Mục lục

Danh sách hình vẽ

CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$: Tập các số tự nhiên;
$\mathbb{N}^*$: Tập các số nguyên dương;
$\mathbb{R}$: Tập các số thực;
$\mathbb{R}^*$: Tập các số thực khác 0;
$\mathbb{R}_+^*$: Tập các số thực dương;
$\mathbb{R}_+$: Tập các số thực không âm;
Δ : Bắt đầu chứng minh;
$\square$: Kết thúc chứng minh.
$\star$: Định nghĩa
$\Diamond$: Định lý
$\diamondsuit$: Mệnh đề
$\bigtriangledown$: Hệ quả
$\bullet$: Ví dụ
$*$: Chú ý

Chương 1

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. Khái niệm mở đầu

1.1.1. Không gian metric

Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tập các bộ có thứ tự n số thực $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, mà ta cũng gọi là các điểm. Ta gọi khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của $\mathbb{R}^n$ là biểu thức

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1}$$

Dễ thấy khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$ được cho bởi (1.1) có ba tính chất cơ bản sau của metric:

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Như vậy tập $\mathbb{R}^n$ với khoảng cách được cho bởi công thức (1.1) là không gian metric [2, tr 39].

Giả sử $x^* \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Ta gọi ε - lân cận của x^* là tập hợp sau của $\mathbb{R}^n$:

$$V_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) < \varepsilon\}.$$

Ta gọi lân cận của x^* là mọi tập của $\mathbb{R}^n$ chứa được một ε - lân cận nào đó của x^*. Lân cận của x^* được ký hiệu là $V(x^*)$. Tập $\overset{0}{V}_\varepsilon(x^*) = V_\varepsilon(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là ε- lân cận thủng của x^* . Tập $\overset{0}{V}(x^*) = V(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là lân cận thủng của x^*.

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $x^* \in D$ được gọi là điểm trong của D nếu tồn tại một ε - lân cận của x^* nằm hoàn toàn trong D . Tập D được gọi là mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của nó.

Điểm $y^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của D nếu mọi ε- lân cận của x^* đều vừa chứa điểm thuộc D, vừa chứa điểm không thuộc D. Điểm biên của D có thể thuộc D, cũng có thể không thuộc D. Tập các điểm biên của D được gọi là biên của nó và được ký hiệu là ∂D.

Tập D được gọi là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

Ví dụ ε- lân cận $V_\varepsilon(x^*)$ của x^* là tập mở. Ta gọi $V_\varepsilon(x^*)$ là quả cầu mở tâm x^*, bán kính ε. Biên của quả cầu ấy là tập các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d(x, x^*) = \varepsilon$. Tập $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) \leq \varepsilon\}$ là một tập đóng và được gọi là quả cầu đóng tâm x^*, bán kính ε.

Tập D được gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu chứa nó.

Tập D được gọi là liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kỳ của D bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D. Tập D liên thông được gọi là đơn liên nếu biên của nó gồm một mặt kín, được gọi là đa liên nếu biên của nó gồm nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một.

1.1.2. Định nghĩa hàm số n biến số

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, ...x_n) & \mapsto & u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

được gọi là hàm số n biến số. Tập D được gọi là tập xác định, $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các biến độc lập, u được gọi là biến phụ thuộc của hàm.

Hàm hai biến thường được ký hiệu là $z = f(x, y)$, còn hàm ba biến thường được ký hiệu là $u = f(x, y, z)$.

Về sau ngoài các chữ cái như $x, y, z, ...$ ta còn ký hiệu các điểm của $\mathbb{R}^n$ bằng các chữ cái in hoa như $M, N, P, ...$ Cũng giống như với hàm một biến số, với hàm nhiều biến số ta có quy ước sau: Nếu hàm nhiều biến số được cho bằng biểu thức giải tích $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và không nói gì thêm về tập xác định của hàm số đó thì ta quy ước tập xác định của nó là tập tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$, sao cho $f(M)$ có nghĩa.

•Ví dụ 1.1. Tập xác định của hàm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Đó là hình tròn tâm O(0,0), bán kính bằng 2.

1.1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến

Các khái niệm trong mục này, mục 1.1.4, và trong các phần 1.2, 1.3 được trình bày cho hàm hai biến. Chúng có thể được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến.

⋆ **Định nghĩa 1.1.** Ta nói dãy điểm $M_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, dần đến điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi n dần đến vô cực hay $M_n \to M_0 (n \to \infty)$ nếu $d(M_n, M_0) \to 0 (n \to \infty)$.

Dễ thấy rằng $M_n \to M_0 (n \to \infty) \Leftrightarrow x_n \to x_0, y_n \to y_0 (n \to \infty)$.

⋆ **Định nghĩa 1.2.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận thủng $\overset{0}{V}(M_0)$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói hàm f có giới hạn l khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0, y_0)$ và viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ hay $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = l$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thỏa mãn $M_n \in \overset{0}{V}(M_0), \forall n \in N^*, M_n \to M_0 (n \to \infty)$ ta đều có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$.

Định nghĩa hàm có giới hạn vô cực tương tự như định nghĩa trên.

Nhận xét 1.1. Các tính chất cơ bản của hàm số như: giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương, định lý kẹp,... vẫn còn đúng với giới hạn của hàm hai biến.

•Ví dụ 1.2.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0^2+0^2 = 0.$

Δ.Giả sử $\{(x_n, y_n)\}_n$ là một dãy dần đến $(0,0)$ và $x_n^2+y_n^2 > 0$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2) = 0 \overset{\text{đn}}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0$ $\square$.

(b) Xét $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ta thấy hàm $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ xác định trên $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Với $(x,y)\neq(0,0)$ ta có

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \le 1.|y| = |y|,$$

mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, nên theo định lý kẹp về giới hạn của hàm số $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

1.1.4. Sự liên tục của hàm nhiều biến

$\star$ **Định nghĩa 1.3.** Giả sử hàm $f(x,y)$ xác định trong tập $D \subset \mathbb{R}^2$, điểm $M_0(x_0,y_0) \in D$. Ta nói hàm f liên tục tại M_o nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi điểm M(x, y) thỏa mãn các điều kiện $M \in D$, $d(M, M_0) < \delta$, ta đều có

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa trên, nếu M_o là điểm cô lập của D, tức là trong một lân cận nào đó của M_o chỉ có một điểm duy nhất của D (chính là điểm M_o), thì hàm f liên tục tại M_o. Nếu M_o là điểm giới hạn của D, tức là trong mọi lân cận thủng của M_o đều có ít nhất một điểm của D, thì hàm f liên tục tại M_o khi và chỉ khi

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in D}} f(M) = f(M_0),$$

trong đó giới hạn ở vế trái được hiểu theo nghĩa của định nghĩa 1.2 với một thay đổi nhỏ là đối với dãy điểm M_n có thêm đòi hỏi $M_n \in D, \forall n \in \mathbb{R}^*$.

Hàm f liên tục tại mọi điểm của D được gọi là liên tục trên D.

Hàm f được gọi là liên tục đều trên D nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi cặp điểm $M, N \in D$ thỏa mãn điều kiện $d(M,N) < \delta$ ta đều có

$$|f(M) - f(N)| < \varepsilon.$$

Hàm f liên tục trên tập đóng, bị chặn D (tập compact) có các tính chất tương tự như hàm một biến, đó là: f bị chặn trên D, f đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, f liên tục đều trên D.

Nhận xét 1.2. Các tính chất cơ bản của sự liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm một biến liên tục vẫn còn đúng với hàm hai biến.

•**Ví dụ 1.3.** Khảo sát sự liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{khi} (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

trong đó $\alpha > 1$.

Bài giải. Hàm f liên tục tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$ vì khi đó hàm f là tỉ số của hai hàm liên tục mà mẫu số khác 0. Để xét tính liên tục của hàm f tại (0,0) ta tính giới hạn của hàm số ấy tại (0,0). Theo bất đẳng thức Cauchy

$$|xy|^\alpha \leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha,$$

do đó với $(x, y) \neq (0, 0)$ ta có

$$0 \leq f(x, y) \leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha}.$$

Vì $\alpha - 1 > 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha} = 0.$$

Theo định lý kẹp về giới hạn của hàm số ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

tức là hàm f liên tục tại (0,0). Vậy hàm f liên tục tại mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Đạo hàm riêng và vi phân

1.2.1. Định nghĩa đạo hàm riêng

$\star$ **Định nghĩa 1.4.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ đặt

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng $\Delta_x f$ được gọi là số gia riêng của hàm f theo biến x tại M_o. Đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại M_o là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại. Đạo hàm riêng ấy cũng được ký hiệu bằng một trong các ký hiệu sau:

$$f'_x(M_0), \frac{\partial z}{\partial x}(M_0), z'_x(M_0).$$

Đạo hàm riêng của hàm f theo biến y tại M_o được định nghĩa tương tự.

Từ định nghĩa 1.4 ta suy ra quy tắc thực hành sau: khi tính đạo hàm riêng của hàm hai biến theo biến nào đó ta coi biến còn lại là hằng số.

$\bullet$**Ví dụ 1.4.** Với $z = \arctan \frac{y}{x}$ ta có

$$z'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

1.2.2. Vi phân toàn phần

⋆ **Định nghĩa 1.5.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Với $\Delta x, \Delta y$ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng Δf được gọi là số gia toàn phần của hàm f tại $M_0(x_0, y_0)$. Nếu Δf có dạng

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{1.2}$$

trong đó A, B là các số thực không phụ thuộc vào Δx và Δy, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn ρ khi ρ dần đến 0, thì hàm f được gọi là khả vi tại M_o và biểu thức

$$df = A\Delta x + B\Delta y \tag{1.3}$$

được gọi là vi phân toàn phần của hàm f tại M_o.

◊ **Định lý 1.1.** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì f có các đạo hàm riêng tại M_o và vi phân toàn phần của hàm f tại M_o là*

$$df = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.4}$$

Δ.Áp dụng biểu diễn (1.2) với $\Delta y = 0$, để ý rằng khi đó $\Delta f = \Delta_x f$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2} = |\Delta x|$, ta được

$$\Delta_x f = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

Với $\Delta x \neq 0$ chia hai vế của đẳng thức trên cho Δx ta được

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}.$$

Vế phải của đẳng thức cuối cùng dần tới A khi $\Delta x \to 0$ vì $\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \pm \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Suy ra $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ có giới hạn bằng A khi $\Delta x \to 0$, tức là f có đạo hàm riêng theo x tại M_o và $A = f'_x(M_0)$. Tương tự ta có hàm f có đạo hàm riêng theo y tại M_o và $B = f'_y(M_0)$. Cuối cùng thay $A = f'_x(M_0)$ và $B = f'_y(M_0)$ vào (1.3) ta được (1.4) □.

Định lý đảo của định lý 1.1 không đúng, tức là tính có các đạo hàm riêng của hàm số tại một điểm không kéo theo tính khả vi của hàm số tại điểm ấy. Đây là điểm khác biệt giữa hàm hai biến và hàm một biến. Định lý dưới đây cho ta một điều kiện đủ của hàm khả vi.

◊ **Định lý 1.2.** *Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_o thì hàm f khả vi tại M_o.*

Ta thừa nhận Định lý 1.2. Áp dụng định lý này ta thấy hàm $f(x, y) = x$ có các đạo hàm riêng $f'_x = 1$ và $f'_y = 0$ liên tục trên toàn $\mathbb{R}^2$ nên khả vi trên toàn $\mathbb{R}^2$. Theo công thức (1.4) ta có $dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y$ hay $\Delta x = dx$. Tương tự ta có $\Delta y = dy$. Do đó công thức (1.4) còn có dạng

$$df = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy \tag{1.5}$$

•**Ví dụ 1.5.** Tìm vi phân toàn phần của hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

do đó

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Trong phần cuối của mục này chúng tôi giới thiệu một ứng dụng của vi phân toàn phần. Giả sử hàm f(x,y) khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$. Khi đó số gia toàn phần Δf có dạng (1.2). Bỏ qua vô cùng bé $o(\rho)$ bậc cao hơn ρ ta được công thức xấp xỉ

$$\Delta f \approx A\Delta x + B\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.6}$$

Công thức (1.6) cho phép ta tính giá trị gần đúng của hàm f tại điểm đủ gần điểm M_o.

•Ví dụ 1.6. Tính gần đúng giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{2.98^2 + 4.01^2}.$$

Lời giải. Đặt $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì $A = z(2.98, 4.01)$. Viết A dưới dạng $A = z(3 - 0.02, 4 + 0.01)$, rồi áp dụng công thức (1.6) ta được

$$A \approx z(3, 4) + z'_x(3, 4)(-0.02) + z'_y(3, 4)0.01,$$

trong đó

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$
$$z'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5},$$
$$z'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Ta suy ra $A \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}0.01 \Rightarrow A \approx 4.996$.

1.2.3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1.2.3.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm f(x,y) có các đạo hàm riêng f'_x và f'_y trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Các đạo hàm riêng này là các hàm hai biến xác định trên D. Nếu các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng này tồn tại thì ta gọi chúng là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai của hàm f như sau:

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ hay f''_{xx} hay f''_{x^2}.

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ hay f''_{xy}.

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ hay f''_{yx}.

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ hay f''_{yy} hay f''_{y^2}.

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f nếu tồn tại được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba của hàmf ...

•Ví dụ 1.7. Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$ ta lần lượt có

$$z'_x = 3x^2 - 3 + 2xy^2,\ z'_y = 2x^2y,$$
$$z''_{xx} = 6x + 2y^2,\ z''_{xy} = 4xy,\ z''_{yx} = 4xy,\ z''_{yy} = 2x^2.$$

Các đạo hàm z''_{xy} và z''_{yx} được gọi là các đạo hàm hỗn hợp của hàm z. Trong ví dụ trên ta thấy các đạo hàm hỗn hợp của hàm z bằng nhau. Không phải hàm số nào cũng có tính chất này. Định lý sau cho ta một điều kiện đủ để các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau.

◊ **Định lý 1.3.** *(Định lý Schwartz). Nếu hàm f(x,y) có các đạo hàm hỗn hợp trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$ và các đạo hàm hỗn hợp ấy liên tục tại M_o thì các đạo hàm hỗn hợp ấy bằng nhau tại M_o.*

Ta cũng thừa nhận không chứng minh định lý 1.3.

1.2.3.2. Vi phân cấp cao

Ta gọi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ của hàm $f(x, y)$ tại một điểm là vi phân cấp một của nó tại điểm ấy. Giả sử ta đã định nghĩa vi phân cấp $n \geq 1$ của hàm f tại một điểm. Nếu vi phân cấp n của hàm f xác định trên miền D và khả vi tại điểm M_o nào đó thì vi phân của vi phân cấp n ấy tại M_o được gọi là vi phân cấp (n+1) của hàm f tại M_o. Vi phân cấp n nguyên dương của hàm f tại M_o được ký hiệu là $d^n f(M_0)$.

Giả sử f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp hai trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$, và các đạo hàm riêng cấp hai ấy liên tục tại M_o (do đó $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ theo định lý Schwartz). Khi đó f'_x và f'_y khả vi tại M_o theo định lý 1.2. Vì x và y là các biến độc lập nên $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$ là các hằng số, do đó $df = f'_x dx + f'_y dy$ khả vi tại M_o và vi phân của df tại M_o thỏa mãn

$$\begin{aligned} d(df)(M_0) &= d(f'_x dx + f'_y dy)(M_0) \\ &= d(f'_x dx)(M_0) + d(f'_y dy)(M_0) \\ &= d(f'_x)(M_0)dx + d(f'_y)(M_0)dy \\ &= (f''_{xx}(M_0)dx + f''_{xy}(M_0)dy)dx + (f''_{yx}(M_0)dx + f''_{yy}(M_0)dy)dy \\ &= f''_{xx}(M_0)dx^2 + f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yx}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2. \end{aligned}$$

Trong dãy đẳng thức trên, thay biểu thức đầu tiên bằng $d^2 f(M_0)$ theo định nghĩa, và thay $f''_{yx}(M_0) = f''_{xy}(M_0)$ trong biểu thức cuối cùng ta được công thức của vi phân cấp hai của hàm f

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2. \tag{1.7}$$

Người ta thường dùng ký hiệu tượng trưng để biểu diễn công thức trên như sau

$$d^2 f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^2 f(M_0),$$

trong đó $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo x, $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần theo y, một lần theo x. Tương tự nếu f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp n trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$, và các đạo hàm riêng cấp n liên tục tại M_o, thì khả vi đến cấp n tại M_o. Trong trường hợp này ta cũng có công thức lũy thừa tượng trưng sau

$$d^n f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^n f(M_0).$$

•**Ví dụ 1.8.** Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$, theo công thức (1.7), ta có

$$d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2,$$

do đó theo kết quả của ví dụ 1.7 $d^2 z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2$.

Nói riêng ta có

$$d^2 z(1, 0) = 6dx^2 + 2dy^2.$$

1.2.4. Công thức Taylor đối với hàm nhiều biến

Dưới đây chúng tôi phát biểu không chứng minh một định lý, được sử dụng để khảo sát cực trị của hàm số hai biến số.

◊ **Định lý 1.4.** *Giả sử hàm f(x,y) có các đạo hàm riêng đến cấp n+1 liên tục trong ε - lân cận $V_\varepsilon(M_o)$ của điểm $M_o(x_o, y_o)$ và $(x_0 + dx, y_0 + dy) \in V_\varepsilon(M_0)$. Khi đó $\exists\theta \in (0, 1)$ sao cho*

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(M_0) + \tfrac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \tfrac{1}{n!}d^n f(M_0) + \tfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy).\end{aligned} \qquad (1.8)$$

1.3. Cực trị của hàm nhiều biến

Trong mục này chúng tôi sẽ xem xét ba loại cực trị của hàm nhiều biến, đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện, cực trị có điều kiện, và giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên miền đóng, bị chặn. Như đã nói từ trước, chúng tôi sẽ xét các khái niệm này đối với hàm số hai biến số.

1.3.1. Cực trị tự do của hàm nhiều biến

⋆ **Định nghĩa 1.6.** Hàm $f(x, y)$ được gọi là có cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu tồn tại lân cận $V(M_0(x_0, y_0))$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$ sao cho

$$f(M) < f(M_0), \forall M \in \overset{0}{V}(M_0).$$

Khi đó điểm M_o được gọi là điểm cực đại của hàm f, $f(M_o)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm f và được ký hiệu là $f_{\max}(M_0)$.

Điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu của hàm hai biến được định nghĩa tương tự. Giá trị cực tiểu của hàm f được ký hiệu là $f_{\min}(M_0)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm hai biến được gọi chung là điểm cực trị. Tương tự như vậy đối với giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm nhiều biến.

Chúng tôi đưa vào sử dụng các ký hiệu sau đối với hàm $z = f(x, y)$:

$$p = z'_x(x, y),\ q = z'_y(x, y),\ a = z''_{xx}(x, y),\ b = z''_{xy}(x, y),\ c = z''_{yy}(x, y).$$

◊ **Định lý 1.5.** *Nếu hàm $f(x, y)$ có cực trị và có các đạo hàm riêng tại điểm $M_o(x_o, y_o)$ thì*

$$p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0.$$

Δ.Từ giả thiết của Định lý 1.5 suy ra hàm một biến $g(x) = f(x, y_0)$ có cực trị tại x_o. Hàm g có đạo hàm tại x_o là $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Theo định lý Fermat, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$ hay $p(M_0) = 0$. Hoàn toàn tương tự ta có $q(M_0) = 0$ □.

Ta gọi các điểm tới hạn của hàm hai biến là các điểm mà ở đó các đạo hàm riêng nó tồn tại và triệt tiêu hoặc ở đó ít nhất một trong hai đạo hàm riêng của hàm số ấy không tồn tại. Từ định lý 1.5 suy ra nếu một điểm là điểm cực trị của hàm hai biến thì nó là điểm tới hạn. Khẳng định ngược lại không đúng.

Định lý dưới đây cho phép ta kiểm tra một số điểm tới hạn của hàm hai biến có phải là điểm cực trị của hàm số ấy hay không.

◊ **Định lý 1.6.** *Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của điểm $M_o(x_o,y_o)$. Giả sử $p(M_0)=0,\ q(M_0)=0$. Khi đó tại M_o:*

(i) Nếu $b^2-ac<0$ thì M_o là điểm cực trị của hàm f. Đó là điểm cực tiểu nếu $a>0$, là điểm cực đại nếu $a<0$.

(ii) Nếu $b^2-ac>0$ thì M_o không là điểm cực trị của hàm f.

(iii) Nếu $b^2-ac=0$ thì M_o có thể là điểm cực trị của hàm f, cũng có thể không là điểm cực trị của hàm f.

Δ.Giả sử $h^2+k^2\neq 0$ và h^2+k^2 đủ nhỏ. Áp dụng công thức (1.8) và sử dụng giả thiết $p(M_0)=0,\ q(M_0)=0$ ta được

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\\ &=\tfrac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h^2+2f''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)hk+f''_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k^2\right]=\\ &=\tfrac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)hk+f''_{yy}(x_0,y_0)k^2\right]+\tfrac{1}{2}\left[\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2\right],\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\alpha&=f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f''_{xx}(x_0,y_0),\\ \beta&=f''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f''_{xy}(x_0,y_0),\\ \gamma&=f''_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-f''_{yy}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Do các đạo hàm cấp hai của hàm f liên tục tại M_0 nên α,β,γ dần đến 0 khi $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$ dần đến 0. Từ đó ta có

$$\Delta f=\tfrac{1}{2}\left[ah^2+2bhk+ck^2\right]+o(\rho^2) \tag{1.9}$$

trong đó

$$\begin{aligned}a&=f''_{xx}(x_0,y_0),\\ b&=f''_{xy}(x_0,y_0),\\ c&=f''_{yy}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Giả sử $b^2-ac<0$. Khi đó $a\neq 0$. Giả sử $a>0$. Xét hàm

$$g(u,v)=\tfrac{1}{2}\left[au^2+2buv+cv^2\right].$$

Vì g liên tục trên đường tròn $u^2+v^2=1$ nên đạt được giá trị nhỏ nhất tại (u_0,v_0) nào đó trên đường tròn đó. Ta có

$$\begin{aligned}g(u,v)&\geq g(u_0,v_0)=\tfrac{1}{2a}\left[(au_0)^2+2au_0bv_0+acv_0{}^2\right]\\ &=\tfrac{1}{2a}\left[(au_0+bv_0)^2-(b^2-ac)v_0{}^2\right]>0,\forall (u,v):u^2+v^2=1.\end{aligned}$$

Từ (1.9) suy ra

$$\Delta f=\rho^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[au^2+2buv+cv^2\right]+\tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right\},$$

trong đó $u=\dfrac{h}{\rho},v=\dfrac{k}{\rho}$.

Theo chứng minh trên

$$\Delta f\geq \rho^2\left\{g(u_0,v_0)+\tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right\}>\tfrac{1}{2}\rho^2 g(u_0,v_0)>0$$

với mọi ρ đủ nhỏ. Điều này chứng tỏ M_0 là điểm cực tiểu của hàm f. Chứng minh tương tự ta được nếu $a<0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm f.

Giả sử $b^2 - ac > 0$. Nếu $a \neq 0$ thì $\dfrac{1}{2}\left[at^2 + 2bt + c\right]$ là tam thức bậc hai. Nó đổi dấu trên $\mathbb{R}$ vì $b^2 - ac > 0$. Giả sử t_1, t_2 là hai giá trị thỏa mãn

$$\tfrac{1}{2}\left[at_1{}^2 + 2bt_1 + c\right] < 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\left[at_2{}^2 + 2bt_2 + c\right] > 0.$$

Áp dụng công thức (1.9) với $h = t_1\delta, k = \delta, \delta \neq 0$. Khi đó $\rho^2 = (t_1{}^2 + 1)\delta^2$ nên $o(\rho^2) = o(\delta^2)$. Từ đó ta có

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\left[at_1{}^2\delta^2 + 2bt_1\delta^2 + c\delta^2\right] + o(\delta^2) = \delta^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[at_1{}^2 + 2bt_1 + c\right] + \tfrac{o(\delta^2)}{\delta^2}\right\} < 0$$

với mọi δ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Tương tự áp dụng công thức (1.9) với $h = t_2\lambda, k = \lambda, \lambda \neq 0$, ta được

$$\Delta f = \lambda^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[at_1{}^2 + 2bt_1 + c\right] + \tfrac{o(\lambda^2)}{\lambda^2}\right\} > 0$$

với mọi λ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Ta thấy Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_o, điều đó chứng tỏ M_o không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $c \neq 0$ lập luận tương tự ta cũng có kết luận M_o không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $a = c = 0$ thì $b \neq 0$. Đầu tiên áp dụng (1.9) với $h = k = \xi \neq 0$, khi đó $\rho^2 = \xi^2 + \xi^2 = 2\xi^2$, do đó $o(\rho^2) = o(\xi^2)$, ta được

$$\Delta f = b\xi^2 + o(\xi^2) = \xi^2\left[b + \tfrac{o(\xi^2)}{\xi^2}\right],$$

suy ra Δf cùng dấu với b khi ξ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Sau đó áp dụng (1.9) với $h = \zeta, k = -\zeta, \zeta \neq 0$, ta được

$$\Delta f = -b\zeta^2 + o(\zeta^2) = \zeta^2\left[-b + \tfrac{o(\zeta^2)}{\zeta^2}\right],$$

suy ra Δf trái dấu với b khi ζ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Các lập luận trên chứng tỏ Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_o, điều đó chứng tỏ M_o không là điểm cực trị của hàm f.

Để kết thúc chứng minh định lý ta đưa ra hai ví dụ về điểm tới hạn mà tại đó $b^2 - ac = 0$. Trong một trường hợp điểm tới hạn là điểm cực trị, trong trường hợp còn lại điểm tới hạn không là điểm cực trị.

Đầu tiên xét hàm$f(x, y) = x^4 + y^4$. Ta có $p = f'_x = 4x^3, q = f'_y = 4y^3, a = f''_{xx} = 12x^2, b = f''_{xy} = 0, c = f''_{yy} = 12y^2$.

Điểm tới hạn của hàm f là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ta thấy f có một điểm tới hạn duy nhất là O(0,0). Tại điểm tới hạn đó $a = 0, b = 0, c = 0$ $\Rightarrow b^2 - ac = 0$. Để biết O(0,0) có là điểm cực trị không ta lấy h, k thỏa mãn $h^2 + k^2 \neq 0$, $h^2 + k^2$ đủ nhỏ, và xét dấu của $\Delta f = f(h, k) - f(0, 0)$. Ta có

$$\Delta f = f(h, k) - f(0, 0) = h^4 + k^4 - 0^4 - 0^4 = h^4 + k^4 > 0,$$

Suy ra $O(0, 0)$ là điểm cực tiểu của hàm f.

Tiếp theo xét hàm $g(x, y) = x^3 + y^3$. Tương tự như đối với hàm f, hàm g cũng có một điểm tới hạn duy nhất là O(0,0) và tại đó $b^2 - ac = 0$. Với h, k thỏa mãn $k = 0, h \neq 0$ ta có

$$\Delta g = g(h, 0) - g(0, 0) = h^3 + 0^3 - 0^3 - 0^3 = h^3.$$

Ta thấy Δg đổi dấu dù h có giá trị tuyệt đối nhỏ bao nhiêu chăng nữa, tức là Δg đổi dấu trong mọi lân cận của O(0,0). Điều đó chứng tỏ O(0,0) không là điểm cực trị của hàm g □.

Từ các định lý 1.5 và 1.6 ta suy ra thuật toán tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trên tập xác định của hàm số ấy như sau:

Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp một $p = z'_x, q = z'_y$.

Bước 2. Tìm điểm tới hạn của hàm z bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp hai $a = z''_{xx},\ b = z''_{xy},\ c = z''_{yy}$.

Bước 4. Với mỗi điểm tới hạn của hàm z, kiểm tra xem trường hợp nào trong các trường hợp (i), (ii), (iii) của định lý 1.6 xảy ra. Nếu xảy ra trường hợp (i) hoặc (ii) thì đưa ra kết luận tương ứng. Nếu xảy ra trường hợp (iii) thì cần khảo sát thêm về điểm tới hạn bằng các công cụ khác để biết điểm tới hạn ấy có phải là điểm cực trị không. Chẳng hạn có thể dựa vào định nghĩa cực trị như trong chứng minh của định lý 1.6. Chúng tôi không đi sâu vào phân tích các phương pháp khảo sát đối với điểm tới hạn trong trường hợp này.

Để dễ nhớ định lý 1.6 chúng tôi đưa ra bảng sau:

$b^2 - ac$	a	Kết luận
< 0	> 0	Điểm tới hạn là điểm cực tiểu
	< 0	Điểm tới hạn là điểm cực đại
> 0	Bất kỳ	Điểm tới hạn không là điểm cực trị
$= 0$	Bất kỳ	Chưa kết luận được. Điểm tới hạn có thể là điểm cực trị, có thể không là điểm cực trị

•**Ví dụ 1.9.** Tìm cực trị của hàm số $z = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2, \\ p &= z'_x = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2, \\ q &= z'_y = 2x^3y, \\ a &= z''_{xx} = 36x^2 + 48x - 12 + 6xy^2, \\ b &= z''_{xy} = 6x^2y, \\ c &= z''_{yy} = 2x^3. \end{aligned}$$

Ta tìm các điểm tới hạn của hàm z bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2 = 0 \\ 2x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ y = 0. \end{cases}$$

Suy ra hàm z có ba điểm tới hạn là $M(-2, 0),\ N(-1, 0),\ P(1, 0)$. Ta có bảng sau:

Điểm tới hạn	a	b	c	$b^2 - ac$	Kết luận
M(-2,0)	36>0	0	-16	576>0	M không là điểm cực trị của hàm z
N(-1,0)	-24<0	0	-2	-48<0	N là điểm cực đại của hàm z, $z_{\max}(N) = 13$
P(1,0)	72>0	0	2	-144<0	P là điểm cực tiểu của hàm z, $z_{\min}(P) = -19$

1.3.2. Cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

Người ta gọi cực trị của hàm số

$$z = f(x, y), \tag{1.10}$$

trong đó các biến số bị ràng buộc bởi hệ thức

$$g(x, y) = 0 \tag{1.11}$$

là cực trị có điều kiện.

◊ **Định lý 1.7.** *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số* (1.10) *với điều kiện* (1.11). *Giả sử*

(i) Trong lân cận của M_0 các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục,

(ii) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_0.

Khi đó tại M_0

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Ta thừa nhận định lý này.

Hệ thức (1.12) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_o, y_o).

***Chú thích* 1.1.** *Hệ thức* (1.12) *có thể viết lại thành*

$$f'_x(M_0)g'_y(M_0) - f'_y(M_0)g'_x(M_0) = 0,$$

hay

$$\tfrac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)} = \tfrac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)} \tag{1.13}$$

Đặt các giá trị chung của các vế ở đẳng thức (1.13) là $-\lambda$ ta được

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda g'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda g'_y(M_0) = 0. \end{cases}$$

Ngược lại nếu tồn tại λ thỏa mãn hệ trên thì $\frac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)}$ và $\frac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)}$ bằng nhau vì đều bằng $-\lambda$. Tức là hệ thức (1.13), do đó (1.12) thỏa mãn. Vậy nếu M_o thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của định lý 1.7 thì tồn tại λ sao cho tại M_o

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Hệ (1.14) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_0, y_0, λ).

Đặt

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{1.15}$$

thì

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) \\ F'_y &= f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) \\ F'_\lambda &= g(x, y), \end{aligned}$$