

Chương 4

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1. Ma trận

4.1.1. Khái niệm ma trận

★ **Định nghĩa 4.1.** Một bảng số chữ nhật có m hàng n cột được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$. a_{ij} là phần tử nằm ở hàng i cột j của ma trận A . Ta viết:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dạng thu gọn là $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Ký hiệu tập các ma trận cỡ $m \times n$ là $\mathcal{M}_{m \times n}$

● **Ví dụ 4.1.** Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; & a_{12} &= -2; & a_{13} &= 4; \\ a_{21} &= 3; & a_{22} &= 5; & a_{23} &= -7. \end{aligned}$$

* **Chú ý:** Trong khuôn khổ bài giảng này, chúng ta chỉ xét chủ yếu các ma trận thực, tức là các ma trận với $a_{ij} \in \mathbb{R}$

4.1.2. Một số dạng đặc biệt của ma trận

a) **Ma trận không**

Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không. Ma trận không được ký hiệu là O .

• Ví dụ 4.2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận không cỡ 2×4

b) Ma trận hàng, ma trận cột

Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng. Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận hàng; } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận cột}$$

c) Ma trận vuông cấp n

Ma trận vuông cấp n là ma trận có n hàng và n cột, ký hiệu $A = [a_{ij}]_n$ hoặc $A = (a_{ij})_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các *phần tử chéo*, chúng tạo thành *đường chéo chính* của ma trận vuông. Ký hiệu tập các ma trận vuông cấp n là $\mathcal{M}_n$

d) Ma trận tam giác:

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$ được gọi là *ma trận tam giác trên*. (Ma trận có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$ được gọi là *ma trận tam giác dưới*. (Ma trận có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác trên hoặc ma trận tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

e) Ma trận chéo

Ma trận chéo là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$:
(Ma trận có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

f) Ma trận đơn vị cấp n

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận chéo với tất cả các phần tử chéo đều bằng 1. Ký hiệu I_n hoặc E_n . Khi n đã rõ hoặc không cần thiết phải nhắc tới ta có thể ký hiệu ma trận đơn vị là I (hoặc E).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3. Phép toán trên ma trận

a) Ma trận bằng nhau

★ **Định nghĩa 4.2.** Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau.

b) Cộng ma trận

★ **Định nghĩa 4.3.** Tổng của hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ là ma trận $A + B$ cỡ $m \times n$ xác định bởi: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

● **Ví dụ 4.3.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C, O là các ma trận cỡ $m \times n$ dễ thấy:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + O &= O + A = A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

c) Nhân ma trận với một số

★ **Định nghĩa 4.4.** Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ với số thực k là ma trận kA cỡ $m \times n$ xác định bởi: $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

Như vậy muốn nhân ma trận với một số ta nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận.

● **Ví dụ 4.4.**

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 2 & 14 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}; k, l \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} k(lA) &= (kl)A \\ (k + l)A &= kA + lA \\ k(A + B) &= kA + kB \end{aligned}$$

d) Nhân hai ma trận

★ **Định nghĩa 4.5.** Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ với ma trận $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ (theo thứ tự đó) là ma trận $AB = C = [c_{ij}]_{m \times n}$ với các phần tử được xác định như sau:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Như vậy khi lấy hàng i của ma trận thứ nhất nhân tương ứng với cột j của ma trận thứ hai ta được phần tử c_{ij} của ma trận tích.

● **Ví dụ 4.5.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 4] = [5]$$

● **Ví dụ 4.6.**

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

● **Ví dụ 4.7.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

● **Ví dụ 4.8.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) & A(kB) &= k(AB) \\ A(B+C) &= AB+AC & (A+B)C &= AC+BC \\ A.I &= I.A = A \end{aligned}$$

* **Chú ý:** : Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

e) **Lũy thừa ma trận**

★ **Định nghĩa 4.6.** Cho A là ma trận vuông cấp n , $k \in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa bậc k của ma trận A là ma trận vuông cùng cấp được xác định như sau:

$$A^k = \underbrace{A.A.\dots A}_{k \text{ ma trận } A}$$

Nhận xét 4.1. Do tính chất kết hợp của phép nhân ma trận nên:

$$A^k = (A^{k-1}).A = A.(A^{k-1})$$

● **Ví dụ 4.9.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n .

Lời giải.

Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dự đoán công thức:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp:

- Công thức đã đúng trong trường hợp $n = 1, n = 2$.
- Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tức là công thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức dự đoán đã được chứng minh xong.

f) Chuyển vị ma trận

★ **Định nghĩa 4.7.** Ma trận chuyển vị của ma trận A là ma trận có được từ A sau khi đổi hàng thành cột và đổi cột thành hàng, ký hiệu A^t

Như vậy nếu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ thì $A^t = [b_{ji}]_{n \times m} : b_{ji} = a_{ij}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

• Ví dụ 4.10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} (A + B)^t &= A^t + B^t; & (kA)^t &= k.A^t \\ (AB)^t &= B^t.A^t; & (A^m)^t &= (A^t)^m \end{aligned}$$

4.1.4. Biến đổi sơ cấp trên ma trận

Các biến đổi sau đây được gọi là biến đổi sơ cấp trên ma trận:

- +) Chuyển vị ma trận;
- +) Đổi chỗ 2 hàng (cột);
- +) Cộng nhiều hàng (cột) vào một hàng (cột);
- +) Nhân một hàng (cột) với một số khác 0;
- +) Nhân một hàng (cột) với một số rồi cộng tương ứng vào hàng (cột) khác.

* **Chú ý:** Hiển nhiên khi thực hiện các biến đổi trên thì ma trận thay đổi. Các phép biến đổi chỉ thực hiện trên hàng được gọi là *biến đổi sơ cấp về hàng*, các phép biến đổi chỉ thực hiện trên cột được gọi là *biến đổi sơ cấp về cột*.

4.2. Định thức

4.2.1. Định nghĩa

Xét ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

★ **Định nghĩa 4.8.** Ma trận con ứng với phần tử a_{ij} của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j , ký hiệu là M_{ij}

● **Ví dụ 4.11.** Với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ta có:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

★ **Định nghĩa 4.9.** Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$ được định nghĩa như sau:

A là ma trận cấp 1: $[a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$

A là ma trận cấp 2: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

A là ma trận cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n})$$

(công thức này còn được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng 1)

● **Ví dụ 4.12.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 1(45 + 48) - 2(-36 - 42) - 3(32 - 35) = 258 \end{aligned}$$

4.2.2. Tính chất

a) **Tính chất cơ bản của định thức**

◇ **Tính chất 1.** $\det(A) = \det(A^t)$

Do đó một tính chất của định thức khi phát biểu đúng với hàng thì cũng sẽ đúng với cột.

◇ **Tính chất 2.** Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của định thức thì định thức đổi dấu.

◇ **Tính chất 3.** Công thức khai triển định thức theo hàng i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

◇ **Tính chất 4.** Công thức khai triển định thức theo cột j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

• **Ví dụ 4.13.** Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Khai triển định thức của A theo hàng 2 ta có:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (0 - 24) + 5(0 + 21) - 6(-8 - 14) = 141 \end{aligned}$$

Khai triển định thức theo cột 3 ta có:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} + 0 \\ &= -3(32 - 35) - 6(-8 - 14) = 141 \end{aligned}$$

b) Định thức của ma trận tam giác

Sử dụng công thức khai triển định thức theo hàng 1 hoặc cột 1 để thấy định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

c) Các phép toán trên định thức

Tổng hai định thức. Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng hai định thức. Chẳng hạn:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Nhân định thức với một số. Khi nhân định thức với một số ta nhân số đó với một hàng (hoặc một cột) của định thức. Ngược lại, khi các phần tử của một hàng (hoặc một cột) có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

• **Ví dụ 4.14.**

$$\begin{aligned} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} && \text{Nhân số 2 vào hàng 1} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} && \text{Đưa số 2 ở cột 3 ra ngoài} \end{aligned}$$

Định thức của tích hai ma trận. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì có:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

• **Ví dụ 4.15.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A^{2010})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\det(A \cdot A^t) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Mà $\det(A) = \det(A^t)$ nên $\det(AA^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = [\det(A)]^2$. Do đó

$$[\det(A)]^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \det(A^{2010}) &= [\det(A)]^{2010} = \{[\det(A)]^2\}^{1005} \\ &= \{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4\}^{1005} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{4020} \end{aligned}$$

d) Các trường hợp định thức bằng 0

Nếu ma trận có một trong các đặc điểm sau đây thì định thức của nó bằng không:

- Có một hàng (hay một cột) bằng không;
- Có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ;
- Có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác).

e) Ảnh hưởng của các biến đổi sơ cấp đến định thức

- Nếu chuyển vị ma trận thì định thức của ma trận không đổi;
- Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức đổi dấu;
- Nếu cộng nhiều hàng (hoặc nhiều cột) vào một hàng (hoặc một cột) thì định thức không đổi;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) của định thức với số $k \neq 0$ thì định thức mới bằng k nhân với định thức cũ;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) với một số rồi cộng vào hàng (hoặc cột) khác thì định thức không đổi.

4.2.3. Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức bằng biến đổi sơ cấp ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các biến đổi sơ cấp đưa định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi được sử dụng;

Bước 2. Tính định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo, và kể đến tác dụng tổng hợp của các biến đổi đã sử dụng.

* **Chú ý:** Có thể kết hợp các công thức khai triển định thức và biến đổi sơ cấp để tính định thức.

• **Ví dụ 4.16.** Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{cộng các hàng vào hàng 1} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{đưa thừa số 6 ở hàng 1 ra ngoài} \\ &= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && \text{cộng } -1 \text{ lần hàng 1 vào các hàng khác} \\ &= 6.1.2.2.2 = 48 \end{aligned}$$

• **Ví dụ 4.17.** Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{Cộng } -3 \text{ hàng 1 vào hàng 2} \\ \text{Cộng } -2 \text{ hàng 1 vào hàng 3} \\ \text{Cộng } 4 \text{ hàng 1 vào hàng 4} \end{array} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{Đưa thừa số 3 ở hàng 3 ra ngoài} \\ \text{Đổi chỗ hàng 2 và hàng 3} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
= -3 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right| \quad \text{Cộng } -2 \text{ hàng 2 vào hàng 4} \\
= -3 \left| \begin{array}{cc|c} 10 & -11 & \\ 5 & 4 & \end{array} \right| \quad \text{Khai triển định thức theo cột 1 (2 lần)} \\
= -3(40 + 55) = -285
\end{array}$$

4.3. Ma trận nghịch đảo

4.3.1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 4.10.** Cho A là ma trận vuông cấp n . Nếu có ma trận B vuông cùng cấp sao cho:

$$AB = BA = I_n$$

thì nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A . Ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1} .

$$\text{Như vậy ta có: } A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Khi A có ma trận nghịch đảo ta nói A không suy biến.

● **Ví dụ 4.18.** Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, ta có:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2; \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Vậy $B = A^{-1}$ và $A = B^{-1}$.

4.3.2. Tính chất

◇ **Định lý 4.1.** Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A nếu có thì duy nhất.

△. Giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của A , nghĩa là:

$$AB = BA = I_n; \quad AC = CA = I_n$$

Từ $AB = I_n$ suy ra:

$$C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_n B = C \Rightarrow B = C \square.$$

◇ **Định lý 4.2.** Nếu ma trận vuông A khả đảo thì $\det(A) \neq 0$.

△. Vì A có ma trận nghịch đảo nên tồn tại A^{-1} và $A.A^{-1} = I_n$. Áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận ta có:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) = 1$$

Vậy phải có $\det(A) \neq 0$. Ta cũng có $\det(A^{-1}) \neq 0$ □.

◇ **Định lý 4.3.** Nếu ma trận vuông $A \in \mathcal{M}_n$ có $\det(A) \neq 0$ thì A khả đảo và:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

ở đó $C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A và $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Δ. Áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng (i) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) &= \det(A) \\ \Rightarrow a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} &= \det(A). \end{aligned}$$

Vì định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không nên suy ra:

$$a_{k1}c_{i1} + a_{k2}c_{i2} + \cdots + a_{kn}c_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}.$$

Do đó $AC^t = \det(A).I$

Áp dụng công thức khai triển định thức theo cột và lập luận tương tự ta cũng có:

$$C^t.A = \det(A).I$$

Như vậy $A. \left(\frac{1}{\det(A)} C^t \right) = \left(\frac{1}{\det(A)} C^t \right). A = I$ suy ra điều phải chứng minh □.

◇ **Định lý 4.4.** Cho A là ma trận vuông cấp n .

- i) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $AB = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.
- ii) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $BA = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

Δ.i) Vì $AB = I$ nên $\det(AB) = \det(I) \Rightarrow \det(A) \det(B) = 1$. Do đó $\det(A) \neq 0$. Theo định lý (4.3) suy ra A khả đảo và có ma trận nghịch đảo A^{-1} .

Nhân đẳng thức $AB = I$ bên trái với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Phần (ii) chứng minh tương tự □.

◇ **Định lý 4.5.** Giả sử $A, B \in \mathcal{M}_n$ là các ma trận khả đảo. Khi đó:

- i) A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$;
- ii) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có A^m cũng khả đảo và $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;
- iii) $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
- iv) AB cũng khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Δ. Các phần được chứng minh tương tự, chẳng hạn chứng minh (iv):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Vậy theo định lý (4.4) suy ra AB khả đảo và có ma trận nghịch đảo là $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ □.

4.3.3. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = [a_{ij}]_n$ ta áp dụng công thức của định lý 4.3:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

ở đó:

$C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A ;

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ là phụ đại số của phần tử a_{ij} ;

M_{ij} là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j .

• **Ví dụ 4.19.** Tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Các phần tử của ma trận phụ hợp là:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Do đó:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 4.20.** Tìm ma trận X , biết:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ta có: $\det(A) = 5 \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1} .

Phương trình ma trận đã cho trở thành: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Ma trận nghịch đảo A^{-1} được tìm như sau:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}C^t = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy ma trận X cần tìm là:

$$X = \frac{1}{5}C^tB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -5 & 14 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -1 & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

4.3.4. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

Muốn tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau: ¹

- Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A .
- Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận A về ma trận đơn vị I , tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào ma trận I .
- Khi A đã được biến đổi thành ma trận I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1} .

$$A|I \rightarrow I|B \Rightarrow B = A^{-1}.$$

• **Ví dụ 4.21.** Tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lời giải. Quá trình biến đổi có thể ghi tóm tắt thành bảng sau:

1	2	3	1	0	0	H_1
2	5	3	0	1	0	H_2
1	0	8	0	0	1	H_3
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	$-2H_1 + H_2 \rightarrow H_2$
0	-2	5	-1	0	1	$-H_1 + H_3 \rightarrow H_3$
1	0	9	5	-2	0	$-2H_2 + H_1 \rightarrow H_1$
0	1	-3	-2	1	0	
0	0	-1	-5	2	1	$2H_2 + H_3 \rightarrow H_3$
1	0	0	-40	16	9	$9H_3 + H_1 \rightarrow H_1$
0	1	0	13	-5	-3	$-3H_3 + H_2 \rightarrow H_2$
0	0	-1	-5	2	1	
1	0	0	-40	16	9	
0	1	0	13	-5	-3	
0	0	1	5	-2	-1	$-H_3 \rightarrow H_3$

¹Cơ sở lý thuyết của phương pháp này đề nghị xem ở phần 4.5.4

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4.4. Hạng của ma trận

4.4.1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 4.11.** Cho A là ma trận cấp $m \times n$. Ma trận con cấp p của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột. Định thức của ma trận đó là *định thức con* cấp p của A .

★ **Định nghĩa 4.12.** Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A , ký hiệu $\rho(A)$ hoặc $r(A)$.

● **Ví dụ 4.22.** Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Các định thức con cấp 3 của A là:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp 2 của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \quad \dots$$

Vậy cấp cao nhất trong các định thức con khác 0 của A là cấp 2, do đó $\rho(A) = 2$.

⊕ **Nhận xét** Các biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

4.4.2. Tìm hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

★ **Định nghĩa 4.13.** Ma trận bậc thang là ma trận có các đặc điểm sau:

- Các hàng bằng 0 ở dưới các hàng khác 0; (nếu ma trận vừa có các hàng bằng 0, vừa có các hàng khác 0).
- Đối với 2 hàng khác không liên tiếp, phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái sang) của hàng trên nằm bên trái phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.

● **Ví dụ 4.23.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận bậc thang có 3 hàng khác 0}$$

Nhận xét 4.2. Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của ma trận đó.

Quy tắc thực hành tìm hạng của ma trận: Để tìm hạng của ma trận A ta sử dụng các biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận bậc thang B . Khi đó:

$$\rho(A) = \rho(B) = \text{số hàng khác không của } B$$

• **Ví dụ 4.24.** Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ H_1+H_3 \rightarrow H_3}]{\substack{-2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ H_1+H_3 \rightarrow H_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{5}H_2 \rightarrow H_2 \\ 3H_2+5H_3 \rightarrow H_3}]{\substack{-\frac{1}{5}H_2 \rightarrow H_2 \\ 3H_2+5H_3 \rightarrow H_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang với 2 hàng khác không. Vậy: $\rho(A) = 2$.

• **Ví dụ 4.25.** Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất trong các giá trị mà nó có thể nhận:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2 + m & 4 & 10 & 1 & m + 5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m hạng của B bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2 + m & 4 & 10 & 1 & m + 5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1 \leftrightarrow C_2, C_2 \leftrightarrow C_3 \\ C_3 \leftrightarrow C_4}]{\substack{C_1 \leftrightarrow C_2, C_2 \leftrightarrow C_3 \\ C_3 \leftrightarrow C_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 10 & 1 & m^2 + m & m + 5 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{H_2 \leftrightarrow H_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 1 & m^2 + m & m + 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ -7H_1+H_3 \rightarrow H_3 \\ -4H_1+H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{-2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ -7H_1+H_3 \rightarrow H_3 \\ -4H_1+H_4 \rightarrow H_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & -25 & -20 & 15 \\ 0 & 6 & -15 & m^2 + m - 12 & m + 9 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{-5H_2+H_3 \rightarrow H_3 \\ H_3 \leftrightarrow H_4}]{\substack{-3H_2+H_4 \rightarrow H_4 \\ -5H_2+H_3 \rightarrow H_3 \\ H_3 \leftrightarrow H_4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 + m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy $\text{hạng}(B)$ nhận giá trị nhỏ nhất nếu $m = 0$. Khi đó $\rho(B) = 2$.

4.5. Hệ phương trình tuyến tính

4.5.1. Định nghĩa

★ **Định nghĩa 4.14.** Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn;
- a_{ij} là hệ số của ẩn x_j trong phương trình thứ (i) ;
- b_i là vế phải của phương trình thứ (i) .

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

thì hệ phương trình (4.1) còn có dạng ma trận:

$$Ax = b$$

trong đó A là ma trận hệ số; x là ma trận ẩn; b là ma trận vế phải.

4.5.2. Giải hệ phương trình bằng ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n không suy biến. Khi đó hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất: $x = A^{-1}b$

• **Ví dụ 4.26.** Giải hệ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A :

$$\det(A) = -14 \neq 0; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

suy ra:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -26 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$x_1 = \frac{13}{7}; \quad x_2 = \frac{3}{7}$$

4.5.3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

◇ **Định lý 4.6. (Định lý Cramer)** Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với A là ma trận vuông không suy biến thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ở đó A_j là ma trận có được từ A sau khi thay cột thứ j bởi cột vế phải b .

Δ. Vì A là ma trận không suy biến, $\det(A) \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

Từ phương trình $Ax = b$, nhân bên trái hai vế với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ phương trình.

Sử dụng biểu thức của A^{-1} ở định lý (4.3) ta suy ra:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là có

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Mặt khác, giả sử hệ có hai nghiệm là x và y :

$$Ax = b; \quad Ay = b$$

Suy ra:

$$Ax - Ay = 0 \Rightarrow A(x - y) = 0$$

Nhân hai vế với A^{-1} :

$$A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0 \Rightarrow (x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất

□.

• **Ví dụ 4.27.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & & + 2x_3 & = 6 \\ -3x_1 & + 4x_2 & + 6x_3 & = 30 \\ -x_1 & - 2x_2 & + 3x_3 & = 8 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Tính được:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0; & \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40 \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72; & \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152 \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$x_1 = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}; \quad x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}; \quad x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 & + & 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ & & 3x_2 + x_3 = -1 \\ & & -29x_3 = -58 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array} \right.$$

4.5.5. Giải và biện luận hệ phương trình dựa vào định lý Kronecker-Capelli

◇ **Định lý 4.7. (Định lý Kronecker-Capelli)** Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(A) = \rho(\bar{A})$.

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính tổng quát $Ax = b$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Lập ma trận $\bar{A} = [A \mid b]$, sử dụng các biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận $\bar{A}$ về ma trận bậc thang (khi đó A cũng được đưa về ma trận bậc thang)

- $\rho(\bar{A}) \neq \rho(A)$: hệ phương trình vô nghiệm;
- $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = n$: hệ đã cho tương đương với hệ tam giác gồm n phương trình, n ẩn. Giải hệ bằng phương pháp Gauss ta nhận được nghiệm duy nhất của phương trình;
- $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = r < n$: hệ có vô số nghiệm và được giải như sau: Từ ma trận bậc thang được biến đổi từ A , chọn một định thức con cấp r khác không, các ẩn ứng với các cột của định thức trên được gọi là ẩn chính, các ẩn còn lại gọi là ẩn phụ. Hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ mới gồm r phương trình tương ứng với các hàng của định thức trên. Giải hệ đó đối với các ẩn chính ta được nghiệm của hệ đã cho (nghiệm của hệ này phụ thuộc vào $n - r$ ẩn phụ).

• **Ví dụ 4.29.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ H_1+H_3 \rightarrow H_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-H_2+H_3 \rightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right]$$

Vì $\rho(A) = 2$; $\rho(\bar{A}) = 3$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

• **Ví dụ 4.30.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{3H_1+H_3 \rightarrow H_3 \\ 2H_1+H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{-2H_1+H_2 \rightarrow H_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 8 & 10 & -14 \\ 0 & 7 & 8 & -10 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{7H_2+3H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{8H_2+3H_3 \rightarrow H_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -26 & 78 \\ 0 & 0 & -25 & 75 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-\frac{25}{26}H_3+H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{\frac{1}{26}H_3 \rightarrow H_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

suy ra $\rho(A) = \rho(\bar{A}) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ \quad - 3x_2 - 7x_3 = 15 \\ \quad \quad x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

• **Ví dụ 4.31.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ 2H_1+H_3 \rightarrow H_3 \\ -3H_1+H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{2H_1+H_2 \rightarrow H_2 \\ 2H_1+H_3 \rightarrow H_3 \\ -3H_1+H_4 \rightarrow H_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{H_2+H_4 \rightarrow H_4}]{\substack{\frac{1}{5}H_2 \rightarrow H_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \rho(A) = \rho(\bar{A}) = 2 \end{aligned}$$

Chọn ẩn x_1 và x_3 là ẩn chính, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_2 \\ x_2; x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• **Ví dụ 4.32.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right] \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{-mH_1+H_3 \rightarrow H_3}]{\substack{-H_1+H_2 \rightarrow H_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{H_2+H_3 \rightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1-m)(m+1)^2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

+ Nếu $(1-m)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad y - z = -m \\ \quad \quad (m+2)z = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m+1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}$$