

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ TP.HCM**

VẬT LÝ ĐIỆN TỪ

Biên Soạn:

TS.Trần Ngọc

TS. Nguyễn Văn Thuận

ThS. Đỗ Quốc Huy

ThS. Nguyễn Thị Ngọc Anh

Tailieu.vn

VẬT LÝ ĐIỆN TỪ

Ấn bản 2015

MỤC LỤC

MỤC LỤC	I
HƯỚNG DẪN.....	VI
BÀI 0: GIẢI TÍCH VECTƠ.....	1
0.1 HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES	1
0.2 HỆ TỌA ĐỘ TRỤ	2
0.3 HỆ TỌA ĐỘ CẦU	3
0.4 TRƯỜNG VÔ HƯỚNG	4
0.4.1 Định nghĩa	4
0.4.2 Mặt mức hay mặt đẳng trị	4
0.4.3 Đạo hàm theo hướng	4
0.4.4 Gradient của trường vô hướng	5
0.5 TRƯỜNG VECTƠ.....	7
0.5.1 Định nghĩa	7
0.5.2 Đường dòng của một trường vectơ	7
0.5.3 Thông lượng và divergence của một trường vectơ.....	8
0.5.4 Lưu số và rotational của một trường vectơ.....	11
0.5.5 Toán tử Laplace (Laplacian)	13
BÀI 1: ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH.....	15
1.1 ĐIỆN TÍCH - ĐỊNH LUẬT COULOMB	15
1.1.1 Điện tích, định luật bảo toàn điện tích.....	15
1.1.2 Định luật Coulomb.....	18
1.2 ĐIỆN TRƯỜNG	20
1.2.1 Khái niệm điện trường	20
1.2.2 Vectơ cường độ điện trường.....	20
1.2.3 Điện thông	23
1.2.4 Định lý Gauss đối với điện trường	24
1.2.5 Năng lượng điện trường	27
1.3 ĐIỆN THẾ, HIỆU ĐIỆN THẾ.....	27
1.3.1 Công của lực tĩnh điện (lực điện trường).....	27
1.3.2 Thế năng của điện tích trong điện trường	28
1.3.3 Điện thế.....	29
1.3.4 Liên hệ giữa điện trường và điện thế.....	31
1.4 LƯỜNG CỰC ĐIỆN	33
1.4.1 Khái niệm.....	33
1.4.2 Điện thế và điện trường của lưỡng cực điện	33
1.4.3 Tác dụng của điện trường lên lưỡng cực điện	34
TÓM TẮT	36
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	39
BÀI 2: TỤ ĐIỆN VÀ CHẤT ĐIỆN MÔI	41

2.1 VẬT DẪN CÂN BẰNG TĨNH ĐIỆN	41
2.1.1 Khái niệm về vật dẫn cân bằng tĩnh điện	41
2.1.2 Tính chất của vật dẫn cân bằng tĩnh điện	42
2.2 HIỆU ỨNG MŨI NHỌN	44
2.3 HIỆN TƯỢNG ĐIỆN HƯỞNG.....	44
2.4 ĐIỆN DUNG CỦA VẬT DẪN CÔ LẬP	46
2.5 TỤ ĐIỆN	47
2.5.1 Khái niệm về tụ điện.....	47
2.5.2 Đặc tính điện của tụ	48
2.5.3 Các thông số cơ bản của tụ	52
2.5.4 Các công thức liên quan đến tụ	54
2.5.5 Ghép tụ điện	58
2.5.6 Phân loại tụ điện	61
2.5.7 Cách đọc trị số tụ	66
2.5.8 Phương pháp kiểm tra tụ.....	67
2.5.9 Các ứng dụng của tụ.....	68
2.6 CHẤT ĐIỆN MÔI.....	69
TÓM TẮT	72
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	75
BÀI 3: DÒNG ĐIỆN VÀ ĐIỆN TRỞ	79
3.1 CÁC KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN VỀ DÒNG ĐIỆN.....	79
3.1.1 Dòng điện, chiều của dòng điện	79
3.1.2 Cường độ dòng điện	80
3.1.3 Mật độ dòng điện	82
3.1.4 Độ linh động.....	84
3.1.5 Nguồn điện, suất điện động.....	85
3.2 ĐỊNH LUẬT OHM	86
3.2.1 Dạng vi phân của định luật Ohm	86
3.2.2 Định luật Ohm đối với đoạn mạch đồng chất.....	87
3.2.3 Định luật Ohm đối với mạch điện kín	89
3.2.4 Đối với đoạn mạch bất kì (định luật Ohm tổng quát).....	90
3.3 ĐIỆN TRỞ (RESISTORS).....	91
3.3.1 Đặc tính điện	91
3.3.2 Các thông số cơ bản của điện trở	92
3.3.3 Các công thức liên hệ đến điện trở	93
3.3.4 Ghép điện trở	94
3.3.5 Cách đọc trị số điện trở.....	96
3.3.6 Phân loại điện trở.....	99
3.4 HỌ CÁC ĐIỆN TRỞ	101
3.4.1 Biến trở (Varistor hay Variable Resistor)	101
3.4.2 Nhiệt trở (Thermistor).....	103
3.4.3 Quang trở (LDR)	105
3.4.4 Điện trở tùy áp VDR (Volt Dependent Resistor hay Varistor)	106

3.4.5 Điện trở cầu chì (<i>Fusistor</i>)	106
3.4.6 Dây điện trở	107
3.5 CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐIỆN TRỞ	107
3.6 MẠCH ĐIỆN	108
3.6.1 Ngăn mạch và hở mạch.....	108
3.6.2 Công tắc	109
3.6.3 Thiết bị bảo vệ.....	110
TÓM TẮT	111
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	113
BÀI 4: TỪ TRƯỜNG TĨNH.....	117
4.1 TỪ TRƯỜNG, ĐỊNH LUẬT BIOT - SAVART - LAPLACE	117
4.1.1 Tương tác từ.....	117
4.1.2 Khái niệm từ trường, vectơ cảm ứng từ và vectơ cường độ từ trường	118
4.1.3 Định luật Biot - Savart - Laplace	118
4.1.4 Đường sức cảm ứng từ.....	123
4.2 ĐỊNH LÝ GAUSS ĐỐI VỚI TỪ TRƯỜNG.....	123
4.2.1 Từ thông	123
4.2.2 Định lý Gauss	124
4.3 ĐỊNH LÝ AMPÈRE (ĐỊNH LÝ DÒNG TOÀN PHẦN).....	125
4.3.1 Lưu số của vectơ cảm ứng từ.....	125
4.3.2 Định lý Ampère	125
4.3.3 Áp dụng định lý Ampère để xác định từ trường.....	125
4.4 ĐỊNH LUẬT AMPÈRE	126
4.4.1 Biểu thức định luật	126
4.4.2 Công của lực từ.....	128
4.5 TÁC DỤNG CỦA TỪ TRƯỜNG LÊN MẠCH ĐIỆN KÍN.....	129
4.5.1 Lực từ tác dụng lên dây dẫn kín	129
4.5.2 Momen lực từ tác dụng lên khung dây dẫn kín	129
4.6 CHUYỂN ĐỘNG CỦA HẠT MANG ĐIỆN TRONG TỪ TRƯỜNG	130
4.6.1 Lực Lorentz	130
4.6.2 Chuyển động của hạt điện trong từ trường đều	131
4.7 HIỆU ỨNG HALL.....	133
4.8 MỘT VÀI ỨNG DỤNG	135
4.8.1 Bơm điện từ	135
4.8.2 Xác định điện tích riêng của ion, khối phổ kế	136
4.8.3 Máy gia tốc cyclotron và synchrotron	137
TÓM TẮT	139
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	143
BÀI 5: CẢM ỨNG ĐIỆN TỪ.....	146
5.1 CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN VỀ CẢM ỨNG ĐIỆN TỪ	146
5.1.1 Hiện tượng cảm ứng điện từ	146
5.1.2 Định luật Lenz	147
5.1.3 Định luật Faraday về suất điện động cảm ứng.....	147
5.2 DÒNG ĐIỆN FOUCAULT	152

TÓM TẮT	154
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	156
BÀI 6: CUỘN CẢM VÀ ỨNG DỤNG	159
6.1 CUỘN CẢM.....	159
6.1.1 Cấu tạo.....	159
6.1.2 Hiện tượng tự cảm	161
6.1.3 Hồ cảm	164
6.1.4 Trở kháng của cuộn cảm	165
6.1.5 Điện dung của cuộn cảm	166
6.1.6 Ghép cuộn cảm	166
6.1.7 Cách đọc trị số cuộn cảm	166
6.1.8 Năng lượng từ trường	167
6.1.9 Sự nạp xả của cuộn cảm	170
6.1.10 Hệ số phẩm chất (Quality factor) của cuộn cảm	171
6.1.11 Phân loại cuộn cảm.....	172
6.2 BIẾN THỂ (TRANSFORMER)	176
6.2.1 Cấu tạo.....	176
6.2.2 Nguyên lý hoạt động	177
6.2.3 Hướng của vòng dây.....	177
6.2.4 Hệ thức biến thể	178
6.2.5 Biến thể với vai trò là một thiết bị cách điện	179
6.2.6 Các loại biến thể khác.....	180
6.2.7 Các lỗi thường gặp trong biến thể.....	182
6.2.8 Cách đo thử kiểm tra	183
6.3 ỨNG DỤNG CỦA CUỘN CẢM	183
6.3.1 Mạch lọc nguồn.....	183
6.3.2 Chốt tần số radio	184
6.3.3 Mạch điều chỉnh.....	184
6.3.4 Micro điện động	185
6.3.5 Loa điện động.....	185
6.3.6 Relay.....	186
6.4 HIỆU ỨNG BỀ MẶT	188
TÓM TẮT	191
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	193
BÀI 7: TRƯỜNG VÀ SÓNG ĐIỆN TỪ	197
7.1 THUYẾT MAXWELL VỀ ĐIỆN TỪ TRƯỜNG.....	197
7.1.1 Luận điểm Maxwell thứ nhất – điện trường xoáy	197
7.1.2 Luận điểm Maxwell thứ hai – dòng điện dịch	199
7.1.3 Hệ phương trình Maxwell.....	201
7.1.4 Ý nghĩa của thuyết Maxwell	202
7.2 SÓNG ĐIỆN TỪ	203
7.2.1 Hệ phương trình Maxwell mô tả sóng điện từ	203
7.2.2 Sóng điện từ phẳng, phân cực thẳng	204

7.2.3 Tính chất tổng quát của sóng điện từ.....	206
7.2.4 Thang sóng điện từ.....	208
7.2.5 Ứng dụng của sóng điện từ.....	209
TÓM TẮT	211
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	213
BÀI 8: VẬT RẮN TINH THỂ SIÊU DẪN	217
8.1 VẬT RẮN TINH THỂ.....	217
8.1.1 Năng lượng của electron trong vật rắn tinh thể	217
8.1.2 Phân bố Fermi - Dirac	222
8.1.3 Khối lượng hiệu dụng của electron	226
8.1.4 Các electron dẫn trong kim loại.....	228
8.1.5 Hiệu điện thế tiếp xúc giữa hai kim loại	232
8.2 SIÊU DẪN	234
8.2.1 Khái niệm về siêu dẫn.....	234
8.2.2 Tính chất của chất siêu dẫn	235
8.2.3 Giải thích hiện tượng siêu dẫn.....	237
TÓM TẮT	238
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	240
BÀI 9: CHẤT BÁN DẪN VÀ ỨNG DỤNG	243
9.1 CHẤT BÁN DẪN (SEMICONDUCTOR)	243
9.1.1 Bán dẫn tinh khiết (bán dẫn thuần)	244
9.1.2 Chất bán dẫn tạp	246
9.1.3 Sự phụ thuộc điện trở suất của chất bán dẫn vào nhiệt độ.....	249
9.2 HIỆN TƯỢNG KHUẾCH TÁN	250
9.3 LỚP TIẾP XÚC P-N	252
9.3.1 Lớp tiếp xúc p-n khi chưa có điện trường ngoài	252
9.3.2 Lớp tiếp xúc p-n khi có điện trường ngoài	253
9.4 DIODE CHỈNH LƯU	256
9.4.1 Cấu tạo.....	256
9.4.2 Các thông số cơ bản của diode	258
9.4.3 Hình dạng của một số diode	259
9.4.4 Điện trở và tụ của diode và cách đo thử kiểm tra tụ.....	259
9.5 TRANSISTOR LƯỜNG CỰC.....	262
9.5.1 Cấu tạo.....	262
9.5.2 Nguyên tắc hoạt động	262
9.5.3 Tra cứu- hình dạng - cách đo thử	265
9.5.4 Các thông số cơ bản của transistor	267
TÓM TẮT	270
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	272

HƯỚNG DẪN

MÔ TẢ MÔN HỌC

Giáo trình Vật lý điện từ này trình bày những kiến thức cơ bản về các hiện tượng điện - từ và một số ứng dụng của chúng trong khoa học, công nghệ và đời sống. Những nội dung được đưa ra trong giáo trình là: các khái niệm điện tích, điện trường, điện thế, điện thông, các định lý, định luật về điện trường tĩnh; các khái niệm từ trường, cảm ứng từ, từ thông, các định lý, định luật về từ trường tĩnh; hiện tượng cảm ứng điện từ; giới thiệu tổng quan về trường điện từ và hệ phương trình Maxwell. Giáo trình cũng đề cập tới cấu tạo, nguyên lý hoạt động và các ứng dụng của một số linh kiện điện tử thông dụng như điện trở, tụ điện, cuộn cảm,... thường gặp trong các mạch điện. Ngoài ra, giáo trình còn trình bày về tính dẫn điện của vật rắn tinh thể và siêu dẫn, chất bán dẫn và ứng dụng.

NỘI DUNG MÔN HỌC

- Bài 0: **Giải tích vectơ**. Bài này trình bày cách xác định tọa độ của các điểm trong hệ tọa độ Descartes, hệ tọa độ trụ, hệ tọa độ cầu. Ngoài ra, trong bài còn đề cập đến các khái niệm về trường vô hướng, trường vectơ, một số đại lượng đặc trưng cho các trường này.
- Bài 1: **Điện trường tĩnh**. Bài này đề cập đến các khái niệm về điện tích, mật độ điện tích, điện trường, cường độ điện trường, đường sức điện trường, điện thế, hiệu điện thế, điện thông; nguyên lý chống chất điện trường; định luật bảo toàn điện tích, định luật Coulomb, định lý Gauss và ứng dụng để xác định cường độ điện trường cho các hệ điện tích phân bố đối xứng; mối liên hệ giữa điện trường và điện thế; năng lượng điện trường; lưỡng cực điện.
- Bài 2: **Tụ điện và chất điện môi**. Trong bài trình bày các nội dung về vật dẫn cân bằng tĩnh điện, hiệu ứng mũi nhọn; điện dung của vật dẫn; cấu tạo, hình dạng, đặc tính của một số tụ điện đơn giản; cách đọc trị số tụ điện; ghép tụ điện; cách

đo thử kiểm tra tụ; năng lượng của tụ điện; một số ứng dụng của tụ điện. Bài học còn khảo sát sự phân cực của chất điện môi; điện trường trong chất điện môi.

- Bài 3: **Dòng điện và điện trở.** Bài học đề cập đến các khái niệm về dòng điện, cường độ dòng điện, mật độ dòng điện, sức điện động; các định luật cơ bản về dòng điện; ký hiệu, cấu tạo, hình dạng, đặc tính điện của điện trở; màu sắc và cách đọc trị số của điện trở; cách ghép điện trở; một số ứng dụng của điện trở; mạch điện tử, khái niệm ngắn mạch và hở mạch; mạch bảo vệ.
- Bài 4: **Từ trường tĩnh.** Bài này trình bày các khái niệm về tương tác từ, từ trường, cường độ từ trường, đường sức từ, từ thông; định luật Biot - Savart - Laplace, định lý Gauss cho từ trường, định lý Ampère về dòng toàn phần và về lực tác dụng lên một phần tử dòng điện; tác dụng của từ trường lên dòng điện; công của lực từ; chuyển động của hạt mang điện trong từ trường; hiệu ứng Hall và ứng dụng.
- Bài 5: **Cảm ứng điện từ.** Những nội dung cơ bản của bài học này là hiện tượng cảm ứng điện từ; định luật Lenz về chiều dòng điện cảm ứng; định luật Faraday về suất điện động cảm ứng; một số ứng dụng của hiện tượng cảm ứng điện từ.
- Bài 6: **Cuộn cảm.** Bài học trình bày về hiện tượng tự cảm, hồ cảm; hệ số tự cảm, cách ghép cuộn cảm, cách đọc trị số của cuộn cảm, năng lượng từ trường; đặc tính điện của cuộn cảm đối với mạch DC và AC, phân loại và một vài ứng dụng của cuộn cảm. Biến thế và các vấn đề liên quan, cách đo thử kiểm tra cuộn cảm và biến thế.
- Bài 7: **Giới thiệu trường và sóng điện từ.** Bài này đưa ra hai luận điểm của Maxwell; giới thiệu hệ phương trình Maxwell; ý nghĩa của thuyết điện từ Maxwell; sóng điện từ, sóng điện từ phẳng, thang sóng điện từ; ứng dụng của sóng điện từ.
- Bài 8: **Vật rắn tinh thể - Siêu dẫn.** Trong bài đề cập đến khái niệm về vật rắn tinh thể; sự tách các mức năng lượng trong vật rắn; phân loại vật rắn theo thuyết vùng năng lượng; phân bố Fermi - Dirac; các electron dẫn trong kim loại; hiệu điện thế tiếp xúc; hiện tượng siêu dẫn.
- Bài 9: **Chất bán dẫn - Ứng dụng.** Bài này giới thiệu đại cương về chất bán dẫn, chất bán dẫn thuần, tạp loại N, loại P; cấu trúc vùng năng lượng; lớp tiếp xúc P-N,

đặc tuyến Volt - Ampe, ứng dụng chế tạo linh kiện điện tử: diode chỉnh lưu, BJT, FET,...

KIẾN THỨC TIỀN ĐỀ

Để học tốt môn học này sinh viên phải có nền tảng về toán cao cấp.

YÊU CẦU MÔN HỌC

Sinh viên phải dự học đầy đủ các buổi lên lớp, tham khảo tài liệu, ôn lại bài đã học và làm bài tập đầy đủ ở nhà.

CÁCH TIẾP NHẬN NỘI DUNG MÔN HỌC

Đối với mỗi bài học, sinh viên đọc trước mục tiêu và tóm tắt bài học, sau đó đọc kỹ nội dung bài học.

Muốn học tốt môn này thì khi học xong bài học nào sinh viên cần ôn tập ngay bài học đó, trả lời các câu hỏi và làm đầy đủ bài tập trong mỗi bài học; tìm thêm các thông tin liên quan đến nội dung bài học trong các tài liệu tham khảo, để hiểu được các kiến thức trình bày trong bài học một cách đầy đủ và sâu sắc.

PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ MÔN HỌC

Môn học được đánh giá gồm:

- Điểm quá trình: 30%. Hình thức và nội dung do giảng viên quyết định, phù hợp với quy chế đào tạo và tình hình thực tế tại nơi tổ chức học tập.
- Điểm thi: 70%; Hình thức thi: trắc nghiệm; Thời gian làm bài: 60 phút. Nội dung thi là các kiến thức từ bài học 1 đến bài học 9.

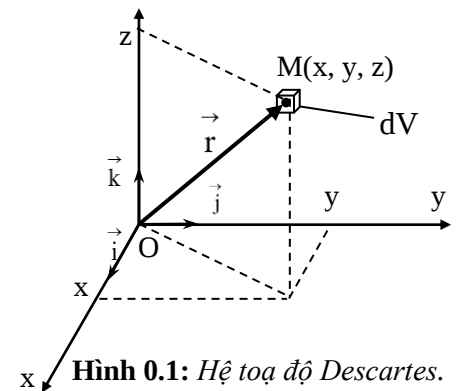
BÀI 0: GIẢI TÍCH VECTO

Sau khi học xong bài này, sinh viên có thể:

- Xác định được tọa độ của các điểm trong các hệ trục tọa độ: Descartes, hệ tọa độ trụ, hệ tọa độ cầu.
- Hiểu được các khái niệm về trường vô hướng, trường vectơ.

0.1 HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES

Hệ tọa độ Descartes còn gọi là hệ tọa độ vuông góc thuận, gồm 3 trục tọa độ Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau, sao cho một *đỉnh ốc quay từ trục x sang trục y theo góc nhỏ thì đỉnh ốc sẽ tiến theo chiều trục z* . Trên mỗi trục đó lần lượt có các vectơ đơn vị (vectơ có độ lớn bằng 1 đơn vị) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ hướng dọc theo chiều tăng của trục (hình 0.1).



Hình 0.1: Hệ tọa độ Descartes.

Vị trí điểm M trong không gian được xác định bởi vectơ tia, hay vectơ vị trí, còn gọi là vectơ bán kính $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \quad (0.1)$$

Bộ ba số (x, y, z) gọi là tọa độ của điểm M , cũng là tọa độ của vectơ tia $\vec{r}$. Khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ là:

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (0.2)$$

Với một dịch chuyển nhỏ bất kì của điểm M , vectơ vị trí sẽ thay đổi một lượng:

$$d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k} = (dx, dy, dz) \quad (0.3)$$

Yếu tố thể tích trong hệ tọa độ Descartes là:

$$dV = dx.dy.dz \quad (0.4)$$

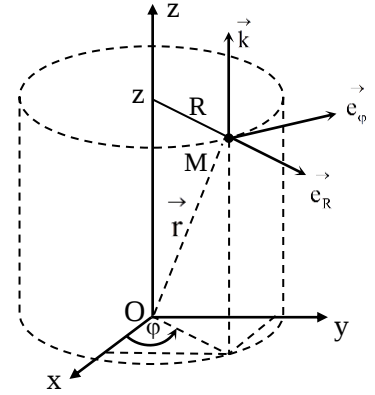
Hệ trục tọa độ Descartes là *trục chuẩn* (các trục tọa độ trực giao và chuẩn hóa). Ngoài hệ tọa độ Descartes, người ta còn xây dựng nhiều hệ tọa độ khác như: hệ tọa độ trụ, hệ tọa độ cầu.

0.2 HỆ TỌA ĐỘ TRỤ

Hệ tọa độ trụ thường được sử dụng trong các bài toán có tính đối xứng quanh trục Oz. Trong hệ tọa độ trụ, vị trí của điểm M được xác định bởi ba biến số R, φ, z (hình 0.2), gọi là tọa độ của điểm M. Ta viết $M(R, \varphi, z)$. Các tọa độ (R, φ, z) trong hệ tọa độ trụ liên hệ với các tọa độ (x, y, z) trong hệ tọa độ Descartes như sau:

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = z \quad (0.5)$$

Tại mỗi điểm M, ta đặt các vectơ đơn vị: $\vec{e}_R$ hướng theo phương của bán kính R ra xa trục Oz, $\vec{e}_\varphi$ nằm trong mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy và hướng theo chiều tăng của φ , $\vec{k}$ hướng theo trục Oz.



Hình 0.2: Hệ tọa độ trụ.

Vectơ $\vec{r}$ xác định vị trí của điểm M trong tọa độ trụ được biểu diễn như sau:

$$\vec{r} = R \cdot \vec{e}_R + z \cdot \vec{k} \quad (0.6)$$

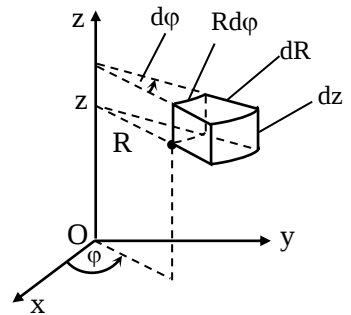
$$\text{Và do đó } r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (0.7)$$

Với sự dịch chuyển rất nhỏ theo hướng bất kì của điểm M, vectơ $\vec{r}$ thay đổi một lượng:

$$d\vec{r} = dR \cdot \vec{e}_R + R d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{k} \quad (0.8)$$

Yếu tố thể tích trong hệ tọa độ trụ (xem hình 0.3):

$$dV = R dR d\varphi dz \quad (0.9)$$



Hình 0.3: Yếu tố thể tích trong hệ tọa độ trụ.

0.3 HỆ TỌA ĐỘ CẦU

Hệ tọa độ cầu thường được sử dụng trong các bài toán có tính đối xứng quanh tâm O. Trong hệ tọa độ cầu, vị trí của điểm M được xác định bởi ba biến số r, θ, φ (hình 0.4), gọi là tọa độ của điểm M. Ta viết $M(r, \theta, \varphi)$. Các tọa độ (r, θ, φ) trong hệ tọa độ cầu liên hệ với các tọa độ (x, y, z) trong hệ tọa độ Descartes như sau:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta \quad (0.10)$$

Tại mỗi điểm M, ta đặt các vectơ đơn vị: $\vec{e}_r$ hướng theo phương của bán kính r ra xa tâm O, $\vec{e}_\theta$ nằm trong mặt phẳng tạo bởi điểm M và trục Oz, hướng theo chiều tăng của θ , $\vec{e}_\varphi$ nằm trong mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxy và hướng theo chiều tăng của φ . Khi đó vectơ $\vec{r}$ được biểu diễn:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \quad (0.11)$$

Và vectơ $d\vec{r}$ ứng với sự dịch chuyển nhỏ theo phương bất kì tính từ điểm M là:

$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad (0.12)$$

Diện tích vi phân dS trong tọa độ cầu:

$$dS = r \sin \theta \cdot d\varphi \cdot r d\theta = r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (0.13)$$

Thể tích vi phân dV trong tọa độ cầu:

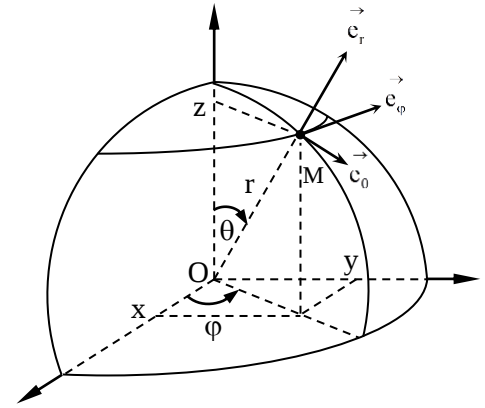
$$dV = dS \cdot dr = r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta \quad (0.14)$$

Diện tích của mặt cầu bán kính $r = R$:

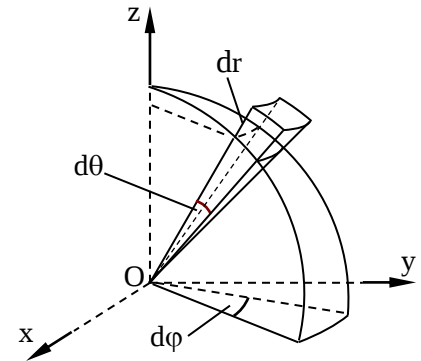
$$\begin{aligned} S &= \int_{(S)} dS = \iint_{(S)} r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi; \\ S &= R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (0.15)$$

Thể tích của khối cầu bán kính $r = R$:

$$V = \int_{(V)} dV = \iiint_{(V)} r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (0.16)$$



Hình 0.4: Hệ tọa độ cầu



Hình 0.5: Yếu tố thể tích trong hệ tọa độ cầu

0.4 TRƯỜNG VÔ HƯỚNG

0.4.1 Định nghĩa

Nếu ứng với mỗi điểm M trong vùng không gian (D) tương ứng với một đại lượng vô hướng có giá trị φ thì ta nói rằng có một *trường vô hướng* trong vùng không gian đó. Ví dụ, nhiệt độ tại từng điểm trong căn phòng là một trường vô hướng; áp suất khí quyển tại mỗi điểm trong không gian quanh ta là một trường vô hướng, ...

Trường vô hướng φ được biểu diễn bằng hàm vô hướng biến thiên theo vị trí của điểm khảo sát M và được kí hiệu là $\varphi(M)$ hay $\varphi(x,y,z)$ hay $\varphi(\vec{r})$.

0.4.2 Mặt mức hay mặt đẳng trị

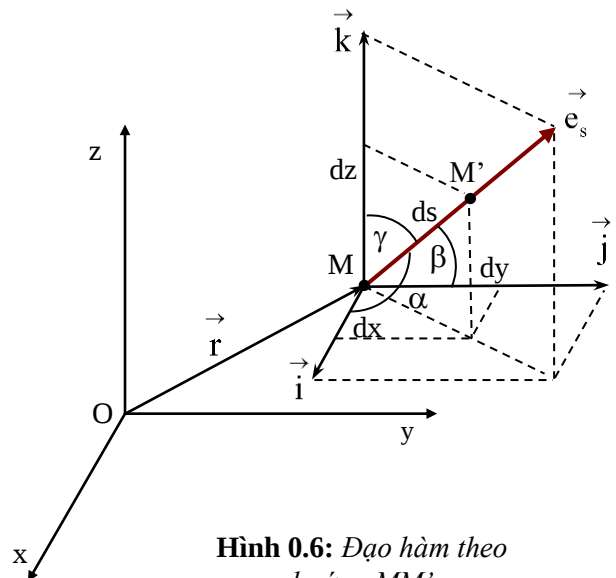
Trong trường vô hướng φ , tập hợp những điểm M sao cho hàm $\varphi(M)$ có cùng một giá trị được gọi là *mặt mức* hay *mặt đẳng trị*. Để tìm mặt đẳng trị ta giải phương trình $\varphi(x,y,z) = C = \text{const}$. Ví dụ, áp suất trong bể nước tinh khiết là một trường vô hướng, mặt đẳng trị của trường vô hướng này là những mặt phẳng song song với mặt nước. Nói cách khác, những điểm cách mặt nước một khoảng h không đổi sẽ có cùng một giá trị áp suất.

0.4.3 Đạo hàm theo hướng

Trong trường vô hướng, mỗi điểm M được xác định bởi vectơ vị trí $\vec{r} = (x,y,z)$ tương ứng với một giá trị của hàm vô hướng $\varphi(x,y,z)$. Hàm $\varphi(x,y,z)$ là hàm 3 biến số x, y, z . Khi tính đạo hàm theo biến x ta xem y và z không đổi. Đạo hàm của $\varphi(x,y,z)$ theo biến x được gọi là *đạo hàm riêng của φ theo x* , và được kí hiệu là $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} \quad (0.17)$$



Hình 0.6: Đạo hàm theo hướng MM'

Như vậy, đạo hàm riêng của hàm $\varphi(x,y,z)$ theo biến x biểu diễn tốc độ biến thiên của hàm $\varphi(x,y,z)$ dọc theo phương Ox . Tương tự, đạo hàm riêng $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ biểu diễn tốc độ biến thiên của hàm $\varphi(x,y,z)$ dọc theo phương Oy , phương Oz .

Để tìm tốc độ biến thiên của hàm $\varphi(x,y,z)$ theo một hướng s bất kì, từ điểm $M(x,y,z)$ ta dời đi một đoạn $MM' = ds$. Kí hiệu $\vec{e}_s$ là vectơ đơn vị dọc theo hướng này (hình 0.6), ta có:

$$\vec{e}_s = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (0.18)$$

Trong đó: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị cơ sở của hệ trục tọa độ Descartes; α, β, γ là các góc chỉ phương của $\vec{e}_s$, tức là góc hợp bởi $\vec{e}_s$ với trục Ox, Oy, Oz ;

$$\cos \alpha = \frac{dx}{MM'} = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \quad (0.19)$$

Lấy vi phân toàn phần của hàm $\varphi(x,y,z)$: $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$

Từ đó suy ra, tốc độ biến thiên của hàm $\varphi(x,y,z)$ theo hướng $\vec{e}_s$ là:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad (0.20)$$

(0.20) chính là đạo hàm của hàm $\varphi(x,y,z)$ theo hướng $\vec{e}_s$.

0.4.4 Gradient của trường vô hướng

Gradient của trường vô hướng $\varphi(x,y,z)$ tại điểm $M(x,y,z)$ là một vectơ kí hiệu là $\text{grad} \varphi$ hay $\nabla \varphi$. Trong hệ tọa Descartes, $\nabla \varphi$ có các thành phần lần lượt là đạo hàm riêng của hàm $\varphi(x,y,z)$ theo các biến x, y, z :

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (0.21)$$

Kí hiệu ∇ được gọi là *toán tử nabla* hay *toán tử del*.

Trong hệ tọa độ Descartes, toán tử nabla được viết là:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.22)$$

Từ các biểu thức (0.18), (0.20) và (0.21), ta suy ra:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma = \nabla \varphi \cdot \vec{e}_s = |\nabla \varphi| \cdot \cos \theta \quad (0.23)$$

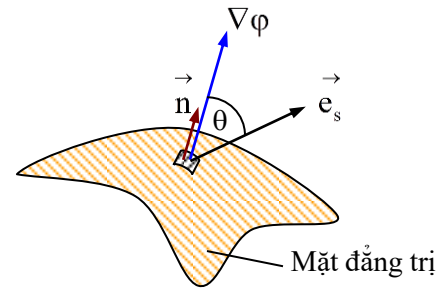
với θ là góc giữa $\nabla \varphi$ và $\vec{e}_s$.

Từ (0.23) suy ra, $\frac{d\varphi}{ds}$ đạt giá trị cực đại khi $\cos \theta = 1$ hay $\theta = 0^\circ$, nghĩa là khi đó $\vec{e}_s$

trùng với hướng của $\nabla \varphi$. Như vậy, $\nabla \varphi$ xác định hướng mà tốc độ biến thiên của hàm φ là lớn nhất.

Cũng từ (0.23) ta nhận thấy, khi $\theta = 90^\circ$, nghĩa là theo hướng $\vec{e}_s$ vuông góc với $\nabla \varphi$, thì $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ hay $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Vì $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ xác định một mặt đẳng trị, nên $\nabla \varphi$ vuông góc với mặt đẳng trị hay $\nabla \varphi$

hướng theo pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt đẳng trị (hình 0.7).



Hình 0.7

Tóm lại: Gradient của một hàm vô hướng $\varphi(x, y, z)$ là một vectơ có phương vuông góc với mặt đẳng trị của hàm φ , có chiều hướng theo chiều tăng của hàm φ và có độ lớn bằng đạo hàm của hàm φ theo phương pháp tuyến của mặt đẳng trị.

Trong hệ tọa độ trụ, toán tử ∇ có dạng:

$$\nabla = \vec{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.24)$$

Và do đó $\nabla \psi$ có dạng:

$$\nabla \psi = \vec{e}_R \frac{\partial \psi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (0.25)$$

Trong tọa độ cầu, toán tử ∇ có dạng:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0.26)$$

Và do đó $\nabla\psi$ có dạng:

$$\nabla\psi = \vec{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \phi} \quad (0.27)$$

0.5 TRƯỜNG VECTƠ

0.5.1 Định nghĩa

Nếu ứng với mỗi điểm M trong vùng không gian (D) tương ứng với một đại lượng vectơ $\vec{A}$ thì ta nói rằng có một *trường vectơ* trong vùng không gian đó. Ví dụ, vùng không gian có *điện trường* là một trường vectơ, vì mỗi điểm trong vùng không gian đó đều xác định được một *vectơ cường độ điện trường* $\vec{E}$; trường *trọng lực* là một trường vectơ, vì mỗi điểm trong trường trọng lực đều xác định được một vectơ gia tốc trọng trường $\vec{g}$.

Trường vectơ $\vec{A}$ được biểu diễn bằng hàm vectơ biến thiên theo vị trí của điểm khảo sát M và được kí hiệu là $\vec{A}(\vec{r})$ hay $\vec{A}(x, y, z)$. Trong hệ tọa độ Descarters, ta có:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z) \vec{i} + A_y(x, y, z) \vec{j} + A_z(x, y, z) \vec{k} \quad (0.28)$$

Như vậy, trong trường hợp tổng quát, một hàm vectơ tương đương với ba hàm vô hướng theo ba biến tọa độ (x, y, z) .

Nếu trường vectơ $\vec{A}(x, y, z)$ không thay đổi theo thời gian, ta gọi là trường *dừng* hay trường *tĩnh*. Ngược lại, ta có trường *không dừng* hay trường *biến thiên*.

0.5.2 Đường dòng của một trường vectơ

Trong trường vectơ $\vec{A}(\vec{r})$, ta có thể tìm được một đường cong (C) mà giá trị của trường vectơ $\vec{A}(\vec{r})$ tại mỗi điểm trên (C) là một vectơ tiếp xúc với (C). Đường cong (C) thỏa mãn tính chất đó được gọi là *đường dòng* hay *đường thông lượng* của trường vectơ $\vec{A}(\vec{r})$.

Để tìm phương trình của đường dòng (C), ta xét điểm $M(x,y,z)$ trên (C), rồi cho M dịch chuyển trên (C) một đoạn vi phân: $d\vec{\ell} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$. Giá trị của trường vectơ $\vec{A}(\vec{r})$ tại điểm $M(x,y,z)$ là một vectơ $\vec{A}(x,y,z)$ tiếp xúc với (C), nghĩa là $\vec{A}(x,y,z) \parallel d\vec{\ell}$.

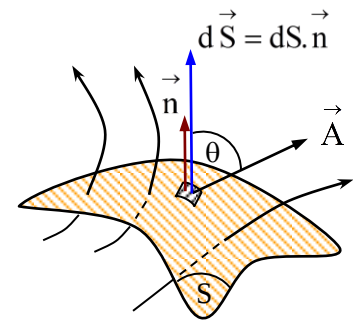
Do đó, ta có:
$$d\vec{\ell} = \alpha.\vec{A}(x,y,z) \Leftrightarrow \frac{dx}{A_x(x,y,z)} = \frac{dy}{A_y(x,y,z)} = \frac{dz}{A_z(x,y,z)} = \alpha \quad (0.29)$$

với α là một số thực nào đó, gọi là *tham số*.

Giải hệ phương trình vi phân (0.29), ta sẽ xác định được phương trình của đường dòng (C). Thay đổi giá trị của tham số thực α ta sẽ thu được các đường dòng khác nhau. Tuy nhiên, *tại mỗi điểm M của trường vectơ $\vec{A}$ chỉ có duy nhất một đường dòng đi qua*. Nói cách khác, *các đường dòng không cắt nhau*.

Các đường dòng của trường vectơ $\vec{A}$ mô tả phương và chiều các vectơ của trường đó tại những điểm khác nhau. Để các đường dòng mô tả cả về độ lớn của trường vectơ $\vec{A}$ tại mỗi điểm, người ta qui ước *số đường dòng qua một đơn vị diện tích vuông góc với đường dòng bằng độ lớn của vectơ $\vec{A}$ tại đó*. Gọi dN là số đường dòng xuyên qua diện tích dS_n vuông góc với đường dòng tại điểm khảo sát M thì ta có:

$$\frac{dN}{dS_n} = |\vec{A}| = A \quad (0.30)$$



Hình 0.8: Thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$

0.5.3 Thông lượng và divergence của một trường vectơ

Xét một mặt định hướng (S) bất kì trong trường vectơ $\vec{A}$. Trên mặt (S), lấy một diện tích vi phân dS đủ nhỏ sao cho giá trị của trường $\vec{A}$ không đổi trên dS . Thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ qua diện tích vi phân dS được định nghĩa là:

$$d\Phi = A.dS.\cos\alpha = \vec{A}.d\vec{S} \quad (0.31)$$

Trong đó α là góc tạo bởi vectơ đơn vị pháp tuyến $\vec{n}$ của diện tích dS và vectơ $\vec{A}$; $d\vec{S} = dS.\vec{n}$ được gọi là vectơ diện tích.

Thông lượng $d\Phi$ của trường vectơ $\vec{A}$ gởi qua yếu tố diện tích dS là đại lượng vô hướng, có thể âm, dương hoặc bằng không tùy theo giá trị của góc α .

Gọi dS_n là hình chiếu vuông góc của dS lên mặt phẳng vuông góc với đường dòng (hình 0.9) thì:

$$d\Phi = A \cdot dS_n \quad (0.32)$$

So sánh (0.30) và (0.32) ta suy ra:

$$\frac{dN}{dS_n} = A = \frac{|d\Phi|}{dS_n} \quad (0.33)$$

Vậy, về độ lớn, thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ gởi qua diện tích dS chính bằng số đường dòng xuyên qua dS .

Để tính thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ qua toàn bộ diện tích của mặt (S) , ta lấy tích phân mặt:

$$\Phi = \int_{(S)} d\Phi = \int_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (0.34)$$

$$\text{Nếu } (S) \text{ là mặt kín thì: } \Phi = \oint_{(S)} d\Phi = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (0.35)$$

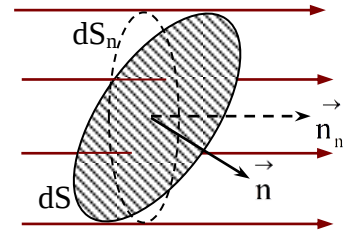
Trường hợp (S) là mặt kín, ta có thể chia (S) thành hai mặt (S_1) và (S_2) như hình 0.10. Như vậy, thông lượng:

$$\Phi = \oint_{(S)} d\Phi = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{(S_1)} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \int_{(S_2)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (0.36)$$

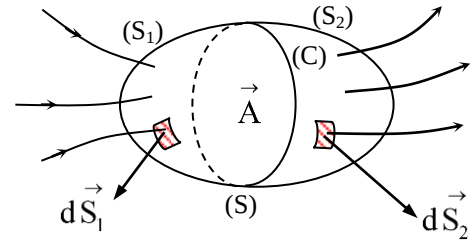
Ta qui ước chọn vectơ đơn vị pháp tuyến của (S) luôn hướng từ phía trong ra ngoài (S) thì $\Phi_1 < 0$ và $\Phi_2 > 0$. Suy ra:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = |\Phi_2| - |\Phi_1|$$

Mà $|\Phi_1|$ bằng số đường dòng đi vào (S) , $|\Phi_2|$ bằng số đường dòng đi ra khỏi (S) . Vậy, thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ qua một mặt kín (S) bất kì bằng hiệu số các đường dòng đi ra và đi vào (S) .



Hình 0.9: dS_n là hình chiếu của dS lên phương vuông góc với đường dòng.



Hình 0.10: Thông lượng của trường vectơ $\vec{A}$ gởi qua mặt kín (S) .

Nếu $|\Phi_2| > |\Phi_1|$ hay $\Phi = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} > 0$ thì số đường dòng đi ra khỏi (S) lớn hơn số đường dòng đi vào (S). Điều này chứng tỏ trong (S) tồn tại nguồn phát sinh ra đường dòng hay phát sinh ra trường vectơ. Ngược lại, nếu $|\Phi_2| < |\Phi_1|$ hay $\Phi = \oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} < 0$ thì số đường dòng đi vào (S) lớn hơn số đường dòng đi ra khỏi (S). Điều này chứng tỏ trong (S) tồn tại nguồn hấp thu đường dòng. Như vậy, $\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ đo mức độ phát sinh hay hấp thu trường vectơ trong thể tích V giới hạn bởi mặt kín (S).

Để đo mức độ hấp thu hay phát sinh trường vectơ tại mỗi điểm M, ta thu nhỏ thể tích V về thể tích ΔV vô cùng nhỏ bao quanh điểm M. Tỉ số: $\frac{\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$ đặc trưng cho mức độ hấp thu hay phát sinh của trường vectơ trong một đơn vị thể tích. Giới hạn của tỉ số này, nếu tồn tại, được gọi là divergence của trường vectơ $\vec{A}$, kí hiệu là $\text{div} \vec{A}$ hay $\nabla \cdot \vec{A}$.

$$\text{Vậy: } \text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (0.37)$$

Divergence của trường vectơ $\vec{A}$ tại một điểm là giới hạn của tỉ số giữa tích phân mặt của hàm vectơ $\vec{A}$ qua mặt kín (S) giới hạn bởi thể tích ΔV vô cùng nhỏ bao quanh điểm đó và thể tích ΔV đó (khi thể tích ΔV tiến về không).

Công thức (0.37) được viết dưới dạng tích phân – đó chính là định lý Gauss hay định lý Ostrogradsky – Gauss:

$$\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div} \vec{A} dV \quad (0.38)$$

Divergence của trường vectơ $\vec{A}$ là đại lượng vô hướng, đặc trưng cho mật độ hấp thu hay phát sinh ra trường vectơ $\vec{A}$ tại mỗi điểm trong trường vectơ đó. Những điểm có $\text{div} \vec{A} > 0$ là những điểm mà đường dòng phát sinh từ đó, được gọi là *điểm nguồn*. Những điểm có $\text{div} \vec{A} < 0$ là những điểm mà đường dòng kết thúc tại đó, được gọi là