

CHƯƠNG 3

SUY LUẬN VÀ CHỨNG MINH



Nội dung trọng tâm:

- ❖ Khái niệm về suy luận toán học
- ❖ Một số quy tắc suy luận
- ❖ Các phương pháp chứng minh và biết vận dụng các phương pháp này để chứng minh một bài toán cụ thể.

Suy luận được xem là một trong những nền tảng xây dựng nên các ngành khoa học tự nhiên. Từ xưa đến nay, nhờ suy luận mà người ta có thể nhận thức được cái chưa biết từ những cái đã biết. Suy luận còn là cơ sở của sự sáng tạo. Từ các phán đoán, đưa đến các chứng minh để chấp nhận hay bác bỏ một vấn đề nào đó.

3.1 Suy luận

3.1.1 Suy luận - Suy luận hợp logic

Suy luận là một quá trình suy nghĩ để rút ra mệnh đề mới (kết luận của suy luận) từ một hay nhiều mệnh đề đã có (các tiền đề).

Cho P, Q là hai mệnh đề (hoặc biểu thức mệnh đề)

Nếu ta lập mệnh đề $P \rightarrow Q$: “Do P , vậy Q ” , “Từ P suy ra Q ” thì ta đã suy luận từ tiền đề P để có kết luận Q .

Có hai khả năng :

a) $P \rightarrow Q = 1$ (hằng đúng)

Khi đó ta có một phép suy diễn (hay một phép suy luận hợp logic) với qui tắc suy diễn là $\frac{P}{Q}$, trong đó “ Q là kết luận logic của P ”.

Trong các qui tắc suy diễn thì các giả thiết được viết phía trên dấu gạch ngang, kết luận được viết phía dưới.

b) $P \rightarrow Q$ không là hằng đúng, tức là có thể chỉ ra một trường hợp mà P đúng nhưng Q sai, phép suy luận là không hợp logic, tức là “ Q không phải là kết luận logic của P ”.

Những suy luận có dùng các qui tắc suy diễn còn gọi là suy luận có cơ sở. Khi tất cả các suy luận có cơ sở là đúng thì sẽ dẫn đến một kết luận đúng. Một suy luận có cơ sở có thể dẫn đến một kết luận sai nếu một trong các tiền đề đã dùng trong suy diễn là sai.

3.1.2 Phân loại suy luận

- Suy luận diễn dịch (suy diễn) là suy luận theo những qui tắc (qui tắc suy diễn), xác định rằng nếu các tiền đề là đúng thì kết luận cũng đúng.

- Suy luận có lý (suy luận qui nạp) là suy luận không theo một quy tắc suy luận tổng quát nào. Nó chỉ xuất phát từ những tiền đề đúng để rút ra một kết luận có thể đúng mà cũng có thể sai.

3.2 Suy luận diễn dịch

3.2.1 Khái niệm về suy luận diễn dịch và chứng minh

Suy luận diễn dịch dựa trên nền tảng của các phép toán mệnh đề, chủ yếu là phép kéo theo, có cấu trúc logic $P \rightarrow Q$, trong đó P gọi là giả thiết và Q gọi là kết luận.

Quá trình đi từ giả thiết đến kết luận gọi là quá trình chứng minh và quá trình này được thực thi bằng cách nào thì gọi đó là phương pháp chứng minh.

3.2.2 Một số qui tắc suy diễn thường dùng (từ 1 tiền đề)

a) Những qui tắc suy diễn từ phép toán mệnh đề

Chẳng hạn như :

* Quy Tắc cộng: $\frac{p}{p \vee q}$ hoặc $\frac{q}{p \vee q}$.

* Quy Tắc rút gọn: $\frac{p \wedge q}{p}$ hoặc $\frac{p \wedge q}{q}$.

* Qui tắc từ hội đến kéo theo : $\frac{p \wedge q}{p \rightarrow q}$

* Qui tắc phản đảo : $\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow p}$

b) Qui tắc đặc biệt hóa

Giả sử : vị từ $p(x)$ với $x \in A$.

mệnh đề tổng quát $\forall x \in A ; p(x)$ có chân trị đúng.

Khi đó nếu thay thế x bởi $a \in A$ thì ta sẽ được mệnh đề $p(a)$ có chân trị đúng.

Nói cách khác, ta có qui tắc suy luận :
$$\frac{\forall x ; p(x)}{p(a)}$$

Ví dụ 1 : $p(x) : x$ tận cùng bằng 0 (với $x \in \mathbb{N}$)

$q(x) : x$ chia hết cho 5 (với $x \in \mathbb{N}$)

Ta đã biết $\forall x \in \mathbb{N} ; (p \rightarrow q)(x)$ là mệnh đề đúng

Vậy $(p \rightarrow q)(1520)$ đúng

tức là $p(1520) \rightarrow q(1520)$ đúng

mà $p(1520)$ đúng

Do đó $q(1520)$ đúng

Nghĩa là 1520 chia hết cho 5

* Chú ý : Ta có qui tắc suy diễn :
$$\frac{(\forall x ; p(x) \rightarrow q(x)) , p(a)}{q(a)}$$

Ví dụ 2 : Các định lý toán học thường là mệnh đề tổng quát đúng, chẳng hạn như các trường hợp bằng nhau của 2 tam giác bất kỳ. Khi áp dụng ta sẽ đặc biệt hóa cho 2 tam giác cụ thể.

c) Qui tắc tổng quát hóa

Giả sử : vị từ $p(x)$ với $x \in A$.

Khi thay thế x bởi $a \in A$ (phần tử a cố định nhưng tùy ý) , ta được mệnh đề $p(a)$ có chân trị đúng. Vậy mệnh đề tổng quát $\forall x \in A ; p(x)$ có chân trị đúng.

Nói cách khác, ta có qui tắc suy luận :
$$\frac{\forall a ; p(a)}{\forall x ; p(x)}$$

Nhận xét : Nếu xem vị từ $p(x)$ là một hàm (ánh xạ) từ A vào $T = \{0,1\}$

$\forall x \in A ; p(x)$ có chân trị đúng khi và chỉ khi $p(x)$ là hàm hằng 1.

* Chú ý : Ta có qui tắc suy diễn :
$$\frac{(\forall x ; p(x) \rightarrow q(x)) , (\forall x ; q(x) \rightarrow r(x))}{\forall x ; p(x) \rightarrow r(x)}$$

3.2.3 Một số qui tắc suy diễn thường dùng (từ 2 tiền đề)

Dạng $\frac{A, B}{C}$ nghĩa là $(A \wedge B) \Rightarrow C$ tức là $(A \wedge B) \rightarrow C = 1$

“Nếu $A \wedge B$ đúng thì C đúng”

1) Qui tắc khẳng định (modus ponens) : $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$

2) Qui tắc phủ định (modus tollens) : (Qui tắc kết luận ngược) $\frac{p \rightarrow q, \bar{q}}{\bar{p}}$

3) Qui tắc lựa chọn : (Tam đoạn luận tuyển) $\frac{p \vee q, \bar{p}}{q}$

4) Qui tắc bắc cầu của phép kéo theo : (Tam đoạn luận giả thiết, syllogism)

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

5) Qui tắc hội : $\frac{p, q}{p \wedge q}$

* Các dạng khác của qui tắc hội :

5a) $\frac{p \rightarrow q, p \rightarrow r}{p \rightarrow (q \wedge r)}$

5b) $\frac{p \rightarrow r, q \rightarrow r}{(p \vee q) \rightarrow r}$ (Qui nạp hoàn toàn)

6) Qui tắc qui nạp toán học : Cho vị từ $p(n)$ với $n \in \mathbb{N}$ và $a \in \mathbb{N}$

$$\frac{p(a), [p(k) \rightarrow p(k+1) \text{ khi } k \geq a]}{\forall n \geq a; p(n)}$$

7) Qui tắc chứng minh bằng phản chứng (1) : $\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow 0}{p \rightarrow q}$

8) Qui tắc chứng minh bằng phản chứng (2) : $\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}}{p \rightarrow q}$

9) Qui tắc chứng minh điều kiện cần và đủ : $\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$

10) Qui tắc hội giả thiết, kết luận của 2 phép kéo theo : $\frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)}$

11) Qui tắc tuyển giả thiết, kết luận của 2 phép kéo theo : $\frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)}$

12) Quy tắc biến đổi tương đương : $\frac{p \leftrightarrow q, q}{p}$

BẢNG CÁC QUY TẮC THƯỜNG DÙNG

QTSD	Phát biểu theo phép kéo theo hằng đúng	Phát biểu theo sơ đồ suy diễn
1	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q = 1$	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
2	$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow \bar{p} = 1$	$\frac{p \rightarrow q, \bar{q}}{\bar{p}}$
3	$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \rightarrow q = 1$	$\frac{p \vee q, \bar{p}}{q}$
4	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow$ $(p \rightarrow r) = 1$	$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$
5	$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q) = 1$	$\frac{p, q}{p \wedge q}$
	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow$ $[p \rightarrow (q \wedge r)] = 1$	$\frac{p \rightarrow q, p \rightarrow r}{p \rightarrow (q \wedge r)}$
	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow$ $[(p \vee q) \rightarrow r] = 1$	$\frac{p \rightarrow r, q \rightarrow r}{(p \vee q) \rightarrow r}$
6	$[p(a) \wedge ((p(k) \rightarrow p(k+1) \text{ khi } k \geq a)) \rightarrow$ $(\forall n \geq a ; p(n)) = 1$	$\frac{p(a), [p(k) \rightarrow p(k+1) \text{ khi } k \geq a]}{\forall n \geq a ; p(n)}$
7	$[(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (r \wedge \bar{r})] \rightarrow$ $(p \rightarrow q) = 1$	$\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (r \wedge \bar{r})}{p \rightarrow q}$
8	$[(p \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}] \rightarrow (p \rightarrow q) = 1$	$\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}}{p \rightarrow q}$
9	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \leftrightarrow q) = 1$	$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$
10	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow$ $[(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)] = 1$	$\frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)}$

11	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)] = 1$	$\frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)}$
12	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow p = 1$	$\frac{p \leftrightarrow q, q}{p}$

Các qui tắc suy diễn khác :

+ Quy Tắc hoán vị tiên đề : $\frac{[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge q}{p \rightarrow r}$.

+ Quy Tắc kết hợp tiên đề : $\frac{[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \wedge q)}{r}$

+ Quy Tắc tách tiên đề : $\frac{[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge p}{q \rightarrow r}$.

Ví dụ 3 : Qui tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau ?

" Nếu hôm nay trời mưa thì cô ta không đến. Nếu cô ta không đến thì ngày mai cô ta đến. Vậy thì, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai cô ta đến."

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc tam đoạn luận giả định.

"Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường đại học đóng cửa. Hôm nay trường đại học không đóng cửa. Do đó, hôm nay đã không có tuyết rơi "

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc Modus Tollens

" Alice giỏi toán. Do đó, Alice giỏi toán hoặc tin".

Đây là suy diễn dựa trên qui tắc cộng.

3.2.4 Ngụy biện

Ví dụ 4: Xét xem suy diễn sau là có cơ sở đúng không ?

" Nếu bạn đã giải hết bài tập trong sách toán rời rạc 2 này thì bạn nắm vững logic. Bạn nắm vững logic vậy thì bạn đã giải hết bài tập trong sách toán logic này".

Nhận thấy suy diễn này là dựa trên mệnh đề sau :

$$((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$$

Trong đó:

P = "Bạn đã giải hết bài tập trong sách toán logic".

Q = "Bạn nắm vững logic".

Mệnh đề $((P \rightarrow Q) \wedge Q) \rightarrow P$ không phải là hằng đúng vì nó sẽ sai khi P có chân trị 0 và Q có chân trị 1. Do đó, suy diễn này không hoàn toàn có cơ sở đúng. Bởi vì, khi Q là 1 nghĩa là bạn đã nắm vững logic nhưng không chắc là bạn đã giải hết bài tập trong sách toán logic này mà có thể giải sách khác. Do đó suy luận trên là một nguy hiểm.

Trong chương trình Toán phổ thông, ta đã gặp những bài toán vui về sự nguy hiểm. Chẳng hạn « con muỗi nặng bằng con voi » (SGK Toán 9, tập I, tr12).

3.3 Suy luận quy nạp (hay suy luận có lý)

Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh rất quan trọng. Người ta dùng nó để chứng minh những kết quả đã có dựa trên sự suy luận nào đó. Tuy nhiên, quy nạp toán học chỉ dùng để chứng minh các kết quả nhận được bằng một cách nào đó chứ không là công cụ để phát hiện ra công thức.

Mặc dù suy luận quy nạp thiếu tính thuyết phục nhưng nó có ý nghĩa rất quan trọng trong khoa học và đời sống. Nó giúp chúng ta có từ những quan sát cụ thể rút ra những dự đoán, những giả thuyết để sau đó chúng ta tìm cách chứng minh chặt chẽ. Nó đặt cơ sở cho nhiều phát minh trong khoa học.

Trong toán học có hai kiểu suy luận quy nạp thường dùng là :

- Phép quy nạp hoàn toàn.
- Phép quy nạp không hoàn toàn (quy nạp phóng đại, khái quát hóa, tổng quát hóa).

3.3.1 Quy nạp hoàn toàn

Phương pháp quy nạp hoàn toàn được sử dụng rộng rãi để chứng minh định lý và giải toán. Trong phương pháp quy nạp hoàn toàn, khẳng định chung được chứng minh là đúng trong một trường hợp riêng có thể xảy ra.

Để áp dụng phương pháp suy luận này, chúng ta phải đưa về việc phân chia các trường hợp chung thành một số hữu hạn các trường hợp riêng có thể có và chứng minh khẳng định đó là đúng trong tất cả các trường hợp riêng.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta đều có: $|a + b| \leq |a| + |b|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Giải:

Xét bốn trường hợp sau:

Nếu $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$. Khi đó: $a + b \geq 0$, nên ta có: $|a + b| = a + b = |a| + |b|$ (bất đúng)

Nếu $\begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$. Khi đó $|a + b|$ không thể vượt qua $\max |a|, |b|$, do đó:

$|a + b| < |a| + |b|$ (bất đúng)

Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$, khi đó $a + b < 0$ nên ta có: $|a + b| = -a + (-b) = |a| + |b|$ (bất

đúng)

Vậy $|a + b| \leq |a| + |b|$ (đpcm). Dấu đẳng thức xảy ra khi a, b cùng dấu.

3.3.2 Quy nạp không hoàn toàn

Là phép suy luận đi từ cái đúng riêng đến kết luận cho cái chung, đi từ một hiện tượng đơn nhất đến kết luận cho các hiện tượng phổ biến. Nét đặc trưng của suy luận là ở chỗ không có quy tắc chung cho quá trình suy luận mà chỉ dựa trên cơ sở nhận xét và kiểm nghiệm.

Ví dụ 6: Xuất phát từ nhận xét:

$$2^2 + 1 = 5 \text{ là số nguyên tố}$$

$$2^{2^2} + 1 = 17 \text{ là số nguyên tố}$$

Fermat đã đi đến nhận xét tổng quát: $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 7: Xuất phát từ nhận xét:

$$4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; \dots$$

Nhà toán học Đức, Goldbach đi tới kết luận tổng quát: Một số chẵn bất kỳ lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố.

Ví dụ 8: Xuất phát từ nhận xét :

$$7 = 2 + 2 + 3; 9 = 2 + 2 + 5; \dots$$

Nhà toán học Thụy sĩ – Euler đi tới kết luận tổng quát : Một số lẻ bất kỳ lớn hơn 5 đều là tổng của ba số nguyên tố.

Nhận thấy, các kết luận rút ra từ phép quy nạp không hoàn toàn có thể đúng, có thể sai và nó có tính dự đoán. Nếu bằng suy diễn, ta chứng minh được dự đoán đó là

đúng thì nó trở thành một định lý. Nếu bằng một phản ví dụ, ta chỉ ra dự đoán là sai thì bác bỏ dự đoán đó (trong ví dụ 6 : khi $n = 5$ ta không nhận được số nguyên tố). Nếu chưa chứng minh được là đúng hay sai thì dự đoán trở thành một giả thuyết. (Trong ví dụ 7 : giả thuyết Goldbach, ví dụ 8 : giả thuyết Euler).

3.4 Chứng minh

3.4.1 Thế nào là chứng minh

Ta xét phép suy luận hợp logic : $\frac{p_1, p_2}{q}$

(chúng ta chỉ quan tâm đến hình thức hay cấu trúc của suy luận này mà không quan tâm đến nội dung hay ý nghĩa của các mệnh đề p_1, p_2, q trong suy luận đó)

Trong toán học, nếu các tiền đề p_1, p_2 của suy luận đều đúng (chúng thường là những định nghĩa, tiên đề hoặc định lý đã được chứng minh trước đó) ta rút ra kết luận q thì ta nói q là một kết luận của chứng minh, còn suy luận đó là một chứng minh.

Vậy chứng minh một mệnh đề X là vạch rõ rằng X là kết luận logic của các tiền đề đúng.

Tuy nhiên, có những phương pháp chứng minh đúng vì nó được dựa trên cơ sở của một mệnh đề đúng (hằng đúng) và có những phương pháp chứng minh sai. Các phương pháp chứng minh sai này là cố ý hoặc vô ý. Khi phương pháp chứng minh dựa trên một hằng sai thì sẽ mang lại kết quả sai nhưng người ta vẫn cho là đúng thì được gọi là cố ý. Đôi khi có những phương pháp chứng minh dựa trên một tiếp liên (có khi mệnh đề là đúng nhưng cũng có lúc sai) mà người ta tưởng lầm là hằng đúng nên cho là kết quả bao giờ cũng đúng thì trường hợp này gọi là vô ý (hay ngộ nhận).

3.4.2 Mô tả một chứng minh

Như đã giới thiệu trong phần trên, mỗi bài toán cần chứng minh, thông thường đều có hai phần chính là giả thiết và kết luận. Việc chỉ ra được cái nào là giả thiết, cái nào là kết luận sẽ giúp cho việc chứng minh dễ dàng hơn thông qua việc sử dụng phương pháp chứng minh thích hợp.

Một chứng minh toán học bao gồm một số hữu hạn bước, trong đó mỗi bước là

một suy luận diễn dịch (trong đó ta đã vận dụng một qui tắc suy luận tổng quát).

Trong trường hợp chứng minh chỉ gồm 1 bước thì đó chính là một phép suy luận diễn dịch với các tiền đề đúng.

Một phép chứng minh gồm 3 phần :

- a) Luận đề : là mệnh đề ta phải chứng minh.
- b) Luận cứ : là những mệnh đề mà tính đúng đắn của chúng đã được khẳng định. Chúng được dùng làm tiền đề trong mỗi bước suy luận.
- c) Luận chứng : là những qui tắc suy luận tổng quát được sử dụng trong mỗi bước suy luận của chứng minh đó.

Trong thực hành, chứng minh là :

- Thiết lập một dãy các bước suy luận diễn dịch.
- Trong mỗi bước, ta chỉ rõ tiền đề, kết luận và qui tắc suy luận tổng quát được áp dụng.

Mỗi một chứng minh phải đạt ba yêu cầu sau :

- + Yêu cầu 1 : Luận cứ phải chân thực. Những tiền đề dùng trong chứng minh phải đúng, người ta thường đặt câu hỏi « dựa vào đâu để chứng minh ? » khi đó phải kiểm tra tiền đề.
- + Yêu cầu 2 : Luận chứng phải hợp logic. Các phép suy luận dùng trong chứng minh phải là các phép suy luận hợp logic. Người ta thường đặt câu hỏi « dựa vào phép suy luận nào để chứng minh ? ».
- + Yêu cầu 3 : Không được đánh tráo luận đề. Không được thay thế mệnh đề cần chứng minh bằng những mệnh đề không tương đương với nó. Người ta thường đặt câu hỏi « chứng minh cái gì ? ».

Nói cách khác, để chứng minh một vấn đề nào đó, thông thường người ta phải xác định điểm bắt đầu (gọi là giả thiết) và điểm kết thúc (gọi là kết luận). Các phương pháp chứng minh là rất quan trọng vì không những chúng thường được sử dụng trong toán học mà còn được áp dụng nhiều trong tin học và một số khoa học khác như: Vật lý, Hóa học.

Một trong những khác biệt giữa Toán học và các môn khoa học khác đó là sự xây dựng lý thuyết suy diễn. Suy diễn là một suy luận hợp logic đi từ cái

đúng chung đến kết luận cho cái riêng. Nét đặc trưng của suy diễn là suy luận theo những quy tắc logic tổng quát, xác nhận rằng nếu tiền đề là đúng thì kết luận rút ra cũng đúng.

3.4.3 Bác bỏ

Bác bỏ một mệnh đề p là quá trình suy diễn để khẳng định mệnh đề p là sai, nghĩa là chứng minh mệnh đề $\overline{p}$.

Trong chương II, ta đã biết bác bỏ một mệnh đề có lượng từ $\forall$ (mệnh đề tổng quát) bằng cách đưa ra một phản thí dụ.

3.4.4 Các phương pháp chứng minh

Các phương pháp chứng minh trong dạng bài toán này là có liên quan đến mệnh đề kéo theo. Nhận thấy rằng, $p \rightarrow q$ là đúng có 3 trường hợp:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1

Các trường hợp này chính là các phương pháp chứng minh sẽ được trình bày dưới đây.

3.4.4.1 Chứng minh trực tiếp (dẫn chứng, tổng hợp)

Trong dòng 1 của bảng chân trị, mệnh đề p kéo theo q có thể được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng nếu p đúng thì q cũng phải đúng. Nghĩa là tổ hợp p đúng q sai không bao giờ xảy ra. Phương pháp này được gọi là chứng minh trực tiếp.

Vậy để thực hiện phương pháp chứng minh trực tiếp, người ta giả sử rằng p là đúng, sau đó sử dụng các qui tắc suy luận hợp logic để chỉ ra rằng q là đúng và kết luận $p \rightarrow q$ là đúng.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng “Nếu n là số nguyên lẻ thì n^2 là số lẻ”

Giải :

Giả sử rằng giả thiết của định lý này là đúng, tức là n là số lẻ. Ta có $n = 2k + 1$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

$\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k + 2k) + 1$ là lẻ. Vậy nếu n là số lẻ thì n^2 là số lẻ.

Ví dụ 11: Cho hàm mệnh đề $P(n) = "$ Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$ ". Chứng minh rằng $P(n)$ là đúng với n là số nguyên dương.

Giải :

Giả sử $n > 1$ là đúng, ta có : $n = 1 + k$ ($k \geq 1$)

$\Rightarrow n^2 = (1 + k)^2 = 1 + 2k + k^2 = (1 + k) + k + k^2 > n$. Vậy nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$.

Ví dụ 12: Chứng minh rằng nếu a và b là hai số thực thoả: $a + b \geq 2$ thì $a^4 + b^4 \geq 2$.

Giải:

Theo giả thiết, ta có:

$$a + b \geq 2 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4$$

$$\text{mà } (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 4 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow 2 \leq a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow 4 \leq (a^2 + b^2)^2$$

$$\text{mà } (a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4)$$

$$\Rightarrow 4 \leq 2(a^4 + b^4)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2 \quad (\text{đpcm}).$$

3.4.4.2 Chứng minh gián tiếp (phản đảo)

Vì mệnh đề $p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$. Do đó, để chứng minh mệnh đề $p \rightarrow q$ là đúng, người ta có thể chỉ ra rằng mệnh đề $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ là đúng.

Ví dụ 13: Chứng minh định lý “Nếu $3n + 2$ là số nguyên lẻ thì n là số nguyên lẻ”.

Giải :

Giả sử ngược lại kết luận của phép kéo theo là sai, tức n là chẵn.

Ta có $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow 3n + 2 = 3.2k + 2 = 2(3k + 1)$ là số chẵn. Vậy nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ.

3.4.4.3 Chứng minh từng trường hợp (qui nạp hoàn toàn)

Để chứng minh mệnh đề có dạng : $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$. Chúng ta có thể sử dụng hằng đúng sau :

$$((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)).$$

Cách chứng minh này gọi là chứng minh từng trường hợp.

Ví dụ 14 : Chứng minh rằng: " Nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 không chia hết cho 3".

Giải :

Gọi p là mệnh đề " n không chia hết cho 3" và q là mệnh đề " n^2 không chia hết cho 3".

Khi đó, p tương đương với $p_1 \vee p_2$. Trong đó:

$$p_1 = "n \bmod 3 = 1"$$

$$p_2 = "n \bmod 3 = 2"$$

Vậy, để chứng minh $p \rightarrow q$ là đúng, có thể chứng minh rằng: $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$ hay là

$$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q)$$

Giả sử p_1 là đúng. Ta có, $n \bmod 3 = 1$. Đặt $n = 3k + 1$ (k là số nguyên nào đó).

Suy ra:

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ không chia hết cho 3.}$$

Do đó, $p_1 \rightarrow q$ là đúng.

Tương tự, giả sử p_2 là đúng. Ta có, $n \bmod 3 = 2$. Đặt $n = 3k + 2$ (k là số nguyên nào đó).

Suy ra $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ không chia hết cho 3.

Do đó, $p_2 \rightarrow q$ là đúng.

Vậy $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$ (đpcm).

Ví dụ 15: Chứng minh trong đường tròn tâm O, số đo góc nội tiếp bằng một phần hai số đo cung bị chắn.

Giải:

Gọi p là mệnh đề "trong đường tròn tâm O, góc nội tiếp ABC chắn cung AC" và q là mệnh đề "số đo góc ABC bằng một phần hai số đo cung AC". Khi đó, p tương đương

với $p_1 \vee p_2 \vee p_3$. Trong đó:

p_1 = "tâm O nằm trên một cạnh của góc nội tiếp ABC"

p_2 = "tâm O nằm trong góc nội tiếp ABC"

p_3 = "tâm O nằm ngoài góc nội tiếp ABC"

Vậy, để chứng minh $p \rightarrow q$ là đúng, có thể chứng minh rằng: $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$ hay

là: $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge (p_3 \rightarrow q)$ (phần chứng minh, SV về xem SGK Toán 9).

Ví dụ 16 : Chứng minh rằng phương trình sau đây không có nghiệm thực :

$$1999x^4 + 1998x^3 + 2000x^2 + 1997x + 1999 = 0$$

Xét ba trường hợp :

Nếu $x > 0$: Khi đó vế trái (VT) là tổng các số dương. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $-1 \leq x < 0$: Khi đó phương trình

$$\begin{aligned} 1999x^4 + 1998x^3 + 2000x^2 + 1997x + 1999 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1999x^4 + 1998x^2(x+1) + 2x^2 + 1997(x+1) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x+1 \geq 0$ nên VT là tổng các số dương. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $x < -1$: Khi đó phương trình

$$\begin{aligned} 1999x^4 + 1998x^3 + 2000x^2 + 1997x + 1999 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4 + 1998x^3(x+1) + 3x^2 + 1997x(x+1) + 1999 &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x+1 < 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0$ nên VT là tổng các số dương. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình $1999x^4 + 1998x^3 + 2000x^2 + 1997x + 1999 = 0$ không có nghiệm thực.

Ví dụ 17: Chứng minh $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $3^x + 4^x = 5^x$

Giải:

Giả sử $x = 2$ không là nghiệm duy nhất của phương trình $3^x + 4^x = 5^x$. Khi đó:

Với $x > 2$, ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1 \text{ (suy ra giả thiết ban đầu sai)}$$

Với $x < 2$, ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1 \text{ (suy ra giả thiết ban đầu sai)}$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $3^x + 4^x = 5^x$

Ví dụ 18 : Giải phương trình: $8 + 2^{3-x} = x + x.2^x$ (1)

Giải:

Ta có:

$$8 + 2^{3-x} = x + x.2^x \Leftrightarrow 8 + \frac{8}{2^x} = x + x.2^x$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(8 - x.2^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x.2^x = 8 \quad (\text{vì } 2^x + 1 > 0)$$

- Nếu $x \leq 0$: $x.2^x \leq 0$

Vậy $x \leq 0$ không là nghiệm của phương trình.

- Nếu $x = 2$: pt trở thành đẳng thức đúng : $2.2^2 = 8$

Vậy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

- Nếu $x > 2$: ta có $x.2^x > 8$

Vậy mọi $x > 2$ đều không là nghiệm của phương trình.

- Nếu $0 < x < 2$: ta có $x.2^x < 8$

Vậy $0 < x < 2$ đều không là nghiệm của phương trình.

Tóm lại : phương trình chỉ có nghiệm duy nhất: $x = 2$.

3.4.4.4 Chứng minh phản chứng

1) Theo qui tắc $\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow (r \wedge \bar{r})}{p \rightarrow q}$

- Giả sử $p \rightarrow q$ sai, tức là : $p \wedge \bar{q}$ đúng

- Từ đó $p \wedge \bar{q} \rightarrow 0$

- Vậy theo qui tắc trên : $p \rightarrow q$ đúng.

2) Theo qui tắc $\frac{(p \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}}{p \rightarrow q}$

- Giả sử q sai, tức là: $\bar{q}$ đúng

- Từ đó $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$

- Vậy theo qui tắc trên (hoặc theo qui tắc phản đảo): $p \rightarrow q$ đúng.

Như vậy, Một phép chứng minh phản chứng theo qui tắc này bao gồm các bước:

* Bước 1: Giả sử mệnh đề cần chứng minh là sai.

* Bước 2: Xuất phát từ giả sử mệnh đề sai, sử dụng các quy tắc suy luận, dẫn đến một sự vô lý (hoặc là trái với giả thiết, hoặc trái với những tiền đề đúng đã biết, một kết luận đã chứng minh là đúng, hoặc là dẫn đến hai mâu thuẫn khác nhau).

* Bước 3: Kết luận mệnh đề ban đầu là đúng.

Chú ý: Phương pháp chứng minh bằng phản chứng thường được sử dụng để chứng minh các định lý đảo, định lý về sự tồn tại và tính duy nhất.

Ví dụ 19 : Trong mp Oxy, cho ba đường thẳng a, b, c . Chứng minh:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$$

Giải:

Giả sử $\begin{cases} a \parallel b \\ c \parallel b \end{cases}$ nhưng a không song song với c . Khi đó tồn tại điểm M là giao điểm của

hai đường thẳng a và c .

Ta có:

Đường thẳng a qua M và song song với b

Đường thẳng c qua M và song song với b

Điều này dẫn đến sự mâu thuẫn với tiên đề Ô-clit (Qua 1 điểm nằm ngoài một đường thẳng, có duy nhất một đường thẳng qua điểm đó và song song với đường thẳng đã

cho). Vậy điều giả sử là sai, nên $\begin{cases} a \parallel b \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel c$ (đpcm).

Ví dụ 20: Chứng minh rằng a, b, c, p, q, r là các số thực thỏa mãn hệ thức:

$ar - 2bq + cp = 0$ và $ac - b^2 > 0$ thì $pr - q^2 \leq 0$.

Giải :

Giả sử ngược lại : $pr - q^2 > 0 \Rightarrow pr > q^2$

Từ $ac - b^2 > 0 \Rightarrow ac > b^2 \Rightarrow acpr > b^2 q^2$

Mặt khác:

$$ar - 2bq + cp = 0 \Rightarrow ar + cp = 2bq$$

$$\Rightarrow ar + cp^2 = 4b^2 q^2 < 4acpr$$

$$\Rightarrow ar - cp^2 < 0$$

Điều này mâu thuẫn.

Vậy $pr - q^2 \leq 0$ (đpcm).

3.4.4.5 Chứng minh quy nạp toán học (truy chứng)

Nhiều định lý phát biểu rằng $P(n)$ là đúng $\forall n$ nguyên dương, trong đó $P(n)$ là hàm mệnh đề, ký hiệu $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh các định lý thuộc dạng trên. Nói cách khác quy nạp toán học thường sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$.

Nguyên lý chứng minh quy nạp để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$ bao gồm 3 bước :

- Kiểm tra $P(n_0)$ là đúng với n_0 là giá trị đầu tiên của dãy số n
- Giả sử rằng $P(k)$ là đúng khi $n = k \geq n_0$. Từ đó suy ra rằng $P(k+1)$ là đúng.
- Kết luận $P(n)$ đúng với $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta có cách viết của suy luận trên như sau: $[P(n_0) \wedge (P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$

Ví dụ 21: Chứng minh rằng $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Khi $n = 1$, ta có $S_1 = 1 = 1^2$ nên khẳng định đúng

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Xét $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, nghĩa là khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Vậy $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý:

Khi sử dụng nguyên lý chứng minh quy nạp, không được bỏ qua bước kiểm tra $P(n_0)$ là đúng vì nếu chỉ có $(P(n) \rightarrow P(n+1))$ là không đủ để kết luận rằng $\forall n, P(n)$ là đúng.

Đôi khi chúng ta cần tính toán một biểu thức phụ thuộc vào n , bắt đầu là việc đoán ra kết quả, công việc này được làm bằng cách ít hay nhiều dựa vào kinh nghiệm. Sau đó, sử dụng nguyên lý chứng minh quy nạp để chứng minh rằng kết quả vừa tìm được là đúng.

Ví dụ 22: Chứng minh rằng tích của 3 số liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Giải :

Đặt $P(n) = \{n.(n+1).(n+2) \text{ chia hết cho } 6\}$ (n nguyên dương)

Ta có : $P(1) = 1.2.3$ chia hết cho 6. Mệnh đề đúng.

Giả sử $P(k)$ là đúng . Nghĩa là : $k.(k+1).(k+2)$ chia hết cho 6.

Cần chứng minh rằng $P(k+1)$ là đúng.

Nhận thấy: $(k+1)(k+2)(k+3) = k.(k+1).(k+2) + 3.(k+1).(k+2)$

Trong đó : $k.(k+1).(k+2)$ chia hết cho 6.

Và $3.(k+1).(k+2)$ chia hết cho 6 = 2.3 (vì $(k+1).(k+2)$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2). Vì tổng của 2 số chia hết cho 6 sẽ chia hết cho 6, do đó $(k+1)(k+2)(k+3)$ chia hết cho 6. Do đó $P(k+1)$ là đúng.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 23 : Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên lớn hơn 1, khi đó n có thể được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

Giải :

Đặt $P(n) = \{ n = a.b...c \}$ ($a, b,...,c$ là các số nguyên tố)

Ta có:

$$P(2) = \{ 2 = 2.1 \}$$

$$P(3) = \{ 3 = 3.1 \}$$

$$P(4) = \{ 4 = 2.2 \}$$

là các mệnh đề đúng. Giả sử $P(n)$ đúng $\forall k \geq 2$ ta có $P(k)$ là đúng. Cần chứng minh rằng $P(k+1)$ là đúng. Với $n = k+1$ ta có 2 trường hợp xảy ra như sau:

$k+1$ là số nguyên tố : $k+1 = (k+1).1$, khi đó $P(k+1)$ đúng

$k+1$ không là số nguyên tố (hợp số): $k + 1 = a.b$ ($a, b \in [2, k]$)

Theo giả thiết quy nạp, a, b có thể là số nguyên tố hoặc là tích của các số nguyên tố. Vậy nếu $k+1$ là hợp số thì nó cũng sẽ được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố. $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 2$.

Ví dụ 24: chứng minh rằng, với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có :

$$1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n.n$$

Giải:

Với $n = 1$, ta có: $VT = 1 = -1(-1) = VP$, suy ra đẳng thức đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$$1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^k(2k - 1) = (-1)^k.k$$

Chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} & 1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^{k+1}(2k + 1) \\ &= (-1)^k.k + (-1)^{k+1} 2k + 1 \\ &= (-1)^k k - 2k - 1 = (-1)^{k+1}. k + 1 \end{aligned}$$

Vậy với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có :

$$1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n(2n - 1) = (-1)^n.n$$

Ví dụ 25: Với $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -2$, ta có : $E = 6^{2n+4} + 3^{n+4} + 3^{n+2}$ chia hết cho 11 (*).

Giải:

Với $n = -2$, ta có: $E = 6^0 + 3^2 + 3^0 = 11$ chia hết cho 11. Suy ra (*) đúng.

Giả sử khẳng định (*) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là: $E = 6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2}$ chia hết cho 11.

Chứng minh khẳng định (*) đúng với $n = k + 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} E &= 6^{2(k+1)+4} + 3^{(k+1)+4} + 3^{(k+1)+2} \\ &= 33.6^{2k+4} + 3.6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2} \end{aligned}$$

Chia hết cho 11 vì 33.6^{2k+4} chia hết 11 và $3.6^{2k+4} + 3^{k+4} + 3^{k+2}$ cũng chia hết cho 11 (theo giả thiết quy nạp).

Vậy với $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq -2$, ta có : $E = 6^{2n+4} + 3^{n+4} + 3^{n+2}$ chia hết cho 11.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1/ Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi lập luận sau

- a. Những con kangaroo sống ở Australia là loài thú có túi. Do đó, kangaroo là loài thú có túi.
- b. Hoặc hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc là sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời thấp hơn 100 độ. Do đó, ô nhiễm là nguy hại.
- c. Steve sẽ làm việc ở một công ty tin học vào mùa hè này. Do đó, mùa hè này anh ta sẽ làm việc ở một công ty tin học hoặc là một kẻ lang thang ngoài bể bơi.
- d. Nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi có thể trả lời được tất cả bài tập. Nếu tôi trả lời được tất cả bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó, nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này

2/ Xác định xem các suy luận sau là có cơ sở không. Nếu một suy luận là có cơ sở thì nó dùng quy tắc suy luận nào. Nếu không hãy chỉ ra nguy biện nào đã được sử dụng.

- a. Nếu n là một số thực lớn hơn 1 khi đó $n^2 > 1$. Giả sử $n^2 > 1$. Khi đó $n > 1$.
- b. Nếu n là một số thực và $n > 3$, khi đó $n^2 > 9$. Giả sử $n^2 \leq 9$. Khi đó, $n \leq 3$.
- c. Một số nguyên dương hoặc là số chính phương hoặc có một số chẵn các ước nguyên dương. Giả sử, n là một số nguyên dương có một số lẻ các ước nguyên dương. Khi đó, n là số chính phương.

3/ Chứng minh rằng bình phương của một số chẵn là một số chẵn bằng

- a. Chứng minh trực tiếp
- b. Chứng minh gián tiếp
- c. Chứng minh phản chứng

4/ Chứng minh rằng tích của 2 số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

5/ Chứng minh rằng một số nguyên không chia hết cho 5 thì bình phương của nó khi chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

6/ Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương, khi đó n là lẻ nếu và chỉ nếu $5n + 6$ là lẻ.

7/ Có 2 giả thiết

- Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic.