyên lý quy nạp siêu hạn**). Một tập hợp S được gọi là *được sắp tốt* (well-ordered) nếu mọi tập con khác rỗng A của S đều có phần tử nhỏ nhất, i.e. $\exists a \in A, \forall b \in A, a \leq b$. Ví dụ, với thứ tự thông thường, $\mathbb{N}$ là được sắp tốt còn $\mathbb{R}$ thì không. Chú ý rằng một tập hợp được sắp tốt thì phải được sắp toàn phần. Dựa vào Tiên đề chọn, vào năm 1904, Ernst Zermelo đã chứng minh rằng mọi tập hợp đều có thể được sắp tốt.

Chứng minh sự mở rộng sau của nguyên lý quy nạp. Gọi A là một tập hợp được sắp tốt. Gọi $P(a)$ là một phát biểu mà chân trị của nó phụ thuộc vào $a \in A$. Giả sử rằng nếu $P(a)$ đúng với mọi $a < b$ thì $P(b)$ đúng. Khi đó $P(a)$ sẽ đúng với mọi $a \in A$. Đây gọi là *nguyên lý quy nạp siêu hạn* (transfinite induction principle).

2 Không gian tôpô

Khi bàn luận về sự phụ thuộc của một đối tượng với một đối tượng khác, ta thường quan tâm đến tính liên tục của sự phụ thuộc đó. Khái niệm này thường được hiểu, rằng đối tượng phụ thuộc sẽ bị giới hạn trong một tập được cho nếu đối tượng độc lập bị giới hạn trong một tập tương ứng nhất định. Các tập hợp xuất hiện trong thảo luận này được gọi là các tập mở. Một cách ngắn gọn, một tôpô là một hệ thống các tập mở. Tôpô là sự thiết lập cho cuộc luận bàn về sự liên tục.

Định nghĩa. Một **tôpô** (topology) trên tập hợp X là một họ τ các tập con của X thỏa mãn:

- (a) Tập $\emptyset$ và tập X là các phần tử của τ .
- (b) Một hội các phần tử của τ là một phần tử của τ .
- (c) Một giao hữu hạn các phần tử của τ là một phần tử của τ .

Các phần tử của τ được gọi là các **tập hợp mở** (open set), hay **tập mở** của X trong tôpô τ .

Tóm lại, một tôpô trên tập hợp X là một họ các tập con của X có bao gồm tập $\emptyset$ và X , và “đóng” dưới các phép hội (bất kỳ) và các phép giao hữu hạn.

Một tập hợp X cùng với một tôpô τ được gọi là một **không gian tôpô** (topological space), ký hiệu bởi (X, τ) hoặc X một mình nếu không cần thiết phải làm rõ tôpô đang được đề cập. Một phần tử của X thường được gọi là một **điểm** (point).

Một **lân cận** (neighborhood) của điểm $x \in X$ là một tập con của X chứa một tập mở chứa điểm x . Chú ý rằng một lân cận không nhất thiết phải mở.³

Ví dụ. Trên mọi tập X đều tồn tại **tôpô hiển nhiên** (trivial topology) $\{\emptyset, X\}$. Cũng như vậy với **tôpô rời rạc** (discrete topology) $\mathcal{P}(X)$ (mọi tập con của X đều mở). Vậy trên một tập hợp có thể tồn tại nhiều tôpô.

Chú ý rằng phát biểu “giao của hữu hạn các tập mở bất kỳ là mở” tương đương với phát biểu “giao của hai tập mở bất kỳ là mở”.

Không gian metric

Nhắc lại rằng, một cách ngắn gọn, một không gian metric là một tập hợp được trang bị thêm khoảng cách giữa mỗi hai điểm. Chính xác hơn, một không gian metric là một tập hợp X cùng với một ánh xạ $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z \in X$:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ (khoảng cách là không âm),
- (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (khoảng cách bằng 0 khi và chỉ khi hai điểm trùng nhau),
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$ (khoảng cách có tính đối xứng),
- (d) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (bất đẳng thức tam giác).

Một quả cầu là một tập hợp $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ với $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Trong lý thuyết về không gian metric, một tập con U của X được gọi là mở nếu với mọi x thuộc U , tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x, \epsilon)$ chứa trong U . Điều này tương đương với phát biểu, rằng một tập mở khác rỗng là một hội của các quả cầu.

³Lưu ý rằng không phải tác giả nào cũng sử dụng quy ước này. Ví dụ Kelley [Kel55] sử dụng nhưng Munkres [Mun00] lại yêu cầu rằng lân cận thì phải mở.

Để chứng tỏ đây thực sự là một tôpô, ta chỉ cần kiểm tra rằng giao của hai quả cầu là một hội của các quả cầu. Với $z \in B(x, r_x) \cap B(y, r_y)$, đặt $r_z = \min\{r_x - d(z, x), r_y - d(z, y)\}$. Khi đó quả cầu $B(z, r_z)$ sẽ nằm trong cả $B(x, r_x)$ lẫn $B(y, r_y)$.

Vậy, một cách chính xác, một không gian metric là một không gian tôpô với tôpô được sinh bởi metric. *Khi nói đến tôpô trên một không gian metric ta hiểu đó là tôpô này.*

Ví dụ (không gian định chuẩn). Nhắc lại rằng một *không gian định chuẩn* (normed space) là một không gian vectơ mà mỗi vectơ được trang bị thêm độ dài. Chính xác, một không gian định chuẩn là một tập hợp X cùng một cấu trúc không gian vectơ trên trường số thực, và một hàm số $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, gọi là một *chuẩn* (norm), thỏa mãn:

- (a) $\|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (độ dài là không âm),
- (b) $\|cx\| = |c| \|x\|$ for $c \in \mathbb{R}$ (độ dài tỉ lệ với vectơ),
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

Một cách chuẩn tắc, một không gian định chuẩn là một không gian metric với metric $d(x, y) = \|x - y\|$. Do đó một không gian định chuẩn là một không gian tôpô với tôpô được sinh bởi chuẩn.

Ví dụ (tôpô Euclid). Trong $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, chuẩn Euclid của một điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được cho bởi $\|x\| = [\sum_{i=1}^n x_i^2]^{1/2}$. Tôpô sinh bởi chuẩn này được gọi là *tôpô Euclid* (Euclidean topology) of $\mathbb{R}^n$.

Phần bù của một tập mở được gọi là *tập hợp đóng* (closed set), hay *tập đóng*.

Mệnh đề (mô tả đối ngẫu của tôpô). Trong một không gian tôpô X :

- (a) Hai tập con $\emptyset$ và X đều đóng.
- (b) Một hội hữu hạn các tập đóng là tập đóng.
- (c) Một giao (bất kỳ) các tập đóng là tập đóng.

Phần trong – Bao đóng – Biên

Cho X là một không gian tôpô và A là một tập con của X . Một điểm x thuộc X được gọi là:

- một *điểm trong* (interior point) của A trong X nếu tồn tại một tập mở của X chứa x và chứa trong A .
- một *điểm dính* (contact point) (or point of closure) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm của A .
- một *điểm tụ* (limit point) (or cluster point, or accumulation point) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm khác x của A . Dĩ nhiên mỗi điểm tụ đều là một điểm dính. Ta có thể thấy rằng một điểm dính của A nhưng không thuộc A là một điểm tụ của A .
- một *điểm biên* (boundary point) của A trong X nếu mọi tập mở của X chứa x đều chứa một điểm thuộc A và một điểm thuộc phần bù của A . Nói cách khác, một điểm biên của A là một điểm dính của cả A lẫn phần bù của A .

Với các khái niệm này, ta định nghĩa: