

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THƯƠNG MẠI
KHOA: HTTKT&TMĐT



ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP

Bộ môn: Toán Cao Cấp 2

Lớp HP: 1858FMAT0211

GV: *Phan Thanh Tùng*

Hà Nam, 2018

Mục lục

Mục lục	1
CHƯƠNG 7: HÀM HAI BIẾN	4
A. LÝ THUYẾT	4
1. Các khái niệm	4
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số.....	4
Dạng 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1	5
Dạng 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2	5
Dạng 4. Tính gần đúng.....	6
2. Cực trị của hàm 2 biến.....	7
Dạng 5. Tìm cực trị của hàm số.....	7
Dạng 6. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số	9
B. GIẢI BÀI TẬP	10
CHƯƠNG 8: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN.....	31
A. LÝ THUYẾT	31
I. Tích phân bất định.....	31
1.1. Các khái niệm cơ bản.....	31
1.2. Các tính chất.....	31
1.3 Bảng tích phân căn bản	31
1.4 Phương pháp giải	32
II. Tích phân xác định.....	33
2.1 Các khái niệm cơ bản.....	33
2.2. Các tính chất.....	33
2.3. Phương pháp giải	34
III. Tích phân suy rộng	34
3.1. Trường hợp khoảng lấy tích phân là vô hạn	34
3.1.1 Các khái niệm	34
3.1.2. Các định lí so sánh	35
3.1.2 Các định lí so sánh	36
3.2 Trường hợp hàm có điểm gián đoạn vô cực	37
B. BÀI TẬP	38
CHƯƠNG 9: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	67
A. LÝ THUYẾT	67
I. Một số khái niệm cơ bản	67
1.1. Phương trình vi phân	67
1.2. Cấp của phương trình vi phân.....	67

1.3. Nghiệm của phương trình vi phân	67
II. Phương trình vi phân cấp 1	68
2.1. Dạng phương trình.....	68
2.2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng - Tích phân tổng quát và tích phân riêng.....	68
2.3. Bài toán Cauchy (Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm)	68
III. Phương trình vi phân cấp 2	69
3.1. Dạng phương trình.....	69
3.2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng - Tích phân tổng quát và tích phân riêng.....	69
B. DẠNG BÀI TẬP.....	71
I. Phương trình vi phân cấp 1.....	71
1.1. Phương trình biến số phân li:.....	71
1.2. Phương trình đẳng cấp	72
1.3. Phương trình $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$	74
1.4. Phương trình tuyến tính cấp 1.....	75
1.5. Phương trình Bernoulli.....	76
II. Phương trình vi phân cấp 2	77
2.1. Phương trình giảm cấp được	77
2.1.1. TH về phải khuyết y, y' :	77
2.1.2. TH về phải khuyết y :	77
2.1.3. TH về phải khuyết x :	78
2.2. Phương trình tuyến tính cấp 2(hệ số hằng)	79
C. BÀI TẬP	82
CHƯƠNG 10: PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN	112
A. LÝ THUYẾT.....	112
1. Sai phân	112
a) Lưới và bước lưới.....	112
b) Sai phân	112
2. Phương trình sai phân.....	113
a) Định nghĩa.....	113
b) Nghiệm, nghiệm tổng quát và nghiệm riêng.....	113
3. Phương trình sai phân tuyến tính	113
a) Định nghĩa.....	113
b) Tính chất tập nghiệm của phương trình tuyến tính cấp k	114

B. DẠNG BÀI TẬP	115
1. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 1	115
<i>1.1. Phương trình hệ số hằng</i>	115
<i>1.2. Phương trình hệ số biến thiên</i>	118
2. Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng	119
C. BÀI TẬP	122

TaiLieu.vn

CHƯƠNG 7: HÀM HAI BIẾN

A. LÝ THUYẾT

1. Các khái niệm

Định nghĩa:

Cho D là tập trong R^2

$$f : D \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$$

Ghi chú

- Nếu $M(x, y)$, ta có thể viết $z = f(M)$
- Tập D gọi là tập xác định.
- Tập $f(D) := \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$ gọi là tập giá trị.
- Tập $G = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ các điểm trong hệ tọa độ Oxyz gọi là đồ thị của hàm số.

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Ví dụ: Tìm tập xác định của hàm số sau

$$z = \arccos \frac{2x-1}{x} + \ln(xy)$$

Giải:

Tập xác định của hàm là những x, y thỏa mãn điều kiện.

$$\begin{cases} \left| \frac{2x-1}{x} \right| \leq 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 \leq x^2 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \leq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{1}{3}; 1 \right], y \in (0; +\infty) \right\}$$

Định nghĩa 1.

Cho hàm $z = z(x, y)$.

- Đạo hàm riêng (cấp 1) theo biến x , kí hiệu $z'_x(x, y)$: coi y là hằng số và lấy đạo hàm của $z(x, y)$ theo biến x .
- Tương tự, $z'_y(x, y)$: coi x là hằng số và lấy đạo hàm theo biến y .

Dạng 2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1

Ví dụ. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của

a) $z = x^4 + 2x^2y^2$

b) $z = \sin(x^2 + y^2)$

Giải:

a) Ta có:

$$z'_x = (x^4 + 2x^2y^2)'_x = (x^4)'_x + (2x^2y^2)'_x = 4x^3 + 2y^2 \cdot 2x = 4x^3 + 4xy^2.$$

Ta có :

$$z'_y = (x^4 + 2x^2y^2)'_y = 4x^2y$$

b) Ta có :

$$z'_x = (\sin(x^2 + y^2))'_x = \cos(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

Ta có :

$$z'_y = (\sin(x^2 + y^2))'_y = \cos(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

Định nghĩa 2.

. Các đạo hàm riêng cấp 2:

$$\begin{aligned} \circ \quad z''_{xx} &:= (z'_x)'_x & ; & & z''_{xy} &:= (z'_x)'_y & \text{(các đạo hàm riêng của } z'_x \text{)} \\ \circ \quad z''_{yx} &:= (z'_y)'_x & ; & & z''_{yy} &:= (z'_y)'_y & \text{(các đạo hàm riêng của } z'_y \text{)} \end{aligned}$$

Ghi chú:

- Tương tự, ta cũng có các đạo hàm riêng cấp n tùy ý.
- Với “ một số điều kiện “ ta luôn có : $z''_{xy} = z''_{yx}$ (Định lý Schwarz)
- $H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$ gọi là ma trận Hessian.
- Ma trận Hessian có nhiều ứng dụng trong kinh tế & kỹ thuật.

Dạng 3. Tính các đạo hàm riêng cấp 2

Ví dụ. $z = x^4 + 2x^2y^2$

Giải:

Ta có : $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (4x^2y)'_y = 4x^2$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 8xy$$

Định nghĩa: Giả sử hàm $z = z(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thì đại lượng

$$dz = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

gọi là vi phân toàn phần của hàm số.

Ghi chú:

Dễ thấy, $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, do đó:

$$dz = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Bài toán tính gần đúng. Công thức xấp xỉ

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \cong z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

(với $\Delta x, \Delta y$ nhỏ về trị tuyệt đối).

Ghi chú:

Ứng dụng trong kinh tế

$$z(x_0 + 1, y_0 + 1) - z(x_0, y_0) \cong z'_x(x_0, y_0) + z'_y(x_0, y_0)$$

Dạng 4. Tính gần đúng

Ví dụ : Tính gần đúng của biểu thức $A = \ln(\sqrt{8,990} - \sqrt[3]{8,050})$.

Giải:

Xét hàm: $z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$

Ta có: $8,990 = x_0 + \Delta x \Rightarrow x_0 = 9; \Delta x = -0,01$

$8,050 = y_0 + \Delta y \Rightarrow y_0 = 8, \Delta y = 0,05$

Ta có: $z(9; 8) = \ln(\sqrt{9} - \sqrt[3]{8}) = \ln 1 = 0$

$$z'_x = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})} \Rightarrow z'_x(9; 8) = \frac{1}{6}$$

$$z'_y = -\frac{1}{3(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow z'_y(9; 8) = -\frac{1}{12}$$

Vậy $A = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \cong z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$

$$= 0 + \frac{1}{6}(-0,01) - \frac{1}{12}(0,05) \cong -0,006$$

2. Cực trị của hàm 2 biến

Định nghĩa: Ta nói hàm $z = z(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu tồn tại một lân cận của điểm M_0 sao cho trên lân cận đó

$$z(x, y) \leq z(x_0, y_0) \quad (z(x, y) \geq z(x_0, y_0)).$$

Ghi chú.

- Giá trị cực đại hoặc cực tiểu được gọi chung là cực trị.
- Giá trị cực đại hoặc cực tiểu chỉ mang tính địa phương.

Định lý 1: Nếu hàm $z = z(x, y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại đó hàm số có các đạo hàm riêng thì (x_0, y_0) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ghi chú:

- Mỗi điểm M thỏa mãn hệ trên gọi là điểm dừng hay điểm tới hạn (loại 1)
- Kí hiệu $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$; $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$; $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$.

Định lý 2: Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm tới hạn của hàm $z = z(x, y)$ (hàm số có các đạo hàm riêng liên tục tới cấp hai tại M_0).

Khi đó:

- Nếu $B^2 - AC > 0$ thì tại M_0 hàm số không có cực trị.
- Nếu $B^2 - AC < 0$ thì tại M_0 hàm số có cực trị và là cực đại nếu $A < 0$, là cực tiểu nếu $A > 0$.
- Nếu $B^2 - AC = 0$ thì chưa có kết luận.

Ghi chú:

– Bài toán tìm cực trị chia làm 2 bước:

Bước 1: Tìm điểm tới hạn;

Bước 2: Xét dấu $B^2 - AC$

– Khi $B^2 - AC > 0$ thì gọi M_0 là điểm yên ngựa.

Dạng 5. Tìm cực trị của hàm số

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 6xy + 8y^3 + 1$

Giải:

Tập xác định: R^2 .

Bước 1. Tìm điểm tới hạn:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 6y = 0 \\ z'_y = 6x + 24y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra hàm số có hai điểm tới hạn là $O(0;0)$ và $M_0(-1;-\frac{1}{2})$.

Bước 2. Ta có: $z'_{xx} = 6x$; $z'_{xy} = 6$; $z'_{yy} = 48y$.

Tại $O(0;0)$ ta có:

$$A = z'_{xx}(0;0) = 0; \quad B = z'_{xy}(0;0) = 6; \quad C = z'_{yy}(0;0) = 0$$

Suy ra: $B^2 - AC = 36 > 0$. Hàm số không có cực trị tại $O(0;0)$.

Tại $M_0(-1;-\frac{1}{2})$ ta có:

$$A = z'_{xx}(-1;-\frac{1}{2}) = -6; \quad B = z'_{xy}(-1;-\frac{1}{2}) = 6; \quad C = z'_{yy}(-1;-\frac{1}{2}) = 24$$

Suy ra $B^2 - AC = -108 < 0$. Hàm số có cực trị tại $M_0(-1;-\frac{1}{2})$.

Vì $A = -6 < 0$ nên do đó là cực đại. $z_{CD} = z(-1;-\frac{1}{2}) = 2$

Bài toán: Tìm cực trị của hàm: $z = f(x, y)$ với ràng buộc: $g(x, y) = 0$ (1).

Ghi chú. Để đơn giản, ta luôn giả thiết các hàm f, g có đạo hàm riêng đến cấp cần thiết.

Phương pháp nhân tử Lagrange:

Kí hiệu. Hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ (λ gọi là nhân tử Lagrange).

Định lý 1:

(Điều kiện cần) Nếu $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của bài toán (1) thì tồn tại số thực λ_0

Sao cho (x_0, y_0, λ_0) thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Ghi chú. Mỗi nghiệm của hệ trên gọi là một điểm dừng của hàm Lagrange.

Định lý 2:

(Điều kiện đủ) Giả sử (x_0, y_0, λ_0) là một điểm dừng của hàm Lagrange.

Đặt:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

Khi đó:

- Nếu $|A|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} > 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của bài toán (1).
- Nếu $|A|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} < 0$ thì $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu của bài toán (1).
- Nếu $|A|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} = 0$ thì không có kết luận.

Ghi chú.

- Có thể thay (x_0, y_0, λ_0) vào A trước khi tính |A|
- Nếu từ ràng buộc $g(x, y) = 0$ có thể rút ra x (hoặc y), ta thay vào hàm f, đưa về tìm cực trị hàm 1 biến (không cần dùng phương pháp nhân tử Lagrange).

Dạng 6. Tìm cực trị có điều kiện của hàm số

Ví dụ : Tìm cực trị có điều kiện của hàm số

$$z = f(x, y) = x + y$$

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Giải:

Tập xác định: R^2 .

Bước 1. Tìm điểm dừng của hàm Lagrange.

Ta có: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.

Hàm Lagrange: $L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

Xét hệ :

$$\begin{cases} L'_\lambda = 0 \\ L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ 1 - \lambda(2x) = 0 \\ 1 - \lambda(2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = 1/2 \end{cases} ; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda = -1/2 \end{cases}$$

Bước 2 .

Ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2)$$

* Tại $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$ ta có $|A| = 8 > 0 \Rightarrow M_1(1, 1)$ là điểm cực đại và $z_{CB} = 2$.

* Tại $\left(-1, -1, -\frac{1}{2}\right)$ ta có $|A| = -8 < 0 \Rightarrow M_2(-1, -1)$ là điểm cực tiểu và $z_{CT} = -2$

B. GIẢI BÀI TẬP

Bài 7.1 Tìm tập xác định và minh họa bằng hình học trên hệ tọa độ trục chuẩn Oxy:

1. $z = \ln(2x-1)(4-y^2)$

2. $z = \sqrt{16-x^2-y^2} + \lg(x^2+y^2-4)$

3. $z = \arcsin \frac{3y+2}{x}$

4. $z = \arcsin \frac{2y}{x} + \arccos(y+4x)$

5. $z = \arcsin(3x-4y); x \leq 2; y \geq -3$

Giải:

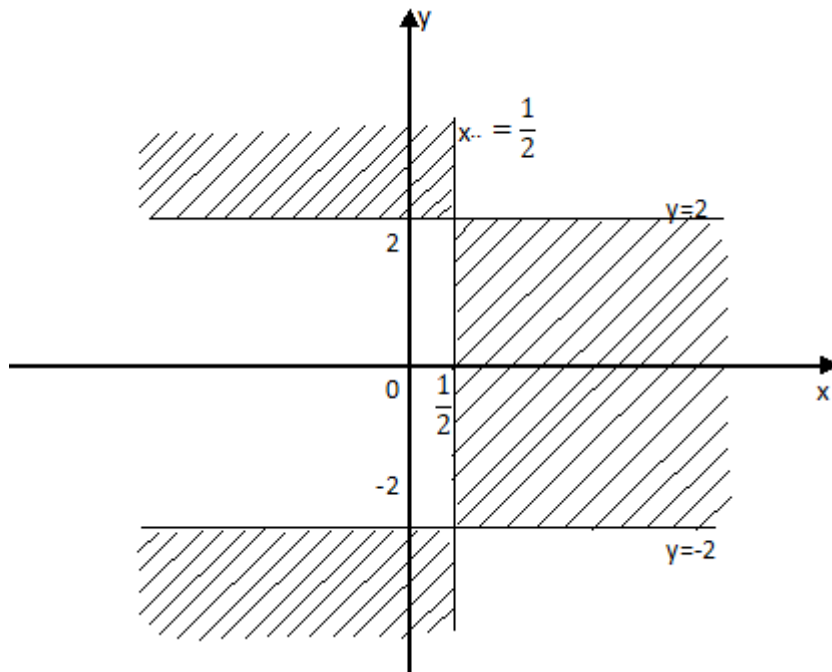
1. $z = \ln(2x-1)(4-y^2)$

Điều kiện: $(2x-1)(4-y^2) > 0$

TH1: $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 4-y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -2 < y < 2 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 4-y^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < -2 \text{ hoặc } y > 2 \end{cases}$

Biểu diễn hình học:



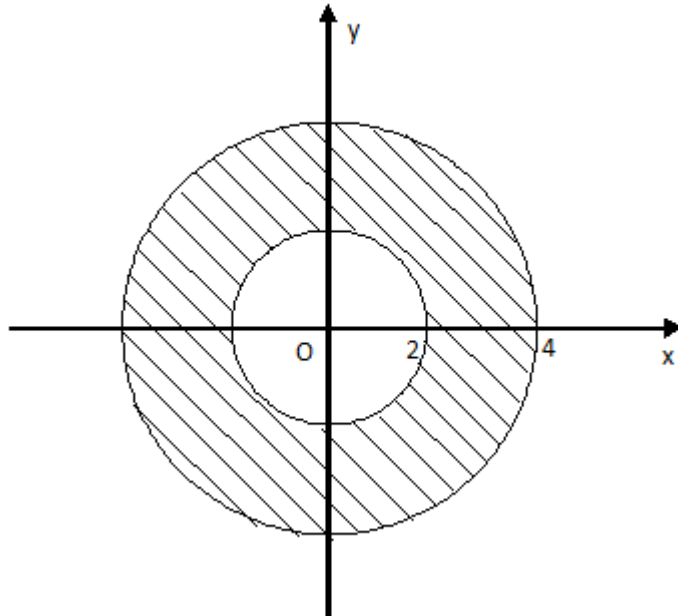
(Tập xác định là miền gạch chéo không kể các đường biên)

$$2. z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \lg(x^2 + y^2 - 4)$$

Điều kiện: $\begin{cases} 16 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập xác định: $4 < x^2 + y^2 \leq 16$

Biểu diễn hình học



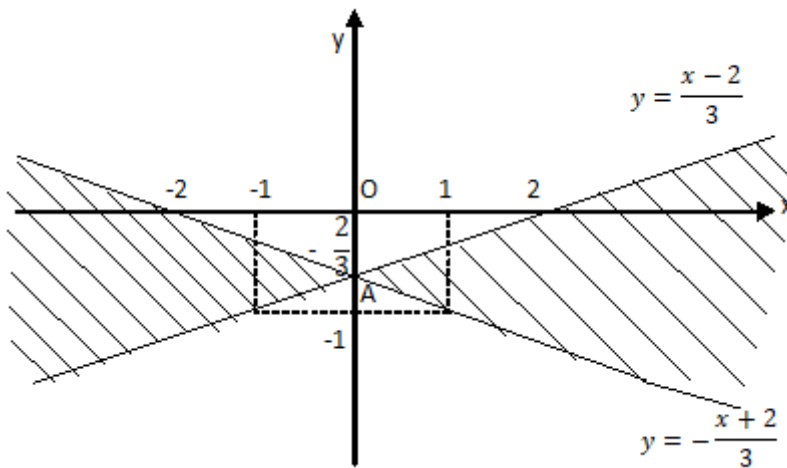
Tập xác định là miền gạch chéo kể cả đường tròn tâm O bán kính 4 (O;4) không kể đường tròn tâm O bán kính 2 (O;2).

$$3. z = \arcsin \frac{3y+2}{x}$$

Hàm số xác định khi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{3y+2}{x} \right| \leq 1 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \frac{3y+2}{x} \leq 1 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{hoặc} \begin{cases} \frac{x-2}{3} \leq y \leq -\frac{x+2}{3} \\ x < 0 \\ -\frac{x+2}{3} \leq y \leq \frac{x-2}{3} \\ x > 0 \end{cases}$$

Biểu diễn hình học.



Tập xác định là miền gạch chéo kể cả các điểm nằm trên 2 đường thẳng $y = \frac{x-2}{3}$; $y = -\frac{x+2}{3}$ trừ điểm $A(0; \frac{2}{3})$.

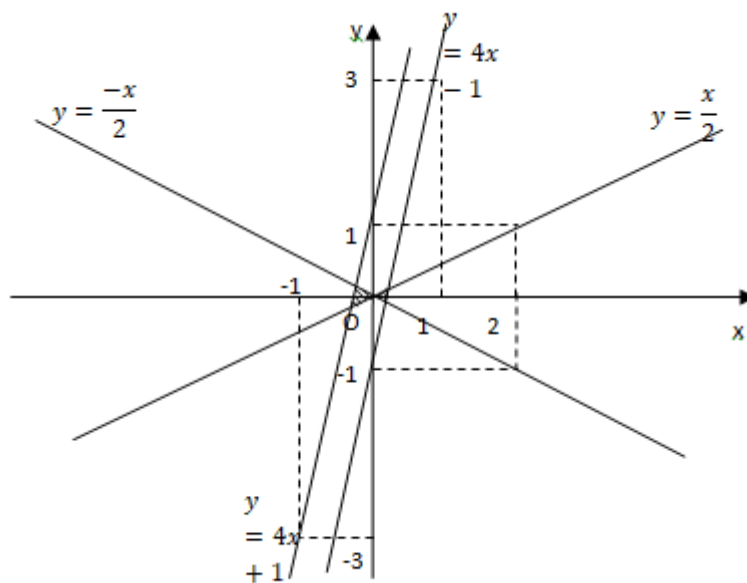
$$4. z = \arcsin \frac{2y}{x} + \arccos(y + 4x)$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \left| \frac{2y}{x} \right| \leq 1 \\ |y - 4x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq \frac{2y}{x} \leq 1 \\ -1 \leq y - 4x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hoặc} \begin{cases} x > 0 \\ \frac{-x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2} \\ 4x - 1 \leq y \leq 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{-x}{2} \\ 4x - 1 \leq y \leq 4x + 1 \end{cases}$$

Biểu diễn hình học



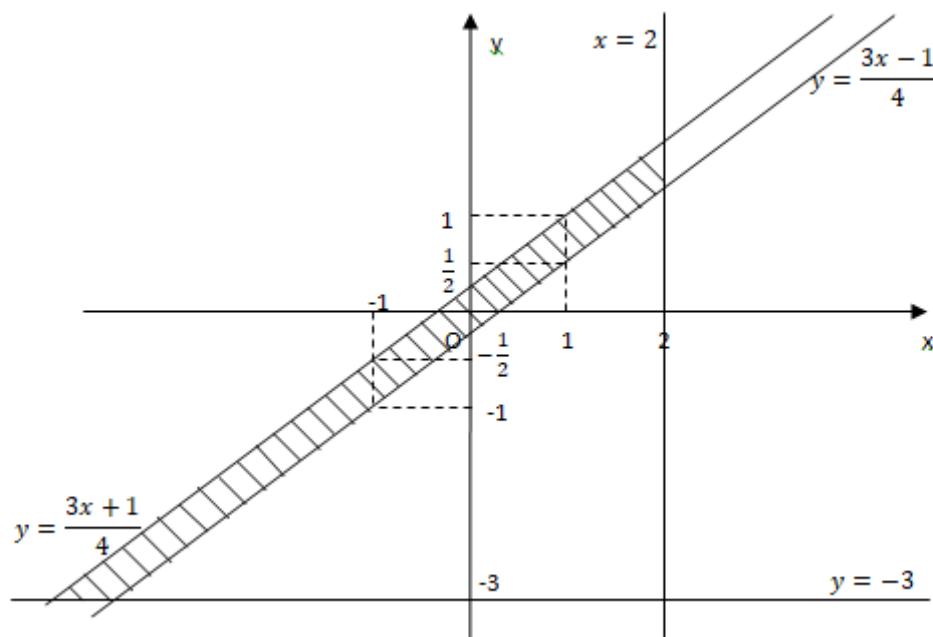
Tập xác định là miền gạch chéo kể cả các đường biên trừ điểm $O(0;0)$

$$5. z = \arcsin(3x - 4y); x \leq 2; y \geq -3$$

Hàm z xác định khi:

$$\begin{cases} |3x - 4y| \leq 1 \\ x \leq 2 \\ y \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x - 4y \leq 1 \\ x \leq 2 \\ y \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1 + 3x}{4} < y < \frac{3x + 1}{4} \\ x \leq 2 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

Biểu diễn hình học



Tập xác định là miền gạch chéo kẻ cả các đường biên.

Bài 7.2 Tính đạo hàm riêng cấp 1

$$1. z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$2. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$3. z = e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

$$4. z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

$$5. z = x^{y^3}$$

$$6. z = \arctan \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$7. z = (x + y)^{\sin x \cdot \sin y}$$

Giải:

$$1. z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$z'_x = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z'_y = \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$2. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$z'_x = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right)'_x = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z'_y = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right)'_y = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$3. z = e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

$$z'_x = \left(e^{\arctan \frac{y}{x}} \right)'_x = \frac{-y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot e^{\arctan \frac{y}{x}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \left(e^{\arctan \frac{y}{x}} \right)'_y = \left(\arctan \frac{y}{x} \right)'_y \cdot e^{\arctan \frac{y}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot e^{\arctan \frac{y}{x}} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot e^{\arctan \frac{y}{x}} \end{aligned}$$

$$4. z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

$$z'_x = \left(\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)'_x = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)'_x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)(\sqrt{x^2+y^2} + x) - \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right)(\sqrt{x^2+y^2} - x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2} \\
 &\quad \times \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{(x - \sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2} + x) - (x + \sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2} - x)}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (\sqrt{x^2+y^2} + x)^2} \\
 &\quad \times \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{x^2 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2 - x^2)}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (\sqrt{x^2+y^2} + x)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (\sqrt{x^2+y^2} + x)(\sqrt{x^2+y^2} - x)} = \frac{-2y^2}{y^2 \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
 z'_y &= \left(\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right)'_y = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right)'_y \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (\sqrt{x^2+y^2} + x) - \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} (\sqrt{x^2+y^2} - x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} (\sqrt{x^2+y^2} + x - \sqrt{x^2+y^2} + x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} - x} \\
 &= \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (\sqrt{x^2+y^2} + x)(\sqrt{x^2+y^2} - x)} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}
 \end{aligned}$$

5. $z = x^{y^3}$

$$z'_x = (x^{y^3})'_x = y^3 \cdot x^{y^3-1}$$

$$z'_y = (x^{y^3})'_y = x^{y^3} \cdot \ln y^3 \cdot (y^3)' = 3y^2 x^{y^3} \cdot \ln y^3$$

6. $z = \arctan \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$z'_x = \left(\arctan \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \left(\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2xy^2}{\sqrt{x^4 - y^4} \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4 - y^4}} \\
 z'_y &= \left(\arctan \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_y = \left(\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_y \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{\frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \\
 &= \frac{-y \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{2x^2} = \frac{-y \cdot 2x^2}{2x^3 \sqrt{x^4 - y^4}} = \frac{-y}{\sqrt{x^4 - y^4}}
 \end{aligned}$$

7. $z = (x + y)^{\sin x \cdot \sin y}$

$$z'_x = ((x + y)^{\sin x \cdot \sin y})'_x$$

$$z'_x = ((x + y)^{\sin x \cdot \sin y})'_x$$

Ta có: $\ln z = \ln(x + y)^{\sin x \cdot \sin y} = \sin x \cdot \sin y \cdot \ln(x + y)$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$\frac{z'_x}{z} = \sin y \cdot \cos x \cdot \ln(x + y) + \frac{\sin y \cdot \sin x}{x + y}$$

$$\Rightarrow z'_x = \sin y \left(\cos x \cdot \ln(x + y) + \frac{\sin x}{x + y} \right) \cdot (x + y)^{\sin x \cdot \sin y}$$

$$z'_y = ((x + y)^{\sin x \cdot \sin y})'_y$$

Ta có: $\ln z = \sin x \cdot \sin y \cdot \ln(x + y)$

Đạo hàm 2 vế theo y ta có:

$$\frac{z'_y}{z} = \sin x \cdot \cos y \cdot \ln(x + y) + \frac{\sin x \cdot \sin y}{x + y}$$

$$\Rightarrow z'_y = \sin x \left(\cos y \cdot \ln(x + y) + \frac{\sin y}{x + y} \right) \cdot (x + y)^{\sin x \cdot \sin y}$$

Bài 7.3 Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của hàm hai biến

$$1. \quad z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$2. \quad z = x^2 \ln(x + y)$$

$$3. \quad z = x^y$$

$$4. \quad z = \ln(xy + \sqrt{x^2 y^2 + a^2})$$

Giải:

$$1) z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right)' = \left(\frac{x(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right)' = \left(\frac{x(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)' = \left(\frac{x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)' \\ &= \frac{(3x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} - (x^3 + xy^2) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(3x^2 + y^2)(x^2 + y^2) - x(x^3 + xy^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{3x^2 + y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(\frac{x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_y = \frac{2xy\sqrt{x^2 + y^2} - (x^3 + xy^2) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{2xy(x^2 + y^2) - y(x^3 + xy^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2xy - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right)'_y = \left(\frac{y(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right)'_y = \frac{(x^2 + 3y^2)\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2y + y^3) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + 3y^2)(x^2 + y^2) - y^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$2) z = x^2 \ln(x + y)$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \left(2x \ln(x + y) + \frac{x^2}{x + y} \right)'_x \\ &= 2 \ln(x + y) + \frac{2x}{x + y} + \frac{2x(x + y) - x^2}{(x + y)^2} \\ &= 2 \ln(x + y) + \frac{2x}{x + y} + \frac{2x(x + y) - x^2}{(x + y)^2} \\ z''_{xy} &= \left(2x \ln(x + y) + \frac{x^2}{x + y} \right)'_y = \frac{2x}{x + y} - \frac{x^2}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{x^2}{x+y} \right)'_y = \frac{-x^2}{(x+y)^2}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

3) $z = x^y$

$$z''_{xx} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2}$$

$$z''_{xy} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln x \cdot \ln x = x^y \ln^2 x$$

4) $z = \ln(xy + \sqrt{x^2y^2 + a^2})$

$$z''_{xx} = \left(\frac{y + \frac{2xy^2}{2\sqrt{x^2y^2 + a^2}}}{xy + \sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_x = \left(\frac{y\sqrt{x^2y^2 + a^2} + xy^2}{xy\sqrt{x^2y^2 + a^2} + x^2y^2 + a^2} \right)'_x$$

$$= \left(\frac{xy^2 + y\sqrt{x^2y^2 + a^2}}{(xy + \sqrt{x^2y^2 + a^2})\sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_x$$

$$= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_x = \frac{-y \frac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}}}{x^2y^2 + a^2} = \frac{-xy^3}{\sqrt{(x^2y^2 + a^2)^3}}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_y = \frac{\sqrt{x^2y^2 + a^2} - y \frac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}}}{x^2y^2 + a^2}$$

$$= \frac{x^2y^2 + a^2 - x^2y^2}{(x^2y^2 + a^2)\sqrt{x^2y^2 + a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{(x^2y^2 + a^2)^3}}$$

$$z'_{yy} = \left(\frac{x + \frac{2x^2y}{2\sqrt{x^2y^2 + a^2}}}{xy + \sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_y = \left(\frac{x\sqrt{x^2y^2 + a^2} + x^2y}{(xy + \sqrt{x^2y^2 + a^2})\sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_y$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}} \right)'_y = \frac{-x \frac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2 + a^2}}}{x^2y^2 + a^2} = \frac{-x^3y}{\sqrt{(x^2y^2 + a^2)^3}}$$

Bài 7.4 Tính gần đúng bằng vi phân toàn phần:

1. $A = 0,996^{5,050}$
2. $B = \ln(\sqrt[3]{27,0200} + \sqrt[4]{15,9700} - 4)$
3. $C = \arcsin(1,52 - \sqrt[100]{e})$, biết $\sqrt{3} \cong 1,72; \pi \cong 3,14$
4. $D = \arctan 2(\sqrt{2,98} - \cos 31^\circ)$, biết $\sqrt{3} \cong 1,72; \pi \cong 3,14$

Giải :

1) $A = 0,996^{5,050}$

Xét hàm: $A = z(x, y) = x^y$

Ta có: $0,996 = x_0 + \Delta x \Rightarrow x_0 = 1; \Delta x = -0,004$

$5,05 = y_0 + \Delta y \Rightarrow y_0 = 5; \Delta y = 0,05$

$z(1;5) = 1^5 = 1$

$z'_x = yx^{y-1} \Rightarrow z'_x(1;5) = 5 \cdot 1^4 = 5$

$z'_y = x^y \cdot \ln x \Rightarrow z'_y(1;5) = \ln 1 = 0$

Vậy $A \cong z(1;5) + z'_x(1;5)\Delta x + z'_y(1;5)\Delta y = 1 + 5 \cdot (-0,004) = 0,98$

2) $B = \ln(\sqrt[3]{27,0200} + \sqrt[4]{15,9700} - 4)$

Xét hàm: $B = z(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 4)$

Ta có: $27,02 = x_0 + \Delta x \Rightarrow x_0 = 27; \Delta x = 0,02$

$15,97 = y_0 + \Delta y \Rightarrow y_0 = 16; \Delta y = -0,03$

$z(27;16) = \ln(\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16} - 4) = 0$

$z'_x = \left(\ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 4) \right)'_x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 4)} \Rightarrow z'_x(27;16) = \frac{1}{27}$

$z'_y = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 4)} \Rightarrow z'_y(27;16) = \frac{1}{32}$

Vậy $B \cong z(27;16) + z'_x(27;16)\Delta x + z'_y(27;16)\Delta y = 0 + \frac{1}{27} \cdot 0,02 + \frac{1}{32} \cdot (-0,03) = -0,0002$

3) $C = \arcsin(1,52 - \sqrt[100]{e})$, biết $\sqrt{3} \cong 1,72; \pi \cong 3,14$

Ta có: $C = \arcsin(1,52 - \sqrt[100]{e}) = \arcsin(1,52 - e^{0,01})$

Xét hàm: $C = z(x, y) = \arcsin(x - e^y)$