

ĐẠI HỌC HUẾ
Trường Đại học Sư phạm

NGUYỄN HOÀNG VÀ LÊ VĂN HẠP

Giáo trình

GIẢI TÍCH HÀM

Huế - 2014

LỜI NÓI ĐẦU

... Vào năm 1932, Banach xuất bản cuốn sách “Lý thuyết toán tử”, nội dung bao gồm những kết quả được biết vào thời đó về lý thuyết các không gian định chuẩn, đặc biệt là các định lý của Banach đã công bố trong các bài báo từ năm 1922-1929... Cuốn sách này làm cho Giải tích hàm có một tác động như cuốn sách của Van der Waerden về đại số, được xuất bản hai năm trước đó. Các nhà giải tích trên thế giới bắt đầu nhận thức được sức mạnh của phương pháp mới và áp dụng chúng vào các lĩnh vực khác nhau; các ký hiệu và thuật ngữ của Banach được chấp nhận rộng rãi, không gian định chuẩn đầy đủ được gọi là không gian Banach rồi chẳng bao lâu, lý thuyết này trở thành một phần bắt buộc trong chương trình đại học...

J. Dieudonné (1981)

Giải tích hàm là một ngành của giải tích toán học nghiên cứu các đối tượng và cấu trúc toán học trừu tượng, tổng quát hơn các không gian $\mathbb{R}^n$ thông thường. Các kết quả và phương pháp của nó thâm nhập vào nhiều ngành khác nhau như lý thuyết phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng, lý thuyết các bài toán cực trị và biến phân, phương pháp tính,... Ra đời vào những năm đầu của thế kỷ 20, đến nay giải tích hàm tích lũy được những thành tựu quan trọng và nó đã trở thành chuẩn mực trong việc nghiên cứu và trình bày các kiến thức toán học.

Giáo trình này dành cho sinh viên các lớp Toán Đại học Sư phạm, được viết ra trên cơ sở Bài giảng giải tích hàm đã đọc cho sinh viên khoa Toán Đại học Sư phạm Huế trong những năm vừa qua. Đây cũng là học phần bắt buộc cuối cùng về môn giải tích mà sinh viên phải học trong chính khoá.

Nội dung giáo trình gồm 5 chương lý thuyết và có phần hướng dẫn giải bài tập cùng phụ lục. Hai chương đầu dành cho việc trình bày những kiến thức cơ bản, đại cương của không gian định chuẩn và một số định lý quan trọng của giải tích hàm tuyến tính. Các chương còn lại xét các vấn đề cụ thể hơn như các không gian L^p , không gian Hilbert và các vấn đề liên quan đến toán tử tuyến tính. Các nội dung này phù hợp với chương trình hiện hành của ngành toán các

trường sư phạm, được chọn lọc theo phương châm tinh giản và cơ bản giúp sinh viên có được cái nhìn thống nhất đối với ngành giải tích.

Môn học này kế thừa và phát triển các kiến thức của các học phần giải tích trước đó. Do đó sinh viên cần ôn lại các kiến thức về không gian mêtric, tô pô, lý thuyết độ đo, tích phân cũng như một số kỹ năng tính toán của giải tích cổ điển. Để giúp sinh viên tập vận dụng kiến thức đã học, cuối mỗi mục có một số bài tập tương ứng. Phần cuối có hướng dẫn và giải một số các bài tập như là những gợi ý để sinh viên có thể học tốt hơn.

Các tác giả xin được cảm ơn các đồng nghiệp ở Tổ Giải tích Khoa Toán, Trường đại học Sư phạm Huế đã đóng góp ý kiến và tạo điều kiện để giáo trình này ra đời. Chúng tôi mong nhận được những phê bình, góp ý để những lần in sau giáo trình được bổ sung và cải tiến tốt hơn.

Chương 1

KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN

Khái niệm không gian tuyến tính (hay không gian vector) là một trong những khái niệm quan trọng và cơ bản của toán học hiện đại. Các vấn đề của đại số tuyến tính như lý thuyết định thức, ma trận, hệ phương trình tuyến tính, ... được phát biểu và trình bày một cách nhất quán trên ngôn ngữ và cấu trúc của không gian vector. Trong giải tích, khi làm toán trên các tập $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}^n$ chúng ta khá quen thuộc với cấu trúc số học của tập này. Tuy nhiên bước vào các lĩnh vực khác, chẳng hạn lý thuyết phương trình vi phân, phương trình tích phân, khi phải thường xuyên làm việc trên tập các hàm số, ta cần xây dựng các cấu trúc không gian tuyến tính để thực hiện các phép toán đại số trên tập các hàm số đó. Đồng thời, để có thể làm toán giải tích được trên các không gian ấy một cách tự nhiên chúng ta phải đưa cấu trúc mêtric vào cho chúng. Tuy nhiên nếu nghiên cứu riêng rẽ cấu trúc không gian vector và cấu trúc không gian mêtric thì ta sẽ không thu được điều gì mới. Chúng ta hy vọng rằng với sự kết hợp nhất định giữa hai cấu trúc này thì các vấn đề nghiên cứu cùng những kết quả mới sẽ xuất hiện nhiều hơn. Các nội dung đó sẽ được lần lượt trình bày qua các chương của giáo trình này. Mở đầu, mục §1 dành cho việc ôn lại các khái niệm và tính chất đã biết liên quan đến không gian vector. Các mục khác là nội dung mới của chương này.

§1. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH

1.1 Định nghĩa. Một *không gian tuyến tính* hay *không gian vector* X trên một trường K là một tập hợp khác trống X , có trang bị hai phép toán cộng (+) và phép nhân ngoài (nhân vô hướng) nghiệm đúng các tiên đề sau:

1) $(X, +)$ là một nhóm Abel, nghĩa là: với mỗi cặp phần tử $(x, y) \in X \times X$ cho ứng với một phần tử của X ký hiệu $x + y$, gọi là *tổng* của x và y , thoả mãn

- a. $x + y = y + x$ với mọi $x, y \in X$.
- b. $(x + y) + z = x + (y + z)$ với mọi $x, y, z \in X$.
- c. Tồn tại phần tử $0 \in X$, gọi là *phần tử không* sao cho

$$\forall x \in X, \quad x + 0 = 0 + x = x.$$

d. Với mọi $x \in X$ tồn tại một phần tử ký hiệu $-x$, gọi là *phần tử đối* của x sao cho $x + (-x) = 0$.

2) X cùng phép nhân vô hướng trên X , tức là mỗi cặp $(\alpha, x) \in K \times X$ ứng với một phần tử của X , ký hiệu αx , thoả mãn

a. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ với mọi $\alpha \in K, x, y \in X$.

b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ với mọi $\alpha, \beta \in K, x \in X$.

c. $\alpha(\beta x) = (\beta \alpha)x = \alpha \beta x, \alpha, \beta \in K, x \in X$.

d. $\forall x \in X, 1x = x$.

Các phần tử của X gọi là các vector, $\alpha \in K$ gọi là vô hướng. Trong giáo trình này ta chỉ làm việc với trường K là $\mathbb{R}$ (trường các số thực) hoặc $\mathbb{C}$ (trường các số phức).

Ví dụ.

1. Tập hợp $K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ lần}}$ với các phép toán cộng và nhân vô hướng:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

trong đó $\alpha \in K, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ là một không gian vector. Đặc biệt khi $n = 1$ thì K là một không gian vector trên chính nó.

2. Tập hợp các đa thức một biến thực trên $\mathbb{R}$, ký hiệu là $\mathcal{P}$ với phép cộng hai đa thức, phép nhân một số với đa thức được xác định theo cách thông thường cũng là một không gian vector.

3. Tập hợp tất cả các hàm số thực hoặc phức xác định trên một tập A khác trống với các phép toán

$$\forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

là một không gian vector, ta ký hiệu là $\mathcal{F}(A)$.

4. Tập hợp các dãy số thực (hoặc phức) với các phép cộng và phép nhân vô hướng được xác định theo cách thông thường lập thành không gian vector, ký hiệu là s . Thật ra, theo ký hiệu ở ví dụ 3, ta có $s = \mathcal{F}(\mathbb{N})$, với $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên.

1.2 Độc lập tuyến tính-Cơ sở.

1.2.1. Giả sử X là một không gian vector và $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các vector thuộc X . Tổng

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

trong đó các $\alpha_i \in K$ được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các vector $x_1, \dots, x_n$ với các *hệ số* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Cho M là một tập con của X . Ta gọi M là một tập hợp *độc lập tuyến tính* nếu mọi tập hữu hạn các phần tử $\{x_1, \dots, x_n\} \subset M$ và các số $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, nếu

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \quad \text{thì} \quad \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

trong đó n là số tự nhiên bất kỳ.

Trường hợp M không phải là độc lập tuyến tính thì ta gọi M là *phụ thuộc tuyến tính*.

1.2.2. Cho B là một tập con khác trống của không gian vector X . Tập B được gọi là một *cơ sở* (hay *cơ sở Hamel*) của X nếu:

- a) B là một tập hợp độc lập tuyến tính.
- b) B sinh ra X , nghĩa là với mọi $x \in X$, x là một tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn các phần tử của B :

$$(\forall x \in X) \quad (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K; \exists x_1, \dots, x_n \in B) : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (1.2)$$

1.2.3 Mệnh đề. *Giả sử B là một cơ sở của không gian vector X . Khi đó biểu diễn của vector $x \in X$ cho bởi (1.2) được xác định một cách duy nhất.*

Chú ý. Trong phát biểu của mệnh đề này ta qui ước rằng trong tổng (1.2) các vector x_j khác nhau từng đôi một; không có mặt các hạng tử dạng $0x_j$ và hơn nữa, do tính chất giao hoán của phép $+$ nên ta không quan tâm đến thứ tự của các hạng tử.

Chứng minh. Giả sử có hai cách biểu diễn khác nhau:

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m,$$

với $\alpha_i \neq 0, \beta_j \neq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

Ta loại bỏ các hạng tử $\alpha_j x_j$ và $\beta_k y_k$ ở hai vế nếu $\alpha_j = \beta_k$ và $x_j = y_k$. Lúc đó các hạng tử $\alpha_j x_j$ và $\beta_k y_k$ còn lại ở hai vế sẽ xảy ra hoặc $x_j \neq y_k$ hoặc nếu $x_j = y_k$ thì $\alpha_j \neq \beta_k$. Chuyển các hạng tử đó về một vế và viết lại thành

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r = 0, \quad 0 < r \leq n + m.$$

Do B là một tập hợp độc lập tuyến tính nên $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$. Điều này vô lý vì mỗi μ_k phải là α_j hoặc β_k thì khác không hoặc $\alpha_j - \beta_k \neq 0$.

Bây giờ giả sử B là một cơ sở của không gian vector X và B là tập hữu hạn có k phần tử. Khi đó mọi tập con độc lập tuyến tính của X có tối đa k phần tử (Hãy chứng minh điều đó như là cách ôn lại kiến thức của đại số tuyến tính!) Lúc này ta nói X là *không gian hữu hạn chiều*, số phần tử của B gồm k phần tử được gọi là *số chiều* của X và ký hiệu là $\dim X = k$. Nếu X không phải là không gian hữu hạn chiều thì ta gọi nó là *không gian vô hạn chiều* và viết $\dim X = \infty$.

Cho B là tập con của X . Để nhận biết B là cơ sở của không gian vector X , ta còn có:

1.2.4 Định lý. Tập $\emptyset \neq B \subset X$ là cơ sở của không gian vector X khi và chỉ khi B là tập hợp độc lập tuyến tính tối đại (nghĩa là B độc lập tuyến tính và nếu $M \supsetneq B$ thì M phụ thuộc tuyến tính).

Chứng minh.

a. Điều kiện cần. Cho $M \supsetneq B$. Giả sử $x \in M$ và $x \notin B$. Khi đó theo định nghĩa cơ sở, phải có $x_1, \dots, x_n \in B$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ sao cho

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - 1x = 0.$$

Hệ $\{x_1, \dots, x_n, x\}$ phụ thuộc tuyến tính nên M phụ thuộc tuyến tính.

b. Điều kiện đủ. Với $x \in X$, nếu $x \in B$ thì $x = 1x$. Nếu $x \notin B$ thì do $B \cup \{x\}$ phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại một tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

sao cho tất cả các $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ không đồng thời bằng không. Trong các vector x_i này phải có mặt vector x , chẳng hạn $x = x_1$ và khi đó $\alpha_1 \neq 0$ vì nếu không phải như vậy thì B sẽ phụ thuộc tuyến tính. Do đó

$$x = x_1 = -(\alpha_1^{-1} \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_1^{-1} \alpha_n x_n).$$

Vậy B là một cơ sở của X .

1.2.5 Định lý. *Giả sử X là một không gian vector và M là một tập hợp độc lập tuyến tính trong X . Lúc đó tồn tại một cơ sở B của X sao cho $B \supset M$.*

Chứng minh. Ký hiệu $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các tập hợp N độc lập tuyến tính trong X chứa M . Khi đó $\mathcal{F} \neq \emptyset$ vì $M \in \mathcal{F}$. Ta định nghĩa quan hệ thứ tự trên $\mathcal{F}$ như sau: với $N_1, N_2 \in \mathcal{F}$, $N_1 \leq N_2$ khi và chỉ khi $N_1 \subset N_2$. Giả sử $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ là một tập con sắp thẳng của $\mathcal{F}$. Ta đặt N_0 bằng hợp của tất cả các tập N thuộc $\mathcal{A}$. Lúc đó N_0 là một cận trên của $\mathcal{A}$. Do $\mathcal{F}$ thoả mãn các giả thiết của bổ đề Zorn nên trong $\mathcal{F}$ tồn tại một phần tử tối đại B . Vậy B là cơ sở phải tìm.

1.2.6 Hệ quả. *Mọi không gian vector $X \neq \{0\}$ đều tồn tại cơ sở.*

Chứng minh. Lấy $x \in X$, $x \neq 0$ và đặt $M = \{x\}$ rồi áp dụng Định lý 1.2.5.

1.3 Không gian vector con.

1.3.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian vector và M là một tập con khác trống của X . Giả sử các phép toán cộng và nhân vô hướng trên X thu hẹp lại trên M cũng làm cho M thành một không gian vector. Khi đó ta gọi M là một *không gian vector con* (hay gọi tắt là không gian con) của X .

1.3.2 Định lý. *Cho M là một tập con khác trống của X . Điều kiện cần và đủ để M trở thành một không gian con của X là:*

- a. $\forall x, y \in M : x + y \in M$.
- b. $\forall x \in M, \forall \alpha \in K : \alpha x \in M$.

Chứng minh. Điều kiện cần hiển nhiên. Do giả thiết, các phép toán cộng và nhân vô hướng là kín trên M . Hơn nữa, các tính chất của các phép toán này vẫn còn đúng khi ta làm việc với các phần tử của M nên tám tiên đề của một không gian vector được nghiệm đúng. Từ đây cho phép ta suy được điều kiện đủ.

Chú ý. Trong thực hành, để kiểm tra một tập Y nào đó là không gian vector, người ta thường nhúng nó vào trong một không gian vector đã biết rồi kiểm tra các điều kiện của định lý trên.

1.3.3 Ví dụ.

1. Tập hợp l^1 gồm tất cả các dãy số thực hoặc phức $x = (x_n)_n$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ là một không gian con của không gian s các dãy số.

2. Tập hợp các hàm số liên tục xác định trên đoạn $[a, b]$ ký hiệu $C_{[a,b]}$ là một không gian con của không gian các hàm số $\mathcal{F}([a, b])$.

3. Tập hợp $l^\infty = \{x = (x_n)_n \subset K : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ các dãy số thực hoặc phức $x = (x_n)_n$ bị chặn cũng là một không gian vector. Đó là không gian con của không gian vector s các dãy số.

Từ Định lý 1.3.2 ta có mệnh đề sau.

1.3.4 Mệnh đề. *Giao một họ tùy ý các không gian con của X là một không gian con của X .*

Chứng minh. Giả sử $(M_i)_{i \in I}$ là một họ các không gian con của X . Đặt $M = \bigcap_{i \in I} M_i$. Ta có M khác trống vì nó có chứa vector 0. Nếu $x, y \in M$, (tức là $x, y \in M_i, \forall i \in I$), $\alpha \in K$ thì $x + y \in M_i, \alpha x \in M_i$ với mọi $i \in I$. Do đó $x + y \in M$ và $\alpha x \in M$. Vậy M là không gian con của X .

1.3.5 Định nghĩa. Giả sử A là một tập con của không gian vector X . Luôn luôn tồn tại một không gian con của X chứa A (chẳng hạn bản thân không gian X). Giao của họ tất cả các không gian con chứa A cũng là một không gian con chứa A . Không gian con này được gọi là *không gian con sinh bởi A* hay là *bao tuyến tính* của A và được ký hiệu là $\langle A \rangle$ hoặc $\text{span}(A)$. Theo định nghĩa, đây là không gian con bé nhất của X chứa tập A . Ta có:

1.3.6 Mệnh đề. *Bao tuyến tính của tập A là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các phần tử thuộc A .*

Chứng minh. Đặt $M = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K, x_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$. Rõ ràng theo Định lý 1.3.2, M là không gian con của X . Hơn nữa từ $A \subset M$ suy ra $\langle A \rangle \subset M$. Mặt khác do $x_i \in A$ nên $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \langle A \rangle$ vì $\langle A \rangle$ là một không gian vector. Do đó $M \subset \langle A \rangle$ và từ đó $M = \langle A \rangle$.

1.3.7 Định nghĩa. Giả sử M và N là hai không gian con của X . Ta ký hiệu $Z = M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$. Lúc đó Z cũng là một không gian vector con của X , được gọi là *tổng* của M và N . Ta dễ dàng suy ra:

$$M + N = \langle M \cup N \rangle.$$

Nếu $Z = M + N$ và $M \cap N = \{0\}$ thì Z được gọi là *tổng trực tiếp* của M và N , ký hiệu $Z = M \oplus N$. Ta có:

1.3.8 Định lý. Cho M, N là các không gian vector con của X và đặt $Z = M + N$. Điều kiện cần và đủ để $Z = M \oplus N$ là với mọi $z \in Z$, z được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $z = x + y$ với $x \in M, y \in N$.

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử $Z = M \oplus N$ và $z = x + y = x' + y'$ với $x, x' \in M; y, y' \in N$. Lúc đó $x - x' = y' - y$. Vì $x - x' \in M, y - y' \in N$ nên $x - x' = y' - y \in M \cap N = \{0\}$. Vậy $x = x'$ và $y = y'$.

Điều kiện đủ. Ta có $Z = M + N$. Giả sử $x \in M \cap N$. Lúc đó ta viết $x = x + 0 = 0 + x$. Do tính duy nhất của biểu diễn, ta suy ra $x = 0$ nghĩa là $M \cap N = \{0\}$ hay $Z = M \oplus N$.

1.4. Không gian vector tích–Không gian vector thương.

1.4.1. Cho $X_1, \dots, X_n$ là n không gian vector trên cùng một trường K . Ký hiệu X là tích Descartes của các X_i : $X = X_1 \times \dots \times X_n$. Với các phần tử $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ thuộc X và $\alpha \in K$ ta định nghĩa

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Lúc đó dễ dàng kiểm tra để thấy rằng với hai phép toán trên, X trở thành một không gian vector và X được gọi là *tích* (hay *tích trực tiếp*) của n không gian vector $X_1, \dots, X_n$.

1.4.2 Cho X là một không gian vector và M là một không gian con của nó. Ta định nghĩa quan hệ sau:

$$\forall x, y \in X, x \equiv y \pmod{M} \Leftrightarrow x - y \in M.$$

Rõ ràng đây là một quan hệ tương đương trên X . Cho $x \in X$. Nếu $y \equiv x \pmod{M}$ thì $y - x \in M$ hay $y \in x + M$. Ngược lại nếu $z \in x + M$ thì $z - x \in M$ hay $z \equiv x \pmod{M}$. Do đó lớp tương đương của x , ký hiệu $\bar{x}$ chính là tập $x + M = \{x + m; m \in M\}$. Ta ký hiệu tập thương là $X/M = \{\bar{x} : x \in X\}$.

Chú ý rằng

$$x \equiv x' \pmod{M} \Leftrightarrow x - x' \in M,$$

$$y \equiv y' \pmod{M} \Leftrightarrow y - y' \in M,$$

do đó ta có thể định nghĩa các phép toán cộng và nhân vô hướng trên X/M như sau

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y},$$

$$\alpha \overline{x} = \overline{\alpha x},$$

trong đó x, y là các phần tử bất kỳ trong các lớp tương đương $\overline{x}, \overline{y}$.

Theo chú ý trên, định nghĩa các phép toán này là đúng đắn vì không phụ thuộc vào việc chọn các đại diện $x \in \overline{x}, y \in \overline{y}$.

Dễ dàng kiểm tra để thấy rằng với các phép toán trên, X/M trở thành một không gian vectơ, gọi là *không gian vectơ thương* của X theo không gian con M . Lưu ý rằng phần tử 0 của X/M chính là tập M .

1.5. Ánh xạ tuyến tính.

Cho X, Y là hai không gian vectơ trên trường K và một ánh xạ $A : X \rightarrow Y, x \rightarrow Ax$. Ta gọi A là một *ánh xạ tuyến tính* (hay *toán tử tuyến tính*) nếu với mọi $x, y \in X, \alpha, \beta \in K$ ta có

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Cho A là ánh xạ tuyến tính từ X vào Y , ta ký hiệu $\text{Im } A = A(X)$ và $\text{Ker } A = A^{-1}(0)$ lần lượt ảnh và hạt nhân của A . Nếu A là song ánh ta nói A là phép đẳng cấu tuyến tính và X, Y là hai không gian vectơ đẳng cấu với nhau.

Bây giờ giả sử $A, B : X \rightarrow Y$ là hai ánh xạ tùy ý. Ta có các định nghĩa thông thường:

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$

$$(\alpha A)x = \alpha Ax,$$

trong đó $\alpha \in K, x \in X$.

Dễ dàng thấy rằng nếu A, B là các ánh xạ tuyến tính thì $A + B, \alpha A$ cũng là những ánh xạ tuyến tính từ X vào Y .

Ký hiệu $\mathbf{L}(X, Y)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính từ X vào Y . Khi đó với hai phép toán vừa xác định, $\mathbf{L}(X, Y)$ lập thành một không gian vectơ. Nếu $Y = K$ ($\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$) lúc đó ánh xạ tuyến tính $A : X \rightarrow K$ được gọi là *phiếm hàm tuyến tính trên X* , còn $\mathbf{L}(X, K)$ được ký hiệu là X' và gọi là *không gian liên hiệp đại số* của không gian X .

BÀI TẬP

1.1. Cho X là một không gian vector, f_1, f_2 là hai phiếm hàm tuyến tính xác định trên X . Giả sử với mọi $x \in X$ thì $f_1(x)f_2(x) = 0$. Chứng minh rằng $f_1 \equiv 0$ hay $f_2 \equiv 0$.

1.2. Cho X là một không gian vector và $A : X \rightarrow X$ là một toán tử tuyến tính. Giả sử $A^2 = A \circ A = 0$. Chứng minh rằng $I - A$ là một song ánh. (I là toán tử đồng nhất id.)

1.3. Cho $f, f_1, \dots, f_n$ là các phiếm hàm tuyến tính trên không gian vector X . Giả sử $\text{Ker } f \supset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i$. Chứng minh rằng f là một tổ hợp tuyến tính của các $f_1, \dots, f_n$.

§2. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH ĐỊNH CHUẨN.

2.1. Các định nghĩa.

Cho X là một không gian vector và $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số. Ta gọi hàm số này là một chuẩn trên X nếu nó thoả mãn 3 tiên đề sau:

1. $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ với mọi $\lambda \in K, x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, với mọi $x, y \in X$ và $\lambda \in K$ (bất đẳng thức tam giác).

Khi đó cặp $(X, \| \cdot \|)$ được gọi là một *không gian tuyến tính định chuẩn* hay gọn hơn *không gian định chuẩn*.

Nếu trường $K = \mathbb{R}$ (t.ư., $\mathbb{C}$) thì ta gọi $(X, \| \cdot \|)$ là *không gian định chuẩn thực* (t.ư., *không gian định chuẩn phức*). Số thực $\|x\|$ được gọi là *chuẩn* hay *độ dài* của vector $x \in X$. Nếu không có sự nhầm lẫn về chuẩn trên X thì ta sẽ ký hiệu tắt là không gian định chuẩn X .

Cho X là một không gian định chuẩn. Với $x, y \in X$ ta đặt

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Khi đó từ ba tiên đề của chuẩn, ta suy ra ngay d là một metric trên X . Hơn nữa d còn thoả mãn:

- a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$
- b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$

với mọi $x, y, z \in X$, $\lambda \in K$.

Ngược lại cho X là một không gian vector và d là một mêtric xác định trên X . Giả sử d thoả mãn thêm các điều kiện a) và b). Ta đặt

$$\|x\| = d(x, 0)$$

thì rõ ràng $\|\cdot\|$ là một chuẩn trên X . Do đó nếu X là một không gian định chuẩn thì nó cũng là một không gian mêtric (với mêtric sinh ra từ chuẩn, tức là $d(x, y) = \|x - y\|$). Từ đây tất cả các khái niệm của không gian mêtric đều được chuyển cho không gian định chuẩn. Để ý rằng các tính chất a) và b) chính là mối liên hệ giữa các phép toán cộng và nhân vô hướng trên X với hàm chuẩn (mêtric).

2.2. Các ví dụ.

2.2.1. Tập hợp K^n các bộ n số thực (hoặc số phức) $x = (x_1, \dots, x_n)$ là một không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

chuẩn này được gọi là chuẩn Euclide trong K^n và K^n được gọi là không gian Euclide n chiều. Đặc biệt, khi $n = 1$ ta có K là một không gian định chuẩn với $\|x\| = |x|$.

2.2.2. Tập hợp $C_{[a,b]}$ các hàm số liên tục trên $[a, b]$ với các phép toán cộng và nhân với một số xác định theo cách thông thường là một không gian vector. Hơn nữa, nếu đặt

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

thì nó trở thành một không gian định chuẩn.

2.2.3. Tập hợp l^∞ tất cả các dãy số thực hay phức bị chặn là một không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Không gian này còn ký hiệu là m .

Độc giả tự kiểm nghiệm ba tiên đề về chuẩn của các ví dụ này.

2.2.4. Ký hiệu l^2 là tập hợp tất cả các dãy số thực hay phức $x = (x_n)_n$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ hội tụ. Đặt

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

lúc đó l^2 trở thành một không gian định chuẩn.

Chứng minh. Giả sử $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$. Ta có bất đẳng thức hiển nhiên

$$|x_n + y_n|^2 \leq (|x_n| + |y_n|)^2 \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 < \infty$. Ngoài ra nếu $\lambda \in K$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$. Vậy $x + y$ và λx thuộc l^2 nên l^2 lập thành một không gian vector.

Tiếp theo ta có

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x_n = 0,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$ nghĩa là $x = 0$.

Tiên đề 2 rõ ràng. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |x_n + y_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^k (|x_n|^2 + 2|x_n y_n| + |y_n|^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^k |x_n|^2 + 2\sqrt{\sum_{n=1}^k |x_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^k |y_n|^2} + \sum_{n=1}^k |y_n|^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{n=1}^k |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^k |y_n|^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Ta cho $k \rightarrow \infty$ thì nhận được

$$(\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Lấy căn hai vế ta có $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ hay là bất đẳng thức tam giác được chứng minh.

2.3. Sự hội tụ trong không gian định chuẩn.

Như đã nói ở trên, không gian định chuẩn là một không gian mêtric. Tuy nhiên do vai trò quan trọng của không gian định chuẩn cũng như ta thường gặp đối tượng này trong các môn học khác và các áp dụng thực tiễn nên ở đây ta sẽ trình bày lại một số khái niệm và tính chất thông dụng ấy theo ký hiệu và ngôn ngữ của chuẩn.

Cho X là một không gian định chuẩn.

1. Dãy $(x_n)_n \subset X$ *hội tụ* đến x trong không gian X , ký hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ hay $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) nghĩa là

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Nói cách khác,

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right) \iff ((\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) : \|x_n - x\| < \epsilon).$$

Tương tự với tính chất của giá trị tuyệt đối, ta có:

$$\forall x, y \in X : \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Thật vậy, từ tiên đề 3 của chuẩn suy ra:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{hay} \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Thay đổi vai trò của x và y ta nhận được

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

Như thế bất đẳng thức được chứng minh.

Từ đây ta có:

2. Nếu $x_n \rightarrow x$ thì $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Nói cách khác, chuẩn là một hàm số liên tục trên X . Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta có

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{khi } n \rightarrow \infty$$

và điều này khẳng định kết quả 2.

Tính chất trên thường được viết lại là $\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ đối với mọi dãy $(x_n)_n$ hội tụ trong X .

3. Mọi dãy hội tụ thì bị chặn. Thật vậy, nếu $(x_n)_n$ hội tụ đến x thì dãy số thực $(\|x_n\|)_n$ hội tụ đến $\|x\|$. Do đó dãy $(\|x_n\|)_n$ bị chặn. Điều này cũng có nghĩa là dãy $(x_n)_n$ bị chặn trong không gian định chuẩn X .

4. Nếu $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ thì $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$. Nếu $x_n \rightarrow x_0$ và $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_n, \alpha_0 \in K$ thì $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha_0 x_0$. Nói cách khác, các phép toán cộng và nhân vô hướng $X \times X \rightarrow X$, $K \times X \rightarrow X$, $(x, y) \rightarrow x + y$ và $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ là các ánh xạ liên tục.

Thật vậy, từ các đánh giá

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| &\leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \rightarrow 0 \\ \|\alpha_n x_n - \alpha_0 x_0\| &= \|(\alpha_n x_n - \alpha_n x_0) + (\alpha_n x_0 - \alpha_0 x_0)\| \\ &\leq |\alpha_n| \|x_n - x_0\| + |\alpha_n - \alpha_0| \|x_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $n \rightarrow \infty$, ta suy ra được điều cần chứng minh.

Định nghĩa. Cho $a \in X$ và $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Ta gọi các ánh xạ $f, g : X \rightarrow X$ lần lượt xác định bởi

$$\begin{aligned} f(x) &= a + x, \\ g(x) &= \lambda x, \quad \text{với mọi } x \in X, \end{aligned}$$

là *phép tịnh tiến* theo vector a và *phép vị tự* tỉ số λ .

Từ 4) ta suy ra:

5. Các phép tịnh tiến theo vector a và phép vị tự tỉ số $\lambda \neq 0$ là các phép đồng phôi từ X lên X .

Thật vậy, ta thấy ngay f, g là song ánh và $f^{-1}(x) = -a + x$, $g^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$ nên f, g cùng với các ánh xạ ngược của nó f^{-1}, g^{-1} là liên tục.

Nhận xét. Các tính chất 4 và 5 cũng nêu lên sự kết hợp giữa cấu trúc đại số và phép toán cơ bản của giải tích (phép lấy giới hạn).

Ta có các hệ quả sau.

a) Giả sử A là tập mở (t.ư., đóng) trong X thì $x_0 + A = A + x_0 = \{x_0 + a : a \in A\}$, $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ là các tập mở (t.ư., đóng) trong X .

Điều này suy từ ảnh của một tập mở (t.ư., đóng) qua ánh xạ đồng phôi (các phép tịnh tiến vector a , vị tự tỉ số $\lambda \neq 0$) thì mở (t.ư., đóng).

b) Cho A mở, B là tập tùy ý trong X thì $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ là tập mở. Thật vậy,

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$$

tức là $A + B$ bằng hợp của một họ các tập mở nên nó là tập mở.

2.4. Không gian Banach.

2.4.1. Định nghĩa. Cho $(x_n)_n$ là một dãy trong không gian định chuẩn X . Nhắc lại rằng $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy nếu $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$. Nếu với metric sinh từ chuẩn, X trở thành không gian metric đầy đủ thì X được gọi là *không gian Banach*. Nói cách khác, X là một không gian Banach nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ về một điểm của nó.

2.4.2. Ví dụ. Các không gian K^n , $C_{[a,b]}$, $l^2, \dots$ là các không gian Banach. Không gian $C_{[a,b]}^L$ không phải là không gian Banach.

2.4.3. Định lý về bổ sung một không gian định chuẩn.

Giả sử X là một không gian định chuẩn (không đầy đủ). Bằng cách đầy đủ hoá không gian metric (X, d) trong đó $d(x, y) = \|x - y\|$ ta được không gian metric đầy đủ $\tilde{X}$ và X trù mật trong $\tilde{X}$. Tuy nhiên trong $\tilde{X}$ cần xây dựng các phép toán để nó trở thành không gian định chuẩn, nhận X làm không gian vector con.

Lấy $x, y \in \tilde{X}$. Vì $\overline{X} = \tilde{X}$ nên tồn tại các dãy $(x_n)_n, (y_n)_n$ trong X hội tụ lần lượt đến x, y . Dễ dàng thấy rằng $(x_n + y_n)_n, (\lambda x_n)_n$ là những dãy Cauchy trong $X \subset \tilde{X}$ nên ta định nghĩa

$$\lambda x = \lim_n \lambda x_n, \quad x + y = \lim_n (x_n + y_n).$$

Có thể kiểm nghiệm lại rằng, các định nghĩa này xác định một cách đúng đắn các phép toán đại số để biến $\tilde{X}$ thành không gian vector, nhận X làm không gian con. Ngoài ra $\tilde{X}$ trở thành không gian Banach với chuẩn trên $\tilde{X}$ được cho bởi công thức $\|x\| = d(x, 0)$, trong đó d là metric trên $\tilde{X}$. Tóm lại, ta có thể phát biểu định lý như sau:

Định lý. Với mọi không gian định chuẩn không đầy đủ X , bao giờ cũng tồn tại một không gian Banach $\tilde{X}$ chứa X sao cho X trù mật trong $\tilde{X}$.

2.5. Chuỗi trong không gian định chuẩn.

Trong đại số tuyến tính ta chỉ định nghĩa được tổng hữu hạn các vector của một không gian vector X . Muốn đưa vào khái niệm “tổng vô hạn” các vector hay còn gọi là chuỗi, ta cần phải xét đến giới hạn của những tổng hữu hạn. Điều này có thể thực hiện được đối với không gian định chuẩn vì trong đó đã xây dựng phép toán giới hạn.

2.5.1 Định nghĩa. Cho $(x_n)_n$ là một dãy trong không gian định chuẩn X . Ta lập một dãy mới, xác định bởi

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$\dots = \dots$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Khi đó dãy $(s_n)_n$ được gọi là một *chuỗi* và ta thường ký hiệu chuỗi này là $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta còn gọi s_n là *tổng riêng* thứ n của chuỗi, x_n là *hạng thức tổng quát* (thứ n) của chuỗi ấy.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là *hội tụ* nếu dãy tổng riêng s_n hội tụ. Khi đó đặt $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ và gọi s là *tổng* của chuỗi: $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Như vậy cùng một biểu thức $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ta vừa dùng để ký hiệu một chuỗi nói chung, vừa ký hiệu tổng của nó khi chuỗi này hội tụ.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ.

2.5.2 Các tính chất.

Phần lớn các tính chất của chuỗi trong không gian định chuẩn giống với tính chất của chuỗi số thực và ngay cách chứng minh cũng vậy nếu chúng không liên quan đến thứ tự như trong $\mathbb{R}$. Ta nêu lại một số kết quả thường dùng.

a) Ta có thể đánh số một chuỗi từ một số nguyên nào đó chứ không nhất thiết là từ 1, chẳng hạn $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$. Đôi lúc ta còn xét chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$.

b) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ là hai chuỗi hội tụ, có tổng lần lượt là x và y còn λ là một số thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \pm y_n), \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$ cũng hội tụ và lần lượt có tổng là $x \pm y, \lambda x$.

c) **Tiêu chuẩn Cauchy.** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ thì với mọi $\epsilon > 0$ đều tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $n \geq n_0$ và $p \in \mathbb{N}$ ta có bất đẳng thức.

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{n+p} x_m \right\| < \epsilon.$$

Ngược lại nếu điều kiện này được thoả mãn và X là không gian Banach thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

Thật vậy, những điều nói trên chính là áp dụng tiêu chuẩn Cauchy đối với dãy $(s_n)_n$ trong không gian định chuẩn X .

d) Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ. Khi ấy

$$\lim_n x_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

Vậy nếu một chuỗi hội tụ thì hạng thức tổng quát dần đến 0 khi $n \rightarrow \infty$.

e) Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ trong X . Ký hiệu $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i$ là phần dư thứ n của chuỗi. Ta có $r_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

2.5.3 Định lý.

a) Trong không gian Banach X mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

b) Nếu trong không gian định chuẩn X , mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ thì X là một không gian Banach.

Chứng minh.

a) Cho X Banach và $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ là một chuỗi trong X sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ. Ta có đánh giá

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{n+p} x_m \right\| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} \|x_m\| < \epsilon$$

với n đủ lớn và p tùy ý. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có kết quả.

b) Bây giờ cho $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy trong X . Áp dụng định nghĩa, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta chọn x_{n_k} sao cho $n_k < n_{k+1}$ và

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Các bất đẳng thức này chứng tỏ rằng chuỗi

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + \dots$$

hội tụ tuyệt đối. Theo dấu hiệu so sánh, chuỗi này sẽ hội tụ và gọi x là tổng của nó. Như vậy

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} [x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})] = \lim_k x_{n_k}$$

Dãy Cauchy $(x_n)_n$ có một dãy con $(x_{n_k})_k$ hội tụ về x thì $(x_n)_n$ cũng hội tụ về x . Thật vậy, cho $\epsilon > 0$ sẽ có n_0 để $\|x_n - x_m\| < \epsilon/2$ với mọi $m, n \geq n_0$. Mặt khác, $x_{n_k} \rightarrow x$ nên có k_0 để $k \geq k_0$ thì $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon/2$. Khi đó nếu $n \geq \max(n_0, n_{k_0})$ thì

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}} - x\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Vậy mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ nên X là một không gian Banach.

2.6 Không gian định chuẩn con.

2.6.1 Định nghĩa. Cho $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn và Y là một không gian vector con của nó. Lúc đó hàm $\|\cdot\|$ thu hẹp lên Y cũng là một chuẩn và với chuẩn đó, Y trở thành một không gian định chuẩn. Ta gọi Y là *không gian định chuẩn con* (hay vắn tắt, không gian con) của không gian định chuẩn X .

Không gian con của một không gian định chuẩn có thể đóng hoặc không. Tuy nhiên ta có.

2.6.2 Định lý. *Giả sử X là một không gian định chuẩn và Y là một không gian con của nó. Khi đó bao đóng $\overline{Y}$ của Y cũng là một không gian con đóng của X .*

Chứng minh. Giả sử $x, y \in \overline{Y}$, α, β là hai số. Ta cần kiểm tra $\alpha x + \beta y \in \overline{Y}$. Vì $x, y \in \overline{Y}$ nên tồn tại hai dãy $(x_n)_n, (y_n)_n$ trong Y sao cho $x_n \rightarrow x$ và $y_n \rightarrow y$. Lúc đó $\alpha x_n + \beta y_n \in Y$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ đồng thời $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y$. Vậy $\alpha x + \beta y \in \overline{Y}$.