

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ DẦU MỘT
KHOA KHOA HỌC TỰ NHIÊN



SÁCH THAM KHẢO

LOGIC TOÁN

Tài liệu dành cho sinh viên ngành sư phạm toán

**Biên soạn : ThS. Nguyễn Thành Long (chủ biên)
ThS. Lê Thành Đạt**

Bình Dương, Tháng 06 – Năm 2016

TaiLieu.vn

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	- 7 -
CHƯƠNG 1 ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ.....	- 9 -
1.1 Mệnh đề	- 9 -
1.1.1 Định nghĩa.....	- 9 -
1.1.2 Phân loại mệnh đề.....	- 10 -
1.2 Các phép toán mệnh đề.....	- 10 -
1.2.1 Phép phủ định	- 10 -
1.2.2 Phép hội	- 11 -
1.2.3 Phép tuyển	- 12 -
1.2.4. Phép tuyển chọn.....	- 13 -
1.2.5 Phép kéo theo.....	- 13 -
1.2.6 Phép tương đương (phép kéo theo hai chiều)	- 14 -
1.3 Biểu thức mệnh đề	- 15 -
1.3.1 Định nghĩa	- 15 -
1.3.2 Hằng đúng - Hằng sai	- 16 -
1.3.3 Mệnh đề hệ quả.....	- 18 -
1.3.4 Tương đương Logic	- 19 -
1.3.5 Các công thức tương đương logic.....	- 20 -
1.3.6 Một số quy tắc thay thế.....	- 21 -
1.4 Mệnh đề liên hợp	- 22 -
1.4.1 Các mệnh đề liên hợp	- 22 -
1.4.2 Quy tắc phản đảo	- 22 -
1.5 Luật logic	- 23 -
1.6 Mệnh đề & lý thuyết tập hợp.....	- 24 -
1.6.1 Mệnh đề & tập hợp	- 24 -
1.6.2 Phép toán mệnh đề & ánh xạ	- 25 -
1.7 Biểu thức logic và mạch điện	- 27 -
1.8 Phương trình logic	- 28 -
BÀI TẬP CHƯƠNG 1	- 32 -
PHẦN ĐỌC THÊM.....	- 37 -
CHƯƠNG 2 ĐẠI SỐ VỊ TỪ.....	- 39 -
2.1 Vị từ (Hàm mệnh đề)	- 39 -
2.2 Các phép toán logic trên vị từ (hàm mệnh đề)	- 42 -
2.2.1 Phủ định của một vị từ.....	- 42 -
2.2.2 Phép hội của hai vị từ	- 42 -

2.2.3 Phép tuyển của hai vị từ.....	- 43 -
2.2.4 Phép kéo theo của hai vị từ.....	- 43 -
2.2.5 Phép tương đương.....	- 43 -
2.3 Mệnh đề có lượng từ (có chứa ký lượng)	- 44 -
2.3.1 Mệnh đề có chứa lượng từ tồn tại ($\exists$).....	- 45 -
2.3.2 Mệnh đề có chứa lượng từ với mọi ($\forall$).....	- 45 -
2.3.3 Chân trị của mệnh đề tồn tại, mệnh đề tổng quát.....	- 45 -
2.3.4 Các phép toán về mệnh đề có lượng từ.....	- 48 -
2.3.5 Phủ định mệnh đề có lượng từ.....	- 49 -
 BÀI TẬP CHƯƠNG 2	 - 51 -
 PHẦN ĐỌC THÊM	 - 58 -
LOGIC BA TRỊ	- 58 -
LOGIC MỜ	- 61 -
 CHƯƠNG 3 SUY LUẬN VÀ CHỨNG MINH	 - 65 -
3.1 Suy luận	- 65 -
3.1.1 Suy luận - Suy luận hợp logic.....	- 65 -
3.1.2 Phân loại suy luận.....	- 66 -
3.2 Suy luận diễn dịch	- 66 -
3.2.1 Khái niệm về suy luận diễn dịch và chứng minh.....	- 66 -
3.2.2 Một số qui tắc suy diễn thường dùng (từ 1 tiền đề).....	- 66 -
3.2.3 Một số qui tắc suy diễn thường dùng (từ 2 tiền đề).....	- 67 -
3.2.4 Nguyên biện.....	- 70 -
3.3 Suy luận quy nạp (hay suy luận có lý)	- 71 -
3.3.1 Quy nạp hoàn toàn.....	- 71 -
3.3.2 Quy nạp không hoàn toàn.....	- 72 -
3.4 Chứng minh	- 73 -
3.4.1 Thế nào là chứng minh.....	- 73 -
3.4.2 Mô tả một chứng minh.....	- 73 -
3.4.3 Bác bỏ.....	- 75 -
3.4.4 Các phương pháp chứng minh.....	- 75 -
3.4.4.1 Chứng minh trực tiếp (dẫn chứng, tổng hợp).....	- 75 -
3.4.4.2 Chứng minh gián tiếp (phản đảo).....	- 76 -
3.4.4.3 Chứng minh từng trường hợp (qui nạp hoàn toàn).....	- 77 -
3.4.4.4 Chứng minh phản chứng.....	- 79 -
3.4.4.5 Chứng minh quy nạp toán học (truy chứng).....	- 81 -
 BÀI TẬP CHƯƠNG 3	 - 84 -
 CHƯƠNG 4 VẬN DỤNG LOGIC TOÁN VÀO DẠY HỌC TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG	 - 87 -
4.1 Sử dụng ngôn ngữ, mệnh đề và ký hiệu toán học	- 87 -
4.1.1 Từ ngữ tiếng Việt và ngữ nghĩa toán học.....	- 88 -

4.1.2	Sử dụng đồng thời ngôn ngữ thông thường và ngôn ngữ toán học.....	- 91 -
4.1.3	Các phép toán mệnh đề và ký hiệu toán học	- 91 -
4.2	Suy luận và chứng minh trong dạy học toán	- 100 -
4.2.1	Khai thác hợp lý qui nạp và suy diễn	- 101 -
4.2.2	Tìm cách chứng minh mệnh đề $p \Rightarrow q$	- 103 -
4.3	Trong các tình huống điển hình dạy học môn toán	- 109 -
4.3.1	Dạy học định nghĩa khái niệm.....	- 109 -
4.3.1.1	Cấu trúc logic của định nghĩa	- 110 -
4.3.1.2	Về các khái niệm khác được định nghĩa ở THCS đồng thời ở THPT.....	- 114 -
4.3.2	Dạy học định lý (tiếp cận và trình bày chứng minh định lý)	- 117 -
4.3.2.1	“Định lý” trong chương trình toán phổ thông	- 117 -
4.3.2.2	Cấu trúc logic của định lý (tính chất, hệ quả)	- 117 -
4.3.2.3	Dạy học tiếp cận và trình bày chứng minh định lý	- 122 -
4.3.3	Dạy học giải toán (Phát hiện và sửa chữa sai lầm khi giải toán)	- 125 -
BÀI TẬP CHƯƠNG 4		- 139 -
GỢI Ý VÀ HƯỚNG DẪN PHẦN BÀI TẬP		- 144 -
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....		- 149 -

TaiLieu.vn

MỞ ĐẦU

Quyển sách tham khảo “Logic toán” này nhằm 2 mục đích :

- Trình bày các kiến thức về Logic toán.
- Vận dụng Logic toán vào dạy học toán ở trường phổ thông.

Với vai trò là một sách tham khảo (chưa phải là giáo trình), nội dung sách sẽ không đi sâu rộng vào các vấn đề lý thuyết mà sẽ cố gắng nêu lên nhiều ví dụ thật cụ thể trong chương trình toán phổ thông để người đọc, và nhất là những sinh viên ngành sư phạm toán, cảm thấy gần gũi, dễ dàng tiếp thu khi học học phần Logic toán. Cuối mỗi chương đều có những bài tập tiêu biểu để người đọc luyện tập, có hướng dẫn. Riêng phần đọc thêm sẽ giới thiệu các Logic phi cổ điển (Logic ba trị, Logic mờ, ...) để người đọc có cái nhìn bao quát về Logic học hiện thời.

Sách gồm có 4 chương :

Chương I : Đại số mệnh đề.

Chương II : Đại số vị từ.

Chương III : Suy luận và chứng minh.

Chương IV : Vận dụng logic toán vào dạy học toán ở trường phổ thông.

Các chương I,II,III gồm những nội dung cơ bản của Logic toán. Đặc biệt trong chương IV, chúng tôi cố gắng trình bày thật chi tiết sự liên hệ chặt chẽ giữa Logic toán với Lý luận dạy học môn toán thông qua chương trình, sách giáo khoa toán trung học cơ sở và trung học phổ thông hiện hành.

Trong khi chờ đợi có một giáo trình Logic toán hoàn chỉnh hơn được biên soạn, chúng tôi hi vọng rằng quyển sách tham khảo Logic toán này sẽ có ích cho các sinh viên ngành toán và các bạn đồng nghiệp ở trường Đại học Thủ Dầu Một.

Chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp để chúng tôi hiệu đính quyển sách này hoàn thiện hơn.

NHÓM TÁC GIẢ

TaiLieu.vn

CHƯƠNG 1

ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ



Nội dung trọng tâm:

- ❖ Thế nào là mệnh đề, chân trị của mệnh đề, các phép toán mệnh đề.
- ❖ Thực hiện được các phép toán mệnh đề.
- ❖ Hiểu được các ứng dụng của phép toán logic trong suy luận hàng ngày và chứng minh toán học.

1.1 Mệnh đề

1.1.1 Định nghĩa

Mệnh đề là một câu về một sự vật, sự việc nào đó có tính đúng hay sai. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai, cũng không thể vừa không đúng vừa không sai.

Giá trị đúng, sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề đó. Chân trị của mệnh đề đúng ký hiệu là 1, chân trị của mệnh đề sai ký hiệu là 0.

Ví dụ 1: Các câu xác định dưới đây là một mệnh đề :

“ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam ”

“ Paris là thủ đô của Anh ”

“ $7 + 5 = 12$ ”

“ Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác đều ”

Câu xác định : "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" ; " $7 + 5 = 12$ " là các mệnh đề đúng.

Còn các câu xác định: " Paris là thủ đô của Anh" và " Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác đều" là các mệnh đề sai.

Ví dụ 2: Xét các câu phát biểu sau :

“ Hôm nay là thứ mấy ? ”

“ $x + 1 = 2$ ”

“ $x + 2y - 5 = z$ ”

Câu " Hôm nay là thứ mấy ? " không là mệnh đề vì nó chỉ là một câu hỏi không có giá trị đúng, sai. Câu " $x + 1 = 2$ " và câu " $x + 2y - 5 = z$ " không phải là mệnh đề vì chúng

chẳng đúng cũng chẳng sai, bởi các biến trong những câu đó chưa được gán cho một giá trị cụ thể nào.

1.1.2 Phân loại mệnh đề

- Mệnh đề đơn (sơ cấp) : Là những mệnh đề chỉ có một câu, có giá trị luôn đúng hoặc sai.

- Mệnh đề phức hợp : Là những mệnh đề được kết hợp từ nhiều mệnh đề bằng các liên từ : « Nếu ... thì » ; « và » ; « nhưng » ; « hoặc » ; trạng từ « không ».

Ví dụ 3 : Nếu trời đẹp thì tôi sẽ đi dạo

Hà Nội không phải là thủ đô của Việt Nam

1.2 Các phép toán mệnh đề

Trong phép toán mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề. Do đó, khi thực hiện các phép toán mệnh đề thông thường người ta không ghi rõ các câu phát biểu mà chỉ ghi ký hiệu. Các chữ cái (viết thường) sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề. Những chữ cái thường dùng là $p, q, r, \dots$

Các phép toán mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Các phép toán mệnh đề được trình bày trong chương này bao gồm: phép phủ định (không), phép hội (và), phép tuyển (hoặc là), phép tuyển chọn (phép cộng logic), phép kéo theo (nếu ... thì), phép kéo theo hai chiều (phép tương đương).

1.2.1 Phép phủ định

Cho p là một mệnh đề, câu "không phải là p " là một mệnh đề khác được gọi là phủ định của mệnh đề p , mang giá trị đúng khi p sai, và mang giá trị sai khi p đúng, ký hiệu : $\bar{p}$ (hay $\neg p$).

Bảng chân trị :

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Ta có : $\bar{1}=0$; $\bar{0}=1$

Ví dụ 4 : Với $p = "2 > 0"$ thì $\bar{p} = "2 \leq 0"$.

Ví dụ 5 : Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính Đúng, Sai:

$q : "5 + 2 = 8"$

$r : "Paris \text{ là thủ đô của Mỹ}"$

Qui tắc: Nếu p có giá trị là 1 thì phủ định p có giá trị là 0 và ngược lại.

1.2.2 Phép hội

Cho hai mệnh đề p, q . Câu xác định " p và q " là một mệnh đề mới được gọi là hội của 2 mệnh đề p và q , kí hiệu $p \wedge q$, mang giá trị đúng khi cả hai cùng đúng, và sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ta có :

$$1 \wedge 1 = 1; 1 \wedge 0 = 0; 0 \wedge 1 = 0; 0 \wedge 0 = 0$$

Ví dụ 6 : Cho 2 mệnh đề p và q như sau

$p = "2 > 0"$ là mệnh đề đúng.

$q = "2 = 0"$ là mệnh đề sai.

Chân trị của mệnh đề $p \wedge q = "2 > 0 \text{ và } 2 = 0"$ là mệnh đề sai.

Ví dụ 7 : Cho 2 mệnh đề q và r như sau

q = “rắn là một loài bò sát” là mệnh đề đúng.

r = “ $-5 < -3$ ” là mệnh đề đúng.

Chân trị của mệnh đề $q \wedge r$ là đúng.

Qui tắc : Hội của 2 mệnh đề chỉ đúng khi cả hai mệnh đề là đúng. Các trường hợp còn lại là sai.

1.2.3 Phép tuyển

Cho hai mệnh đề p, q . Câu xác định “ p hoặc là q ” là một mệnh đề mới được gọi là tuyển của hai mệnh đề p và q , kí hiệu $p \vee q$, mang giá trị sai khi cả hai cùng sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ta có :

$$1 \vee 1 = 1; 1 \vee 0 = 1; 0 \vee 1 = 1; 0 \vee 0 = 0$$

Ví dụ 8: Cho 2 mệnh đề p và q như sau

p = “ $2 > 0$ ” là mệnh đề đúng

q = “ $2 = 0$ ” là mệnh đề sai

$p \vee q$ = “ $2 \geq 0$ ” là mệnh đề đúng.

Ví dụ 9: Cho 2 mệnh đề r và t như sau

r = “Paris là thủ đô của Việt Nam” là mệnh đề sai

t = “ $5 < 4$ ” là mệnh đề sai

$r \vee t$ là mệnh đề sai

Qui tắc : Tuyển của 2 mệnh đề chỉ sai khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

1.2.4. Phép tuyển chọn

Cho hai mệnh đề p và q . Câu xác định "hoặc là p đúng hoặc là q đúng nhưng không đồng thời cả p, q cùng đúng" là một mệnh đề mới được gọi là p tuyển chọn q , kí hiệu $p \oplus q$.

Bảng chân trị :

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ta có :

$$1 \oplus 1 = 0; 1 \oplus 0 = 1; 0 \oplus 1 = 1; 0 \oplus 0 = 0$$

Ví dụ 10 : “Tôi sẽ mua hoặc là một máy tính để bàn hoặc là một máy tính xách tay”

Qui tắc : Tuyển chọn của 2 mệnh đề chỉ sai khi cả hai mệnh đề có cùng giá trị. Các trường hợp còn lại là đúng.

1.2.5 Phép kéo theo

Cho p và q là hai mệnh đề. Câu "nếu p thì q " là một mệnh đề mới được gọi là mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề p, q , kí hiệu $p \rightarrow q$, mang giá trị sai khi p đúng và q sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị :

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ta có :

$$1 \rightarrow 1 = 1; 1 \rightarrow 0 = 0; 0 \rightarrow 1 = 1; 0 \rightarrow 0 = 1$$

Ví dụ 11 : Cho hai mệnh đề p và q như sau :

p = " tam giác ABC là đều "

q = " tam giác ABC có một góc bằng 60° "

Để xét chân trị của mệnh đề $p \rightarrow q$, ta có nhận xét sau :

- Nếu p đúng , q đúng : rõ ràng rằng $p \rightarrow q$ là đúng.

- Nếu p sai, nghĩa là tam giác ABC không đều thì dù q là đúng hay sai, nghĩa là tam giác ABC có hay không có góc 60° , thì mệnh đề $p \rightarrow q$ vẫn đúng.

Ví dụ 12: Cho 2 mệnh đề r và t như sau

r = "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam"

t = " $2 < 1$ "

Mệnh đề $r \rightarrow t$ là sai, nhưng mệnh đề $t \rightarrow r$ là đúng.

Qui tắc : mệnh đề kéo theo chỉ sai khi giả thiết đúng và kết luận sai. Các trường hợp khác là đúng.

1.2.6 Phép tương đương (phép kéo theo hai chiều)

Cho p và q là hai mệnh đề. Câu " p nếu và chỉ nếu q " là một mệnh đề mới được gọi là p tương đương q , kí hiệu $p \leftrightarrow q$. Mệnh đề tương đương là đúng khi p và q có cùng giá trị và sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị :

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ta có :

$$1 \leftrightarrow 1 = 1; 1 \leftrightarrow 0 = 0; 0 \leftrightarrow 1 = 0; 0 \leftrightarrow 0 = 1$$

Đọc là : p nếu và chỉ nếu q

p là điều kiện cần và đủ của q

Nếu p thì q và ngược lại

Ví dụ 13 : Tam giác ABC đều khi và chỉ khi nó có ba cạnh bằng nhau.

Độ ưu tiên của các toán tử logic:

- + Ưu tiên mức 1: ()
- + Ưu tiên mức 2: phép phủ định
- + Ưu tiên mức 3: phép hội và phép tuyển
- + Ưu tiên mức 4: phép kéo theo và phép kéo theo hai chiều
- + Ưu tiên từ trái sang phải.

1.3 Biểu thức mệnh đề

1.3.1 Định nghĩa

Cho $p, q, r, \dots$ là các mệnh đề. Nếu các mệnh đề này liên kết với nhau bằng các phép toán thì ta được một biểu thức mệnh đề.

Để phân biệt, ta ký hiệu các biểu thức mệnh đề bằng các chữ cái (viết hoa) như: $A, B, C, D, \dots$. Trong quá trình xây dựng biểu thức mệnh đề, người ta sử dụng các dấu () để phân biệt các bước.

Trong logic mệnh đề, biểu thức mệnh đề bao gồm:

- (i) Các biến mệnh đề $p, q, r, \dots$, là các mệnh đề chưa xác định giá trị đúng, sai.
- (ii) Các mệnh đề (hằng mệnh đề).
- (iii) Các phép toán trên các hằng mệnh đề và biến mệnh đề theo một thứ tự nhất định.

Ví dụ 14 : $(p \vee q) \rightarrow r$;

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

Chú ý : Một mệnh đề cũng là một biểu thức mệnh đề

Nếu A là một biểu thức mệnh đề thì $\bar{A}$ cũng là biểu thức mệnh đề

Nếu A và B là hai biểu thức mệnh đề thì $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ cũng là những biểu thức mệnh đề.

Giá trị của biểu thức mệnh đề là kết quả nhận được từ sự kết hợp giữa các phép toán và giá trị của các biến mệnh đề. Khi tính giá trị của một công thức, cần phải tính giá trị

của các mệnh đề thành phần trước, và dựa vào các giá trị tính đó để tính giá trị của biểu thức mệnh đề cuối cùng.

Bảng chân trị của một biểu thức mệnh đề có thể được hình thành qua các bước :

- + Kẻ dòng tiêu đề, và số dòng tiếp theo (2^n dòng với n là số mệnh đề đơn).
- + Kẻ số cột: tổng của số mệnh đề đơn và số phép toán mệnh đề.
- + Trong các cột của các mệnh đề đơn : điền 0 hay 1 (theo một qui luật nhất định)

cho đủ 2^n trường hợp.

+ Trong mỗi cột còn lại (ứng với các phép toán mệnh đề) : điền 0 hay 1 theo chân trị của phép toán đó.

Ví dụ 15: Lập bảng chân trị của biểu thức mệnh đề $(\bar{p} \vee q) \rightarrow p$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$(\bar{p} \vee q) \rightarrow p$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Ví dụ 16: Tìm chân trị của biểu thức mệnh đề $\bar{p} \vee (q \wedge r)$

p	$\bar{p}$	q	r	$q \wedge r$	$\bar{p} \vee (q \wedge r)$
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1

1.3.2 Hằng đúng - Hằng sai

Ví dụ 17: Xét chân trị của biểu thức mệnh đề $\bar{p} \vee p$

Lập bảng chân trị cho biểu thức mệnh đề $\overline{p} \vee p$

Ta có :

p	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee p$
0	1	1
1	0	1

Vậy $\overline{p} \vee p$ là một hằng đúng.

Định nghĩa: Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là đúng. Một hằng đúng cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là đúng bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ 18 :

Kiểm tra các biểu thức mệnh đề $p \rightarrow (q \rightarrow p)$; $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ có phải là hằng đúng ?

Ta có các bảng chân trị sau :

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Vậy $p \rightarrow (q \rightarrow p) = 1$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$ không phải là hằng đúng.

Ví dụ 19 : Xét chân trị của biểu thức mệnh đề $p \wedge \overline{p}$

Lập bảng chân trị cho biểu thức mệnh đề $p \wedge \bar{p}$

Ta có :

p	$\bar{p}$	$p \wedge \bar{p}$
0	1	0
1	0	0

Vậy $p \wedge \bar{p}$ là một hằng sai.

Định nghĩa : Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là sai. Một hằng sai cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là sai bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

1.3.3 Mệnh đề hệ quả

Định nghĩa: Cho F và G là 2 biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu $F \rightarrow G$ là hằng đúng, kí hiệu: $F \Rightarrow G$

Ví dụ 20: Cho $F = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

$$G = p \rightarrow r$$

Kiểm tra G có phải là hệ quả của F ?

Lập bảng chân trị của $F \rightarrow G$, ta có :

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	F	G	$F \rightarrow G$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Vậy $F \Rightarrow G$ vì $F \rightarrow G = 1$.

Ví dụ 21: Cho $A = (p \rightarrow q) \wedge \bar{q}$

$$B = \bar{p}$$

Kiểm tra B có phải là hệ quả của A ?

Lập bảng chân trị của $A \rightarrow B$, ta có :

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{q}$	A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Vậy $A \Rightarrow B$ vì $A \rightarrow B = 1$.

1.3.4 Tương đương Logic

Định nghĩa 1: Mệnh đề P và mệnh đề Q được gọi là tương đương logic nếu phép tương đương của P và Q ($P \leftrightarrow Q$) là hằng đúng.

Định nghĩa 2: Hai mệnh đề P và Q được gọi là tương đương logic nếu và chỉ nếu chúng có cùng chân trị.

Mệnh đề P và Q tương đương logic được kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$ (hay $P = Q$)

Ví dụ 22 : Cho $F = p \vee (q \wedge r)$

$$G = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Kiểm tra F và G có tương đương logic ?

Lập bảng chân trị của $F \leftrightarrow G$, ta có :

p	q	r	$q \wedge r$	F	$p \vee q$	$p \vee r$	G	$F \leftrightarrow G$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Vậy $F \Leftrightarrow G$ vì $F \leftrightarrow G = 1$.

Ghi chú : Bảng chân trị để chứng minh hệ quả (hay tương đương) logic của 2 công thức F, G , tức là bảng chân trị của công thức $F \rightarrow G$ (hay $F \leftrightarrow G$)

1.3.5 Các công thức tương đương logic

Với p, q, r là các mệnh đề. Ta có các tương đương logic sau:

- i) Phủ định của phủ định: $\overline{(\overline{p})} = p$
- ii) Quy tắc De Morgan:
 - Phủ định của phép hội : $\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}$
 - Phủ định của phép tuyển : $\overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$
- iii) Tính giao hoán:
 - Đối với phép hội : $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
 - Đối với phép tuyển : $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
 - Đối với phép tương đương : $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
- iv) Tính kết hợp:
 - Đối với phép hội : $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
 - Đối với phép tuyển : $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- v) Tính phân phối:
 - Của phép hội đối với phép tuyển : $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - Của phép tuyển đối với phép hội : $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- vi) Luật lũy đẳng:
 - Đối với phép hội : $p \wedge p \Leftrightarrow p$
 - Đối với phép tuyển : $p \vee p \Leftrightarrow p$
- vii) Luật trung hòa:
 - Đối với phép hội : $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
 - Đối với phép tuyển : $p \vee 0 \Leftrightarrow p$
- viii) Luật về phần tử bù:
 - Đối với phép hội : $p \wedge \overline{p} = 0$ (hay còn gọi là luật mâu thuẫn)
 - Đối với phép tuyển : $p \vee \overline{p} = 1$ (hay còn gọi là luật bài tam)