CH ƠNG 1. LÝ THUYẾT TỔ HỢP

1.1. SƠ L ỢC VỀ TỔ HỢP:

Tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối t- ợng, chủ đề này đã đ- ợc nghiên cứu từ thế kỷ 17. Khi những trò chơi may rủi, liệt kê,đếm các đối t- ợng có những tính chất nào đó là một phần quan trọng của lý thuyết tổ hợp. Ví dụ ta dùng quy tắc đếm để tính tất cả các số điện thoại có thể có trên toàn n- ớc Mỹ, số mật khẩu cho phép truy nhật hệ máy tính, liệt kê các thứ tự về đích khác nhau của các vận động viên có thể xảy ra trong cuộc chạy thi.

Một bài toán khác trong lý thuyết tổ hợp là việc tạo ra các cách sắp xếp theo một kiểu nào đó. Vấn đề này rất quan trọng trong các mô phỏng máy tính.

1.1.1. Quy tắc cộng:

Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có n_1+n_2 cách làm một trong hai việc đó.

Ví du1: Giả sử cần chọn hoặc là một cán bộ của khoa tin hoặc là một sinh viên tin làm đại biểu trong hội đồng của một tr- ờng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khoa tin có 37 cán bộ và 83 sinh viên?.

Chúng ta mở rông quy tắc cộng cho tr- ờng hợp có nhiều hơn hai công việc. Giả sử các việc T_1, T_2, …,T_m có thể làm t- ơng ứng bằng n_1, n_2, …, n_m cách và giả sử không có hai việc nào đó có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong m việc đó là $n_1+n_2+\ldots+n_m$.

Ví du2: Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách t- ơng ứng có 23, 15 và 19 bài. Có bao nhiêu cách chọn bài thực hành?.

Quy tắc cộng có thể phát biểu d- ới dạng ngôn ngữ tập hợp nh- sau: Nếu A_1, A_2, …, A_m là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$

1.1.2. Quy tắc nhân:

Giả sử nhiệm vụ nào đó đ- ợc tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi thực hiện việc thứ nhất đã làm, khi đó sẽ có $n_1 \times n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.

Ví dụ3: Trong một trung tâm máy tính có 32 chiếc máy vi tính. Mỗi máy có 24 cổng. Hỏi có bao nhiêu cổng khác nhau trong trung tâm này?.

Quy tắc nhân mở rộng:

Giả sử rằng một nhiệm vụ nào đó đ- ợc thi hành bằng cách thực hiện các việc T_1, T_2, …,T_m. Nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc T_1, T_2, …,T_{i-1} đã đ- ợc làm, khi đó có $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

Ví dụ4: Có bao nhiêu biển đăng kí xe ô tô nếu mỗi biển chứa một dãy ba chữ cái tiếp sau là ba chữ số (không bỏ dãy chữ nào ngay cả khi nó có ý nghĩa không đẹp).

Quy tắc nhân th- ờng đ- ợc phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp nh- sau:

Nếu A_1, A_2, …, A_m là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề-các của các tập hợp này bằng tích số các phần tử của các tập thành phần.

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|$$

1.1.3. Các cấu hình tổ hợp đơn giản:

1.1.3.1. Hoán vị

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A đ- ợc gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Quy - ớc: 0!=1

1!=1

Ví dụ5: 6 ng- ời xếp thành hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí bao nhiêu kiểu?.

1.1.3.2. Chỉnh hợp:

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($0 \le k \le n$) sắp thứ tự của tập hợp A là một tổ hợp chấp k của n phần tử.

$$A_n^k = n(n-1)....(n-k+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>*Ví dụ 6:*</u> Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Ng- ời thắng sẽ nhận huy ch- ơng vàng, ng- ời về đích thứ hai nhận huy ch- ơng bạc, ng- ời về đích thứ ba nhận huy ch- ơng đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy ch- ơng này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?.

1.1.3.3. Tổ hợp:

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử ($0 \le k \le n$) của tập hợp A là một chỉnh hợp chấp k của n phần tử.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>*Ví dụ7:*</u> Có bao nhiêu cách tuyển 5 trong số 10 cầu thủ của một đội bóng quần vợt để đi thi đấu tại một tr- ờng khác?.

Các tính chất của hệ số tổ hợp:

a) Tính đối xứng

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

b) Điều kiện ban đầu

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

c) Công thức đệ qui

$$C_n^k = C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^k, \qquad n > k > 0$$

Từ công thức b) và c), ta có thể tính tất cả các hệ số tổ hợp chỉ bằng phép cộng. Các hệ số này đ- ợc tính và viết lần l- ợt theo từng dòng (mỗi dòng chỉ ứng với giá trị n=0, 1, 2,…) theo bảng tam giác dưới đây:

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \qquad C_1^1$$

… … …

… … … …

C_n^0 C_n^1 … C_n^{n-1} C_n^n

… … … … … …

Bảng này gọi là tam giác Pascal.

Các hệ số tổ hợp có liên quan chặt chẽ với việc khai triển luỹ thừa của một nhị thức

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + ... + C_n^{n-1} y^{n-1} + C_n^n y^n$$

Công thức trên đ- ợc gọi là công thức khai triển nhị thức *Newton* và các hệ số của nó đ- ợc gọi là các hệ số của nhị thức.

1.2. BÀI TOÁN ĐẾM VÀ PH ƠNG PHÁP GIẢI

1.2.1. Giới thiệu bài toán

Một trong những vấn đề đầu tiên của việc nghiên cứu tổ hợp là đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợph có thể đ- ợc tạo ra với những quy tắc đã nêu ? Những bài toán nh- vậy đ- ợc gọi *là bài toán đếm tổ hợp*. Thông th- ờng, lời giải của bài toán đếm phụ thuộc vào một số giá trị tham số ban đầu và ng- ời ta cố gắng biểu diễn sự phụ thuộc này bằng những công thức toán học. Nói chung, để đếm các cấu hình đã cho, ng- ời ta tìm cách đ- a về các cấu hình quen thuộc bằng các thiết lập một t- ơng quan 1-1 giữa chúng. Nhiều khi một bài toán đếm đ- ợc phân thành những bài toán đến nhỏ hơn bằng cách chia việc đếm thành từng lớp để áp dụng nguyên lý cộng hoặc phân tích cấu hình cần đếm nh- là việc ghép một số cấu hình khác để áp dụng nguyên lý nhân. D- ới đây là một số kỹ thuật đếm.

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách xếp 5 ng- ời đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B ?

Giải: Để đếm số cách xếp này, ta đếm phần còn lại: số cách xếp mà A đứng cạnh B. Xem A và B nh- một chỗ, ta có 4!= 24 các xếp. Số này cần đ- ợc nhân 2 vì A có thể đứng bên trái cũng nh- bên phải B. Nh- vậy có tất cả 48 cách xếp A đứng cạnh B. Toàn bộ có 5! = 120cách xếp. Từ đó nhận đ- ợc số cách xếp mà A không đứng cạnh B là 120 – 48 = 72 cách.

Ví dụ 2. Một đợt phát hành xổ số với các số vé gồm 2 phần: phần đầu gồm 2 chữ cái lấy từ A đến Z (26 phân tử) và phần sau gồm 4 chữ số lấy từ 0 đến 9 910 phân tử). Hỏi xác xuất để trúng giải độc đắc là bao nhiêu ?

Giải: Tr- ớc hết ta đếm số vé đ- ợc phát hành. Mỗi vé gồm 2 phần: phần chữ và phần số. Phần chữ có 26^2 khả năng, phần số có 10^4 khả năng. Theo nguyên lý nhân, số vé đ- ợc phát hành là 26^2 x 10^4 = 6 760 000. Từ đó nhận đ- ợc xác suất để trúng giải độc đắc là:

$$1 / 6\,760\,000 \sim 1{,}48 \times 10^{-7}$$

Ví dụ 3. Cho một l- ới gồm các ô vuông. Các nút đ- ợc đánh số từ 0 đến *n* theo chiều từ trái sang phải và từ 0 đến m theo chiều từ d- ới lên trên *(xem hình vẽ)*. Hỏi có bao nhiêu đ- ờng đi khác nhau từ nút (0,0) đến nút (*n,m)* nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều sang phải hoặc lên trên ?

(0,m) (n,m)

(0,0) (n,0)

Giải : Một đ- ờng đi nh- thế đ- ợc xem gồm *n+m* đoạn (mỗi đoạn là một cạnh ô vuông). Tại mỗi đoạn chỉ đ- ợc chọn một trong 2 giá trị : đi lên (mà ta mã là 1) hay sang phải (mà ta mã là 0). Số đoạn đi lên đúng bằng *m* và số đoạn sang phải đúng bằng *n*. Bài toán dẫn về việc tìm xem có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài *n + m* trong đó có đúng *m* thành phần bằng 1. đây cũng chính là số tập con *m* phân tử của một tập *n + m* phần *t*, vì thế số đ- ờng đi cần đếm bằng C_{n+m}^{m}

<u>*Ví dụ 4*</u> : Thuật toán 'nổi bọt' dùng để xếp tăng dần dãy a_i *(i = 1,2,....,n)* đ- ợc mô tả bằng đoạn ch- ơng trình PASCAL d- ới đây :

For i : = 2 to n do

Forj : = n down to i do

$I \int a[j-I] > a[j] thenSwap(a[j-I], a[j];$

Hãy đếm xem phải làm bao nhiêu phép so sánh?

Giải: Ta chia số phép so sánh thàn các lớp theo vòng lặp *i (i đi từ 2 đến n).* Với mỗi *i* xác định, phải thực hiện *n-i+1* phép so sánh. Từ đó nhận đ- ợc, theo nguyên lý cộng, số các phép so sánh là:

$$(n-1)+(n-2)+...+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

Có thể lý luận gạn hơn: thuật toán "nổi bọt" viết trong đoạn chương trình đã cho phải so sánh tất cả các cặp phần tử khác nhau. Từ đó nhận đ- ợc số phép so sánh là:

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

Một đặc tính của các bài toán đếm tổ hợp là số cấu hình tăng rất nhanh khi số giá trị tham gia vào việc tạo nên cấu hình đó tăng. Điều này th- ờng dẫn đến các con số khổng lồ mặc dù các con số tham gia ban đầu không lớn. Hiện t- ợng này th- ờng đ- ợc gọi là sự bùng nổ tổ hợp và chính nó là nguyên nhân làm cho các thuật toán dựa vào việc duyệt toàn bộ trở nên không khả thi. Thí dụ d- ới đây cho thấy rằng, dù qui cách tạo cấu hình có vẻ rất hạn chế nh- ng số cấu hình đ- ợc tạo, hoá ra lại rất lớn.

<u>*Ví dụ 5.*</u> Ngôn ngữ PASCAL chuẩn qui định đặt tên biến không quá 8 ký tự. Các ký tự trong tên biến chỉ đ- ợc phép là các chữ cái (từ A đến Z) hoặc các chữ số (từ 0 đến 9) và phải bắt đầu bằng chữ cái. Hỏi có thể định nghĩa bao nhiêu biến khác nhau ?

Giải : Ta phân các biến thành các lớp: 1-ký tự, … Số các biến thuộc lớp k-ký tự, theo nguyên lý nhân, bằng 26 x 36^{k-1} (k = 1,2, …, 8). Từ đó, theo nguyên lý cộng, ta nhận đ- ợc số các biến khác nhau là:

$26.(1+36+36^2 + \ldots +36^7) = 2\,095\,681\,645\,538$.

1.2.2. Nguyên lý bù trừ

Một số bài toán đếm phức tạp hơn, đ- ợc dựa vào nguyên lý tổng quát của nguyên lý cộng. Nếu không có giả thiết gì về sự rời nhau giữa 2 tập A và B thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

Công thức (1) đ- ợc mở rộng cho tr- ờng hợp nhiều tập nh- sau.

Định lý. *Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hữu hạn. Khi đó*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{m-1} N_m,$$

Trong đó N_k là tổng phần tử của tất cả các giao của k tập lấy từ m tập đã cho (nói riêng $N_1 = N(A_1) + \ldots + N(A_m)$, $N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$.

Chứng minh. Chú ý rằng, số các giao của k tập lấy từ m tập bằng $C_{m,}^{k}$, $k = 1,2, \ldots, m$. Để chứng minh công thức (1), ta sẽ tính xem mỗi phần tử của tập $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ đ- ợc đếm bao nhiêu lần trong vế phải của nó. Xét một phần tử tuỳ ý $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m1.}$ Giả sử a là phần tử của k tập trong số m tập đã cho. Khi đó a đ- ợc đếm ở vế phải của công thức (1)

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^k$$

Lần do

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^k$$
$$= 1 - [1 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \ldots + (-1)^k C_k^k] = 1 - (1-1)^k = 1,$$

Suy ra mỗi phần tử $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ đ- ợc tính đúng 1 lần ở vế phải của công thức (1) , điều đó đã chứng minh tính đúng đắn của công thức (1).

Bây giờ ta đông nhất tập A_k với tính chất A_k cho trên một tập X nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của X không thoả mãn bất cứ một tính chất A_k nào cả.

Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của X, ta có:

$$\overline{N} = N - N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^m N_m \qquad (3)$$

Trong đó N_k là tổng các phần tử của X thoả mãn k tính chất lấy từ m tính chất đã cho.

Công thức (3) đ- ợc gọi là nguyên lý bù trừ. Nó cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_k trong tr- ờng hợp các số này dễ tính toán hơn.

Ta sẽ xét một số thí dụ minh hoạ cho việc sử dụng nguyên lý bù trừ để giải các bài toán đếm.

<u>Ví dụ 6</u>: Hỏi trong tập X=[1,2,…, 10000] có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3,4,7?

Giải. Gọi

$$A_i = \{x \in X : x \text{ chia hết cho i } \}, \text{ i=3,4,7.}$$

Khi đó $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập các số trong X chia hết cho ít nhất một trong 3 số 3,4,7, suy ra theo công thức (3), số l- ợng các số cần đếm sẽ là

$$N(X) - N(A_3 \cup A_7) = N_1 - N_2 + N_{3.}$$

Ta có

$$\begin{aligned} N_1 &= N(A_3) + N(A_4) + N(A_7) \\ &= [10000/3] + [10000/4] + [10000/7] \\ &= 3333 + 2500 + 1428 = 7261, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{N_2 = N(A_3 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_7) + N(A_4 \cap A_7)}$$

$$= [10000/(3\times4)] + [10000/(3\times7)] + [10000/(4\times7)]$$

$$= 833 + 476 + 357 = 1666,$$

$$N_3 = N(A_3 \cap A_4 \cap A_7) = [10000/(3\times4\times7)] = 11$$

Ký hiệu [r] để chỉ số nguyên lớn nhất không v- ợt quá r.

Từ đó số l- ợng các số cần đếm là 10000-7261+1666-119=4286.

1.3. BÀI TOÁN TỒN TẠI VÀ PH□ ƠNG PHÁP GIẢI

1.3.1. Giới thiệu bài toán

Trong mục tr- ớc, ta đã tập trung chú ý vào việc đếm số các cấu hình tổ hợp (số phần tử của các đối t- ợng tổ hợp) thoả mãn những tính chất nào đó, chẳng hạn đếm số tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị, … Trong những bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thoả mãn tính chất đặt ra. Tuy nhiên, trong rất nhiều baòi toán tổ hợp, việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình thoả mãn các tính chất cho tr- ớc là hết sức khó khăn. Chẳng hạn, khi một kỳ thủ cần phải tính toán các n- ớc đi của mình để giải đáp xem liệu có khả năng thắng hay không, hay chỉ là bức mật mã giả của đối ph- ơng tung ra nhằm đảm bảo an toàn cho bức điện thật…Như vậy, trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho tr- ớc. Các bài toán thuộc dạng này đ- ợc gọi là các *bài toán tồn tại tổ hợp*.

Một bài toán tồn tại tổ hợp xem nh- giải xong nếu hoặc chỉ ra một cách xây dựng cấu hình, hoặc chứng minh rằng chúng không có. Tuy nhiên cả hai khả năng đều không phải dễ. Để thấy rõ sự phức tạp của vấn đề, d- ới đây ta sẽ xét một số bài toán tồn tại tổ hợp cổ điển nổi tiếng.

1.3.1.1. Bài toán về 36 sĩ quan

Bài toán này đ- ợc Euler đề nghị, nội dung của nó nh- sau: có một lần ng- ời ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau: Thiếu uý, trung uý, th- ợng uý, đại uý, thiếu tá, trung tá về tham gia duyệt binh ở s- đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hành ngang cũng nh- mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc.

Để đơn giản ta dùng các chữ cái in hoa A, B, C, D, E, F để chỉ các phiên hiệu trung đoàn còn các chữ cái th- ờng *a, b, c, d, e, f* để chỉ các cấp bậc. Bài toán này có thể tổng quát hoá nếu thay con số 6 bởi n. trong tr- ờng hợp *n=4*, một lời giải của bài toán 16 sĩ quan là

Ab	Dd	Ba	Cc
Bc	Ca	Ad	Db
Cd	Bd	Dc	Aa
Da	Ac	Cb	Bd

Một lời giải trong tr- ờng hợp n = 5 là

Aa Bb Cc Dd Ee

Cd De Ea Ab Bc

Eb Ac Bd Ce Da

Be Ca Db Ec Ad

De Ed Ae Ba Cb

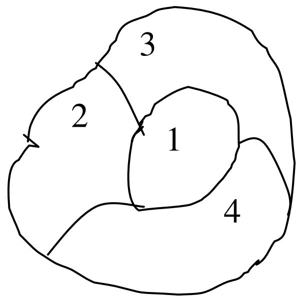
Do lời giải của bài toán có thể biều diễn bởi 2 hình vuông với các chữ cái la tinh hoa và th- ờng chồn cạnh nhau nên bài toán tổng quát đặt ra còn đ- ợc biết d- ới tên gọi bài toán về *hình vuông la tinh trực giao*. Trong hai thí dụ trên ta có hình vuông la tinh trực giao cấp 4 và 5.

Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nh- ng ông đã không thành công. Vì vậy ông đã đề ra giả thuyết là cách xếp nh- vậy không tồn tại. Giả thuyết này đ- ợc nhà toán học Pháp Tarri chứng minh năm 1901 bằng các duyệt tất cả mọi khả năng xếp. Euler căn cứ vào sự không tồn tại lời giải khi $n = 2$ và $n = 6$ còn đề ra một giả thuyết tổng quát hơn là; không tồn tại hình vuông la tinh trực giao cấp $n = 4k + 2$. Giả thuyết này đã tồn tại suốt hai thế kỷ mãi đến năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda mới chỉ ra đ- ợc một lời giải với $n = 10$ và sau đó chỉ ra ph- ơng pháp xây dựng hinh vuông la tinh trực giao cho mọi $n = 4k + 2$, *với* $k > 1$.

T- ởng chừng bài toán đặt ra chỉ có ý nghĩa thuần tuý của một bài toán đố hóc búa thử trí tuệ con ng- ời. Thế nh- ng gần đây ng- ời ta đã phát hiện những ứng dụng quan trọng của vấn đề trên vào quy hoạch thực nghiệm, sắp xếp các lịch thi đấu trong các giải cờ quốc tế, hình học xạ ảnh,…

1.3.1.2. Bài toán 4 mầu

Có những bài toán mà nội dung của nó có thể giải thích cho bất kỳ ai, tuy nhiên lời giải của nó thì ai cũng có thể thử tìm, nh- ng mà khó có thể tìm đ- ợc. Ngoài định lý Fermat thì bài toán 4 màu là một bài toán nh- vậy. Bài toán có thể phát biểu trực quan nh- sau: chứng minh rằng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có hai n- ớc láng giềng nào lại bị tô bởi cùng một màu. chú ý rằng, ta xem nh- mỗi n- ớc là một vùng liên thông và hai n- ớc đ- ợc gọi là láng giềng nếu chúng có chung biên giới là một đ- ờng liên tục.



Con số 4 không phải là ngẫu nhiên. Ng- ời ta chứng minh đ- ợc rằng mọi bản đồ đều đ- ợc tô với số mầu lớn hơn 4, còn với số mầu ít hơn 4 thì không tô đ- ợc, chẳng hạn bản đồ gồm 4 n- ớc trên hình 1 không thể tô đ- ợc với số mầu ít hơn 4.

Bài toán này xuất hiện vào khoảng những năm 1850 – 1852 từ một nhà buôn ng- ời Anh là Gazri khi tô bản đồ hành chính n- ớc Anh đã cố gắng chứng minh rằng nó có thể tô bằng 4 mầu. Sau đó, năm 1852 ông ta đã viết th- cho De Morgan để thông báo về giả thuyết này. Năm 1878, Keli trong một bài báo đăng ở Tuyển tập các công trình của Hội toán học Anh có hỏi rằng bài toán này đã đ- ợc giải quyết hay ch- a? Từ đó bài toán trở thành nổi tiếng, và trong suốt hơn một thế kỷ qua đã có rất nhiều ng- ời làm toán, nghiệp d- cũng nh- chuyên nghiệp, đã cố gắng chứng minh giả thuyết này. Tuy nhiên mãi đến năm 1976 hai nhà tóan học Mỹ là K.Appel và W. Haken mới chứng minh đ- ợc giả thuyết này bằng máy tính điện tử. Tất nhiên một chứng minh với sự giúp đỡ của máy tính điện tử không thực sự thoả mãn đ- ợc nhu cầu của công chúng muốn kiểm tra tính đúng đắn của cách chứng minh. Vì vậy, chính hai tác giả trên vào cuối những năm 1990 đã có công bố một cuốn sách trình bày về ph- ơng pháp chứng minh của mình (cuốn sách dày trên 800 trang). Cũng vào những năm cuối của thế kỷ 20, một nhóm các nhà toán học Mỹ đã đ- a ra một chứng minh có thể kiểm tra bằng tay! Rất tiếc là chứng minh này cũng không phải là đơn giản. Cho đến nay các nhà toán học vẫn đang nỗ lực nghiên cứu để tìm ra một cách chứng minh dễ hiểu nh- bản thân nội dung của bài toán.

1.3.1.3. Hình lục giác thần bí

Năm 1910 Clifford Adams đề ra bài toán hình lục giác thần bí sau: trên 19 ô lục giác (xem hình vẽ ở d- ới) hãy điền vào các số từ 1 đến 19 sao cho tổng theo 6 h- ớng của lục giác là bằng nhau (và đều bằng 38).

Sau 47 năm trời kiên nhẫn cuối cùng ông ta đã tìm đ- ợc lời giải. Sau đó vì sơ ý đánh mất bản thảo ông ta đã tốn thêm 5 năm để khôi phục lại. Năm 1962 Adams đã công bố lời giải đó.

Thật không thể ngờ là đó là lời giải duy nhất (nếu không tính đến các lời giải sai khác nhau bởi phép biến hình đơn giản).

1.3.1.4. Bài toán chọn 2n điểm trên l�ới n x n điểm

Cho một l- ới ô vuông gồm $n\ x\ n$ điểm. Hỏi có thể chọn trong số chúng $2n$, điểm, sao cho không có 3 điểm đ- ợc chọn nào là thẳng hàng hay không? Hiện nay ng- ời ta mới biết đ- ợc rất ít về lời giải của bài toán trong những tình huống không tầm th- ờng. Câu hỏi về sự tồn tại của lời giải của bài toán với những giá trị lớn của n vẫn còn để ngỏ.

1.3.1.5. Ph�ơng pháp phản chứng

Một trong những cách giải bài toán tồn tại là dùng lập luận phản chứng: giả thiết điều định chứng minh là sai, từ đó dẫn đến mâu thuẫn.

Ví dụ 1. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm đ- ợc 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Giải: Chú ý rằng, cần và đủ để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng độ dài của 2 đoạn nhỏ phải lớn hơn độ dài của đoạn lớn, ta sắp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài $a_1, a_2, \ldots, a_7$ và chứng minh rằng trong đáy đã xếp luôn tìm đ- ợc 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Giả thiết điều này không xảy ra, nghĩa là đồng thời xảy ra các bất đẳng thức:

$$a_1 + a_2 \le a_3,$$

$$a_2 + a_3 \le a_4,$$

$$a_3 + a_4 \le a_5,$$

$a_4 + a_5 \le a_6$,

$a_5 + a_6 \le a_7$,

Từ giả thiết a_1, a_2 có giá trị lớn hơn 10, ta nhận đ- ợc $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$, ta nhận đ- ợc $a_4 > 30$, … , cứ như vậy ta nhận được $a_5 > 50$, $a_6 > 80$ và $a_7 > 130$. Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100 và điều đó chứng minh kết luận của bài toán.

Ví dụ 2. Các đỉnh của một thập giác đều đ- ợc đánh số bởi các số nguyên 0,1, … , 9 một cách tuỳ ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh liên tiếp có tổng các số là lớn hơn 13.

Giải: Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ là các số gán cho các đỉnh của 1,2, … , 10 của thập giác. Giả sử ng- ợc lại là không tìm đ- ợc ba đỉnh nào thoả mãn khẳng định của thí dụ. Khi đó ta có

$k_1 = x_1 + x_2 + x_3 \le 13$,

$k_2 = x_2 + x_3 + x_4 \le 13$,

………

$k_9 = x_9 + x_{10} + x_1 \le 13$,

$k_{10} = x_{10} + x_1 + x_2 \le 13$,

Từ đó suy ra

$k_1 + k_2 + \dots + k_{10} \le 130.$

Mặt khác do

$$
\begin{aligned}
k_1 + k_2 + \dots + k_{10} &= 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \\
&= 3(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \\
&= 135,
\end{aligned}
$$

Suy ra

$135 = k_1 + k_2 + \dots + k_{10} \le 130$.

Mâu thuẫn thu đ- ợc đã chứng tỏ khẳng định trong ví dụ là đúng.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng không thể nối 31 máy vi tính thành một mạng sao cho mỗi máy đ- ợc nối với đúng 5 máy khác.

Giải: Giả sử ng- ợc lại là tìm đ- ợc cách nối 31 máy sao cho mỗi máy đ- ợc nối với đúng 5 máy khác. Khi đó số l- ợng kênh nối là 5x31/2= 75,5 ?! Mâu thuẫn thu đ- ợc đã chứng minh khẳng định trong thí dụ là đúng.

1.3.2. Nguyên lý Dirichlet

Trong rất nhiều bài toán tổ hợp, để chứng minh sự tồn tại của một cấu hình với những tính chất cho tr- ớc, ng- ời ta sử dụng nguyên lý đơn giản sau, gọi là nguyên lý Dirchlet:

Nguyên lý Direchlet. *Nếu đem xếp nhiều hơn n đối t- ợng vào n cái hộp, thì luôn tìm đ- ợc cái hộp chứa không ít hơn 2 đối t- ợng.*

Chứng minh. Việc chứng minh nguyên lý trên chỉ là một lập luận phản chứng đơn giản. Giả sử ng- ợc lại là không tìm đ- ợc cái hộp nào chữa không ít hơn 2 đối t- ợng. Điều đó có nghĩa là mỗi cái hộp chứa không quá một đối t- ợng. Từ đó suy ra tổng số đối t- ợng xếp trong *n* cái hộp là không v- ợt quá *n*, trái với giả thiết là có nhiều hơn n đối t- ợng đ- ợc xếp trong chúng.

Lập luận hoàn toàn t- ơng tự, có thể chứng minh Nguyên lý Dirichlet tổng quát sau.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát. *Nếu đem xếp n đối t- ợng vào k cái hộp, thì luôn tìm đ- ợc một cái hộp chứa không ít hơn n/k đối t- ợng.*

Nguyên lý trên đ- ợc nhà toán học nổi tiếng ng- ời Đức là Dirichlet đề xuất từ thế kỷ 19 và ông đã áp dụng nó để giải nhiều bài toán tồn tại tổ hợp. Các thí dụ d- ới đây cho ta thấy nguyên lý đ- ợc sử dụng nh- thế nào.

*Ví dụ 1***.** Trong số 367 ng- ời bao giờ cũng tìm đ- ợc hai ng- ời có ngày sinh nhật giống nhau bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau.

*Ví dụ 2***.** Trong kỳ thi học sinh giỏi điểm bài thi đ- ợc đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng tử 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất phải có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm đ- ợc hai họ sinh có kết quả thi nh- nhau?

Giải. Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau.

Ví dụ 3. Trong số những ng- ời có mặt trên trái đất luôn tìm đ- ợc hai ng- ời có hàn răng giống nhau, bởi vì chỉ có tất cả

$$2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$$

Hàm răng khác nhau mà số ng- ời trên hành tinh chúng ta hiện nay đã v- ợt quá 5 tỷ.

Ví dụ 4. Trong 100 ng- ời có ít nhất 9 ng- ời sinh cùng một tháng.

Giải: Xếp những ng- ời cùng sinh một tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một nhóm có không ít hơn 100/12 = 8,3… nghĩa là 9 người.

Ví dụ 5. Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là sáu ng- ời cùng nhận học bổng nh- nhau?

Giải: Số sinh viên ít nhất cần có để đảm bảo chắc chắn có 6 sinh viên cùng nhận học bổng nh- nhau là số nguyên nhỏ nhất n sao cho $n/5 > 5$. Số nguyên nhỏ nhất đó là $n = 5x5+1=26$. Vậy 26 là số l- ợng sinh viên nhỏ nhất đảm bảo chắc chắn là có sáu sinh viên cùng h- ởng một loại học bổng.

Ví dụ 6. Biển số xe máy phân khối lớn gồm 7 ký tự:

NN- NNN - XX,

Trong đó hai ký tự đầu là mã số địa danh, ba ký tự tiếp theo là số hiệu xe, mỗi ký tự là một số từ 0 đến 9, hai ký tự cuối là mã đăng ký gồm hai chữ cái lấy trong bảng chữ cái la tinh gồm 26 chữ cái. Hỏi rằng, để có 2 triệu biển số xe máy khác nhau thì cần phải có ít nhất bao nhiêu mã địa danh khác nhau?

Giải: Với mỗi một mã địa danh ta có $10^3.26^2 = 676.10^3$ biển số xe máy khác nhau. Vì vậy để có 2 triệu biển số xe máy khác nhau, cần có ít nhất nghĩa là mã địa danh khác nhau.

$$2.10^6/(676.10^3),$$

Trong nhiều ứng dụng thú vị của nguyên lý Dirichlet, khái niệm đối t- ợng và cái hộp cần phải đ- ợc lựa chọn một cách khôn khéo hơn. Tiếp theo, ta sẽ dẫn ra một vài thí dụ nh- vậy.

Ví dụ 7. Trong một phòng họp bao giờ cũng tìm đ- ợc hai ng- ời có số ng- ời quen trong số những ng- ời dự họp là bằng nhau.

Giải: Gọi số ng- ời dự họp là n, khi đó số ng- ời quen của một ng- ời nào đó trong phòng họp chỉ có thể nhận các giá trị từ 0 đến n-1. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có ng- ời có số ng- ời quen là 0 (tức là không quen ai cả) và có ng- ời có số ng- ời quen là n-1 (tức là quen tất cả). Vì vậy, theo số l- ợng ng- ời quen ta chỉ có thể phân n ng- ời ra thành n-1 nhóm. Theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất một nhóm phải có không ít hơn hai ng- ời, tức là luôn tìm đ- ợc ít ra là hai ng- ời có số ng- ời quen là bằng nhau.

Bài toán này có thể phát biểu d- ới dạng ngôn ngữ hình học nh- sau: trên mặt phẳng cho n điểm, giữa chúng có một số điểm đ- ợc nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Khi đó bao giờ cũng tìm đ- ợc hai điểm có cùng một số cạnh nối phát ra từ chúng.

Ví dụ 8. Trong một tháng gồm 30 ngày một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất một trận, nh- ng không chơi quá 45 trận. Hãy chứng minh rằng phải tìm đ- ợc một giải đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Giải: Giả sử a_j là tổng số trận thi đấu cho đến hết ngày thứ j của đội. Khi đó

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}$$

Là dãy tăng các số nguyên d- ơng và đồng thời $1 \le a_J \ge 45$. Suy ra dãy

$$\hat{a}_1+14, a+14, \ldots, a_{30}+1414$$

Cũng là dãy tăng các số nguyên d- ơng và $15 \le a_J+14 \le 59$.

Tất cả có 60 số nguyên d- ơng

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \ldots, a_{30}+ 14,$$

trong đó tất cả đều nhỏ hơn hoặc bằng 59. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet, hai trong số các số nguyên này phải là bằng nhau. Vì các số a_1, …, a_{30} là đôi một khác nhau và các số $a_1 + 14$, …, $a_{30} + 14$ cũng là đôi một khác nhau, nên suy ra phải tìm đ- ợc chỉ số i và j sao cho $a_i = a_j + 14$. Điều đó có nghĩa là có đúng 14 trận đấu trong giai đoạn từ ngày $j + 1$ đến ngày i.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng, trong số $n + 1$ số nguyên d- ơng, mỗi số không lớn hơn $2n$, bao giờ cũng tìm đ- ợc hai số sao cho số này chia hết cho số kia.

Giải: Gọi các số đã cho là

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}.$$

Viết mỗi một số a_j trong $n + 1$ số trên d- ới dạng:

$$a_j = 2^{k_j} q_j, \; j = 1, 2, \dots, n + 1$$

trong đó k_j là nguyên không âm, q_j là số lẻ. Các số $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ là các số nguyên lẻ mỗi số không lớn hơn $2n$. Do trong đoạn từ 1 đến $2n$ chỉ có n số lẻ, nên từ nguyên lý Dirichlet suy ra là hai trong số các số $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ là bằng nhau, tức là tìm đ- ợc hai chỉ số i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{kj} q$. Suy ra nếu $k_i < k_j$ thì a_j chia hết cho a_i, còn nếu $k_i \geq k_j$ thì a_i chia hết cho a_j.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng cho 6 điểm đ- ợc nối với nhau từng đôi một bởi các cung màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm đ- ợc 3 điểm sao cho các cung nối chúng có cùng một màu (ta sẽ nói là chúng tạo thành tam giác xanh hoặc đỏ).

Giải: Chọn điểm P nào đó. Từ nó có 5 cung nối với 5 điểm còn lại. Theo nguyên lý Dirichlet, có 3 trong số 5 cung đó phải có cùng một màu, chẳng hạn là màu xanh. Giả sử đó là các cung PA, PB, PC. Nếu nh- một trong số 3 cung AB, AC, BC có màu xanh thì nó cùng với hai trong số ba cung PA, PB, PC tạo thành một tam giác xanh. Nếu ng- ợc lại thì tam giác ABC là một tam giác đỏ.

Ví dụ 11. Trên mặt phẳng cho 9 điểm đ- ợc nối với nhau đôi một bởi các đoạn nối có mầu xanh hoặc đỏ sao cho trong số 3 điểm bất kỳ bao giờ cũng tìm đ- ợc hai điểm đ- ợc nối với nhau bởi đoạn nối màu đỏ. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho luôn tìm đ- ợc 4 điểm mà các đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Giải: Gọi 9 điểm đã cho là A, B, C, D, E, F, G, H, I. Xét 2 tr- ờng hợp:

a) Tìm đ- ợc một điểm là đầu mút của ít nhất 4 đoạn nối màu xanh chẳng hạn điểm đó là A và các đoạn màu xanh đó là AB, AC, AD, AE. Theo giả thiết, trong số các đoạn nối bất kỳ 3 điểm nào cũng có ít nhất một đoạn màu đỏ, suy ra các đoạn BC, Be, BD, CD, CE, ED là màu đỏ. Vậy B, C, D, E là bốn điểm cần tìm.

b) Mỗi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là 3 đoạn nối màu xanh. Trong tr- ờng hợp này, không thể tất cả 9 điểm đều là đầu mút của đúng 3 đoạn nối màu xanh (chứng minh t- ơng tự nh- trong thí dụ 3, mục 3.2), từ đó suy ra phải tìm đ- ợc điểm (I chẳng hạn) là đầu mút của nhiều nhất là 2 đoạn nối màu xanh. Khi đó I là đầu mút của ít nhất 6 đoạn màu đỏ, chẳng hạn IA, IB, IC, ID, IE, IF. Theo kết quả của thí dụ 10, trong số 6 điểm A, B, C, D, E, F phải có ít nhất 3 điểm, chẳng hạn A, B, C, sao cho các đoạn nối chúng có cùng màu, và từ giả thiết suy ra màu đó phải là màu đỏ. Vậy I, A, B, C là bốn điểm cần tìm.

1.3.3. Hệ đại diện phân biệt

Trong nhiều tình huống, sự tồn tại của cấu hình tổ hợp phụ thuộc vào một số điều kiện ràng buộc các tham số ban đầu. Một trong những h- ớng giải quyết là ng- ời ta cố gắng phát hiện ra các điều kiện đó. Bài toán hệ đại diện phân biệt trình bày d- ới đây là một minh hoạ cho h- ớng tìm kiếm này.

Giả sử $S_1, S_2,..., S_m$ là một họ các tập con của một tập hợp S (các S_i không nhất thiết khác nhau). Ta gọi một bộ có thứ tự $a_1, a_2, ..., a_m$ là một hệ đại diện phân biệt của họ này nếu $a_i \in S_i$ và $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$. hệ đại diện phân biệt đ- ợc viết tắt là TRAN (transversal) và thành phần a_i của hệ đ- ợc gọi là đại diện của tập con S_1 $(i = 1, ... , m)$.

<u>*Ví dụ 12*</u>**.** $S = \{1,2,3,4,5\}, S_1 = \{2,5\}, S_2 = \{2,5\}, S_3 = \{1,2,3,4\}, S_4 = \{1,2,5\}$ có TRAN là (2,5,3,1). Một TRAN khác của họ này là (5,2,4,1).

Không phải lúc nào cũng tìm đ- ợc TRAN. Một điều dễ nhận thấy là nếu họ đang xét có TRAN, thì mọi hợp của k tập bất kỳ trong họ phải có ít nhất *k* phần tử (vì luôn tìm đ- ợc *k* đại diện khác nhau của *k* tập đó). Nói khác đi, nếu tìm đ- ợc *k* tập nào đó của họ, mà hợp của chúng có ít hơn k phần tử, thì chắc chắn họ đang xét sẽ không có TRAN. Chẳng hạn trong thí dụ trên, nếu thay tập S_4 của họ đang xét bởi tập $\{2,5\}$, thì họ này sẽ không tồn tại TRAN, vì $S_1 \cup S_2 \cup S_4 = \{2,5\}$ có ít hơn 3 phần tử.

P. Hall đã chứng minh đ- ợc điều kiện cần vừa nêu, cũng đồng thời là đủ cho sự tồn tại TRAN, qua định lý đánh giá cận d- ới của số TRAN d- ới đây:

Định lý Hall. *Giả sử các tập con $S_1, S_2, \ldots, S_m$ thoả mãn điều kiện:*

$$N(S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_1}) \geq k \qquad (1)$$

Với mọi $1 \leq k \leq m, 1 \leq i_1 < i_k \leq m$ và mỗi tập con này chứa ít nhất t phần tử.

Khi đó:

. nếu $t \leq m$ thì họ đang xét có ít nhất t! TRAN

. nếu $t \leq m$ thì họ đang xét có ít nhất t!/(t-m) ! TRAN.

Điều kiện (1) đ- ợc gọi là điều kiện Hall và ta gọi một họ con của họ $S_1, S_2, \ldots, S_m$ là tới hạn nếu đối với nó bất đẳng thức (1) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Quy nạp theo *m*, với *m* = 1, ta có *t = t !/(t-1)* ! TRAN, định lý đúng. Giả sử định lý đúng cho mọi họ tập con của *S* có ít hơn m tập, ta cần chứng minh định lý đúng cho họ tập con gồm *m* tập. Chia làm 2 tr- ờng hợp :

. Không có họ con tới hạn. Chọn a_1 là một phần tử của S_1. Loại nó ra khỏi $S_1, S_2, \ldots, S_m$ (bếu có mặt) và gọi họ nhận đ- ợc là $S_2', S_3', \ldots, S_m'$. Dễ dàng thử lại họ này thoả mãn điều kiện Hall và mỗi tập thuộc họ có ít nhất *t*-1 phần tử. Theo giả thiết quy nạp họ này có ít nhất *(t*-1)! TRAN khi *t-1* $\leq$ *m-1* hay *t* $\leq$*m* và có ít nhất *(t-1) !/(t-m) !* khi *t-1* > *m-1* hay *t* > *m*. Mặt khác, mỗi TRAN của $S_2', S_3', \ldots, S_m'$ cùng với a_1. xác định một TRAN của S_1, S_2,

..., S_m (a_1 đại diện cho S_1). Điều này đúng cho mỗi cách chọn a_1 trong số ít nhất *t* cách chọn nó từ S_1. Từ đó nhận đ- ợc đánh giá cần chứng minh.

. Có một họ con tới hạn. Không mất tính tổng quá, có thể giả thiết họ đó là $S_1, S_2, ..., S_k$ $(k < m)$. Từ sự tồn tại của họ con tới hạn suy ra $t \le k$, vì vậy theo giả thiết quy nạp, họ $S_1, S_2, ..., S_k$ có ít nhất *t*! TRAN. Gọi $T' = (a_1, a_2, ..., a_k)$ là một TRAN nh- thế. Bỏ các phần tử của T', nếu có mặt, ra khỏi các tập $S_{k+1}, \ldots, s_m$ và gọi các tập thu đ- ợc là $S'_{k+1}, \ldots, S'_m$. Khi đó họ $S'_{k+1}, \ldots, S'_m$ sẽ thoả mãn điều kiên Hall. Thật vậy, nếu có một họ con gồm k' tâp jcủa họ đang xét, mà hợp của chúng ít hơn k' phần tử, thì họ con gồm $k + k'$ tập của họ $S_1, S_2, ..., S_m$, nhận đ- ợc bằng cách ghép họ con này với họ $S_1, S_2, ..., S_k$ sẽ có hợp ít hơn $k + k'$ phần tử và điều này là mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Nh- vậy họ $S'_{k+1}, ..., S'_m$ có ít nhất một TRAN. Lấy ít nhất *t!* TRAN của họ $S_1, S_2, ..., S_k$ ghép với TRAN này, ta đ- ợc ít nhất *t!* TRAN của họ $S_1, S_2, ..., S_m$. Định lý đ- ợc chứng minh.

Việc xét sự tồn tại cũng nh- xây dựng TRAN có nhiều ứng dụng trong thực tế. D- ới đây là một số bài toán mà việc giải quyết nó đ- ợc đ- a về việc xây dựng TRAN.

Bài toán ng�ời thi hành. Có *m* ng- ời thi hành và *n* công việc. Giả sử với mỗi ng- ời thứ *i,* ta biết đ- ợc tập S_i là tập hợp các công việc mà ng- ời đó có thể làm. Hỏi có thể phân công mỗi ng- ời làm một việc không?

Lời giải của bài toán đ- ợc dẫn về việc xét sự tồn tại TRAN của họ $\{Si\}$ và việc xây dựng một TRAN chính là xây dựng mộth sự phân công nh- thế.

Bài toán chuyển mạch. Xét một hệ thống chuyển mạch đơn giản gồm 2 nhóm các cực: đầu vào và đầu ra. Tại đầu vào sẽ xuất hiện đòi hỏi về nối mạch. Đòi hỏi này có thể đ- ợc thoả mãn bằng cách nối nó với một đầu ra nào đó. Tập hợp các đầu vào có đòi hỏi nối mạch đ- ợc gọi là danh mục đòi hỏi. Đầu vào nối với đầu ra qua một mạch nối và mạch nối này cần phải không đ- ợc bận nghĩa là nó ch- a phục vụ cho đầu vào nào. Các mạch nối nh- vậy gọi là danh mục tự do. Không giảm tổng quát, ta có thể coi rằng