

TẬP ĐOÀN DỆT MAY VIỆT NAM
TRƯỜNG CAO ĐẲNG KINH TẾ - KỸ THUẬT VINATEX TP.HCM

GIÁO TRÌNH
MÔN HỌC/MÔ ĐUN: TOÁN ỨNG DỤNG A
NGÀNH/NGHỀ: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRÌNH ĐỘ: CAO ĐẲNG

Ban hành kèm theo Quyết định số: /QĐ-... ngàytháng.... năm.....
..... của

TP. HCM, năm 2019

TUYÊN BỐ BẢN QUYỀN

Tài liệu này thuộc loại sách giáo trình nên các nguồn thông tin có thể được phép dùng nguyên bản hoặc trích dùng cho các mục đích về đào tạo và tham khảo.

Mọi mục đích khác mang tính lệch lạc hoặc sử dụng với mục đích kinh doanh thiếu lành mạnh sẽ bị nghiêm cấm.

TaiLieu.vn

LỜI GIỚI THIỆU

Tài liệu giảng dạy “**Toán Ứng dụng A**” được biên soạn dựa trên các giáo trình *Toán cao cấp* của Nguyễn Đình Trí dùng cho sinh viên các Trường đại học, cao đẳng (2007), Nhà xuất bản Giáo dục; *Giải tích toán học* của Ngô Thành Phong (2016), Nhà xuất bản Giáo dục.

Tài liệu giảng dạy này được dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên ngành Công nghệ thông tin, Quản trị mạng máy tính, ... và được trình bày theo đúng chương trình môn học đã xây dựng.

Tài liệu giảng dạy này giúp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về Cực trị hàm hai biến; tích phân kép; tích phân đường; giải phương trình vi phân cấp một, cấp hai và khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

Tài liệu giảng dạy gồm 4 chương:

Chương I: HÀM MỘT BIẾN - GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN - TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN.

Chương II: HÀM HAI BIẾN, TÍCH PHÂN KÉP, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Chương III: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương IV: CHUỖI

Trong quá trình biên soạn, mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng ko tránh khỏi những hạn chế và một số thiếu sót nhất định, nhóm tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý đọc giả để tài liệu giảng dạy này ngày càng hoàn thiện hơn

Xin chân thành cảm ơn.

Tp. HCM, ngày ... tháng ... năm 20...

Tham gia biên soạn

1. Nguyễn Minh Tuấn

2. Lê Nguyễn Băng Châu

MỤC LỤC

CHƯƠNG I: HÀM MỘT BIẾN - GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN - TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN	1
I.1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ.....	1
I.1.1. Các khái niệm.....	1
I.1.2. Một số tính chất của hàm số.....	1
I.1.3. Hàm số hợp, hàm số ngược	1
I.1.4. Các số hàm sơ cấp cơ bản	2
I.2. GIỚI HẠN HÀM SỐ	2
I.2.1. Giới hạn của dãy số.....	2
I.2.2. Giới hạn của hàm số.....	2
I.2.3. Giới hạn một phía của hàm số.....	3
I.2.4. Giới hạn ở vô tận.....	3
I.2.5. Giới hạn bằng vô tận	3
I.3. HÀM SỐ LIÊN TỤC	4
I.3.1. Khái niệm.....	4
I.3.2. Các tính chất của hàm số liên tục	4
I.3.3. Hàm gián đoạn	5
I.4. ĐẠO HÀM, VI PHÂN CỦA HÀM SỐ	5
I.4.1. Đạo hàm cấp một	5
I.4.2. Vi phân cấp một	9
I.4.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao.....	9
I.5. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN.....	10
I.5.1. Tích phân bất định.....	10
I.5.2. Tích phân xác định.....	17
I.5.3. Ứng dụng của tích phân xác định.....	21
I.6. TÍCH PHÂN SUY RỘNG	23
I.6.1. Tích phân có cận ở vô tận	23
I.6.2. Tích phân của hàm không bị chặn.....	24
CHƯƠNG II : HÀM HAI BIẾN, TÍCH PHÂN KÉP, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG	28
II.1. HÀM HAI BIẾN	28
II.1.1. Khái niệm hàm hai biến	28
II.1.2. Giới hạn, tính liên tục của hàm hai biến.....	28
II.1.3. Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hai biến	29

II.1.4. Cực trị của hàm hai biến.....	30
II.2. TÍCH PHÂN KÉP	31
II.2.1. Bài toán thể tích hình trụ cong.....	31
II.2.2. Định nghĩa tích phân kép.....	32
II.2.3. Các tính chất của tích phân kép	32
II.2.4. Cách tính tích phân kép trong hệ trục tọa độ Đề - các	33
II.2.5. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực.....	34
II.2.6. Ứng dụng của tích phân kép	34
II.3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG	36
II.3.1. Tích phân đường loại một.....	36
II.3.2. Tích phân đường loại hai	37
CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN.....	42
III.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT	42
III.1.1. Khái niệm.....	42
III.1.2. Các phương trình khuyết	42
III.1.3. Phương trình vi phân có biến phân li (phương trình tách biến)	44
III.1.4. Phương trình đẳng cấp.....	45
III.1.5. Phương trình tuyến tính cấp một	46
III.1.6. Phương trình Bernoulli.....	46
III.1.7. Phương trình vi phân toàn phần.....	47
III.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI	47
III.2.1. Khái niệm.....	47
III.2.2. Các phương trình khuyết	48
III.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai.....	50
III.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng	51
CHƯƠNG IV: CHUỖI	56
IV.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ.....	56
IV.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG.....	57
IV.2.1. Các định lí so sánh	58
IV.2.2. Các tiêu chuẩn hội tụ.....	58
IV.3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU BẤT KÌ	60
IV.3.1. Chuỗi đan dấu	60
IV.3.2. Chuỗi có dấu bất kì, sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ	60
IV.4. CHUỖI LŨY THỪA.....	61
IV.4.1. Khái niệm.....	61
IV.4.2. Khai triển một hàm sơ cấp theo chuỗi lũy thừa.....	63

IV.4.3. Ứng dụng chuỗi để tính gần đúng	64
---	----

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TaiLieu.vn

GIÁO TRÌNH MÔN HỌC/MÔ ĐUN

Tên môn học/mô đun: Toán Ứng dụng A

Mã môn học/mô đun: MH 07

Thời gian thực hiện môn học: 60 giờ; (Lý thuyết: 30 giờ; Bài tập: 27 giờ; Kiểm tra: 3 giờ)

I. VỊ TRÍ TÍNH CHẤT CỦA MÔN HỌC/MÔ ĐUN:

- **Vị trí:** Môn học toán ứng dụng A được bố trí học vào năm nhất.
- **Tính chất:** Là môn học cơ bản bắt buộc cho các sinh viên thuộc các chuyên ngành Quản trị mạng máy tính, Thiết kế đồ họa, Công nghệ thông tin.

II. MỤC TIÊU MÔN HỌC/MÔ ĐUN:

1. Về kiến thức:

- Nắm được các phương pháp tìm giới hạn của hàm số một biến số, các phương pháp tính tích phân xác định, suy rộng và ứng dụng của nó trong thực tiễn
- Phát biểu được các khái niệm, định lý, tính chất cơ bản trong hàm nhiều biến, phương trình vi phân và chuỗi số.
- Biết được cách tìm cực trị hàm nhiều biến, tính tích phân bội, tích phân đường, tìm nghiệm phương trình vi phân và xét sự hội tụ của chuỗi số.

2. Về kỹ năng:

- Vận dụng các phương pháp tính tích phân bội trong hệ tọa độ cực, phương pháp tính tích phân đường, phương pháp tìm nghiệm phương trình vi phân và các phương pháp xét sự hội tụ của chuỗi số.
- Biết được ứng dụng của cực trị trong các bài toán tối ưu, tích phân bội trong việc tính thể tích và diện tích, tích phân đường trong việc xác định độ dài của một đường cong bất kỳ, phương trình vi phân trong các ngành cơ điện, chuỗi số trong các ngành kỹ thuật công nghệ.

3. Về năng tự chủ và trách nhiệm:

Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác, tự học, tự nghiên cứu, ham học hỏi.

III. NỘI DUNG MÔN HỌC/MÔ ĐUN:

1. Nội dung tổng quát và phân phối thời gian:

Số TT	Tên chương, mục	Thời gian (giờ)			
		Tổng số	Lý thuyết	Bài tập	Kiểm tra* (LT hoặc TH)
1	Chương 1. Hàm số một biến số	17	8	8	1
2	Chương 2. Hàm hai biến, tích phân kép, tích phân đường.	17	8	8	1
3	Chương 3. Phương trình vi phân.	17	8	8	1
4	Chương 4. Chuỗi.	9	6	3	
	Cộng:	60	30	27	3

2. Nội dung chi tiết:

Chương 1: Hàm số một biến số

Thời gian: 17 giờ

1. Mục tiêu:

- Nắm được cách tính giới hạn của hàm một biến số
- Vận dụng các công thức đạo hàm để tính cực trị của một hàm số và ứng dụng của nó
- Biết được cách tính nguyên hàm, tích phân và ứng dụng trong việc tìm diện tích và thể tích của một hình trong mặt phẳng.

2. Nội dung chương:

1. Giới hạn và tính liên tục của hàm số

Thời gian: 6 giờ

1.1. Ánh xạ, giới hạn của dãy số

1.2. Giới hạn của hàm số

1.3. Hàm số liên tục.

2. Đạo hàm và vi phân

Thời gian: 5 giờ

2.1 Đạo hàm của hàm số một biến số

2.2 Vi phân của hàm số một biến số.

3. Tích phân của hàm một biến số

Thời gian: 6 giờ

3.1. Nguyên hàm của hàm một biến số

3.2. Tích phân bất định của hàm số một biến số

3.3. Tích phân suy rộng của hàm một biến số.

Chương 2: Hàm hai biến, tích phân kép, tích phân đường

Thời gian: 17 giờ

1. Mục tiêu:

- Nắm được phương pháp tìm cực trị và các ứng dụng liên quan trong kinh tế, khoa học kỹ thuật và công nghệ.
- Nắm được các cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Oxy và cách tính trong hệ tọa độ cực và ứng dụng của nó trong thực tế: tính khối lượng, diện tích và thể tích một vật thể.
- Biết được cách tính tích phân đường và ứng dụng của nó trong việc tính độ dài đường cong, trọng tâm của một dây cung bất kì.

2. Nội dung chương:

1. Hàm hai biến

Thời gian: 6 giờ

1.1. Khái niệm hàm hai biến

1.2. Giới hạn, tính liên tục của hàm 2 biến

1.3. Đạo hàm riêng, vi phân của hàm 2 biến

1.4. Cực trị của hàm 2 biến.

2. Tích phân kép

Thời gian: 6 giờ

2.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép

2.2. Định nghĩa tích phân kép

2.3. Cách tính chất của tích phân kép

2.4. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Đề các

2.5. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

2.6. Ứng dụng của tích phân kép.

3. Tích phân đường

Thời gian: 5 giờ

3.1. Tích phân đường loại 1

3.2. Tích phân đường loại 2.

Chương 3: Phương trình vi phân

Thời gian: 17 giờ

1. Mục tiêu:

- Biết cách tìm nghiệm của phương trình có biến phân ly, phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

- Nắm và giải được cách tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng.

2. Nội dung chương:

1. Phương trình vi phân cấp 1

Thời gian: 10 giờ

1.1. Khái niệm

1.2. Phương trình khuyết

1.3. Phương trình tách biến

1.4. Phương trình đẳng cấp

1.5. Phương trình tuyến tính cấp 1

1.6. Phương trình Bernoulli

1.7. Phương trình vi phân toàn phần.

2. Phương trình vi phân cấp 2

2.1. Khái niệm

Thời gian: 7 giờ

2.2. Phương trình khuyết

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 2.

Chương 4: Chuỗi

Thời gian: 9 giờ

1. Mục tiêu:

- Nắm được cách xét sự hội tụ của chuỗi số

- Nắm được ứng dụng của chuỗi số trong khoa học kỹ thuật

2. Nội dung chương:

1. Đại cương về chuỗi

Thời gian: 2 giờ

2. Chuỗi số dương

Thời gian: 2 giờ

3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kỳ

Thời gian: 2 giờ

4. Chuỗi lũy thừa.

Thời gian: 3 giờ

CHƯƠNG I: HÀM MỘT BIẾN - GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN - TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

I.1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ

I.1.1. Các khái niệm

Định nghĩa I.1.1: Cho hai tập hợp X và Y . Quy luật f cho một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in Y$ gọi là ánh xạ từ tập X vào tập Y , ký hiệu $f: X \rightarrow Y$, x gọi là tạo ảnh của $y \in Y$, y gọi là ảnh của $x \in X$. Ta viết $f: x \mapsto y = f(x)$.

- Cho $A \subset X$, tập $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ gọi là ảnh của tập A (qua f)
- Cho $B \subset Y$, tập $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ là nghịch ảnh của tập B (qua f)
- $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh, nếu: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- $f: X \rightarrow Y$ là một toàn ánh, nếu: $f(X) = Y$.
- $f: X \rightarrow Y$ là một song ánh, nếu f vừa đơn ánh vừa là toàn ánh.
- Cho các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$. Ánh xạ $h: X \rightarrow Z$ với $h(x) = g[f(x)]$, $\forall x \in X$, gọi là tích của f và g , ký hiệu $h = g \circ f$.
- Cho song ánh $f: X \rightarrow Y$, ánh xạ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ thỏa: nếu $y = f(x)$ thì $x = f^{-1}(y)$; f^{-1} gọi là ánh xạ ngược của f .

Ví dụ:

- 1) Ánh xạ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, với $f(x) = 2x + 1$ là một đơn ánh nhưng không toàn ánh;
- 2) Ánh xạ $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, với $g(x) = x^2$ là một toàn ánh nhưng không đơn ánh;
- 3) Ánh xạ $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, với $h(x) = 2x + 1$ là một song ánh.

Định nghĩa I.1.2: Cho $X \subseteq \mathbf{R}$, $X \neq \emptyset$. Ánh xạ $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ gọi là một hàm số (biến số thực). Tập X gọi là miền xác định và tập $Y = f(X)$ là miền giá trị của hàm số. Ta viết: $y = f(x)$.

Định nghĩa I.1.3: Cho hàm số $y = f(x)$. Tập hợp điểm $M(x, f(x))$ (với mọi x thuộc tập xác định X) trên mặt phẳng tọa độ gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Định nghĩa I.1.4: Hàm số $u: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ gọi là một dãy số. Ta thường ký hiệu dãy số: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ hay $\{u_n\}$. Các số $u_1, u_2, \dots, u_n$ gọi là số hạng của dãy số. Dãy số $\{u_n\}$ có thể hữu hạn nếu hữu hạn số hạng và cũng có thể vô hạn nếu có vô hạn số hạng.

I.1.2. Một số tính chất của hàm số

- 1) *Hàm số đơn điệu:* Hàm số f gọi là đơn điệu tăng (giảm) trên miền X , nếu: với mọi $x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ($f(x_1) > f(x_2)$).
- 2) *Hàm số bị chặn:* Hàm số f gọi là bị chặn trong miền X , nếu tồn tại số $k > 0$, sao cho: $|f(x)| \leq k$, mọi $x \in X$.
- 3) *Hàm số chẵn, hàm số lẻ:* Hàm số f xác định trên miền đối xứng X gọi là hàm số chẵn (lẻ) nếu với mọi $x \in X: f(-x) = f(x)$, ($f(-x) = -f(x)$).
- 4) *Hàm số tuần hoàn:* Hàm số f tuần hoàn trên miền X nếu tồn tại số $k \neq 0$, sao cho: $f(x+k) = f(x)$, $\forall x \in X$. Số $t > 0$ nhỏ nhất trong các số k gọi là chu kỳ của hàm số.

I.1.3. Hàm số hợp, hàm số ngược

Định nghĩa I.1.5: Cho X, Y là hai tập hợp con của $\mathbf{R}$ và các hàm số $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow \mathbf{R}$. Ánh xạ tích: $h = g \circ f$ là hàm số hợp của hai hàm số f và g .

- Cho song ánh $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, ánh xạ ngược f^{-1} của f gọi là hàm ngược của hàm f .

I.1.4. Các số hàm sơ cấp cơ bản

- 1) Hàm số lũy thừa: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)
- 2) Hàm số mũ: $y = a^x$ ($a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$)
- 3) Hàm số logarith: $y = \log_a x$ ($a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$)
- 4) Hàm số lượng giác: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$
- 5) Hàm số lượng giác ngược: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$

I.2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

I.2.1. Giới hạn của dãy số

Định nghĩa I.2.1: Số a gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, sao cho $\forall n > N : |u_n - a| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

- Nếu a là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$, ta cũng nói $\{u_n\}$ hội tụ về a .

- Dãy số $\{u_n\}$ dần đến vô tận, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$.

Định lý I.2.1: Cho hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ có giới hạn.

- Nếu $\forall n : u_n = v_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

- Nếu $\forall n : u_n > v_n$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Định lý I.2.2: Nếu $\{u_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất. Nếu $\{u_n\}$ có giới hạn thì $\{u_n\}$ bị chặn.

Định lý I.2.3: Cho ba dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}$ và $\{z_n\}$ có giới hạn và $u_n \leq v_n \leq z_n$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$.

Định lý I.2.4: Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \infty$.

Định lý I.2.5: Nếu $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên (giảm và bị chặn dưới) thì hội tụ.

Định lý I.2.6: Nếu $\{u_n\}, \{v_n\}$ hội tụ thì tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng hội tụ và: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}, \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0)$$

Ví dụ: Chứng tỏ $\{u_n\}$: $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ hội tụ.

Giải: Ta có: Do $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = u_n + \frac{1}{2n+1} > u_n$,

nên dãy số tăng. Mặt khác: $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$

Nên dãy số bị chặn trên. Vậy nó hội tụ.

I.2.2. Giới hạn của hàm số

Định nghĩa I.2.2: Số k gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists \delta > 0$ sao cho $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - k| < \varepsilon$. Ký hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \quad \text{hay } f(x) \rightarrow k \text{ khi } x \rightarrow a$$

Các định lý về giới hạn hàm số

Định lý I.2.7: Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng có giới hạn khi $x \rightarrow a$. Thì tổng, hiệu, tích, thương của chúng cũng có giới hạn, và :

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x). \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

Định lý I.2.8: Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ cùng có giới hạn khi $x \rightarrow a$ và: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = k$ thì $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$.

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Giải: Xét $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, mà $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Vậy: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

I.2.3. Giới hạn một phía của hàm số

Định nghĩa I.2.3: Số k gọi là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists \delta > 0$ sao cho $x - a > \delta$ thì $|f(x) - k| < \varepsilon$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = k$.

- Số k gọi là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists \delta > 0$ sao cho $a - x > \delta$ thì $|f(x) - k| < \varepsilon$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = k$.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = k$ thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$.

I.2.4. Giới hạn ở vô tận

Định nghĩa I.2.4: Số k gọi là giới hạn của $f(x)$ khi $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists M > 0$ sao cho $|x| > M$ thì $|f(x) - k| < \varepsilon$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

(hay $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$)

I.2.5. Giới hạn bằng vô tận

Định nghĩa I.2.5: Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng vô tận khi $x \rightarrow a$ (hoặc $x \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|x| > M$ thì $|f(x)| > M$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

(hay $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$)

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

Giải: Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

$$\text{Nên: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -2.$$

$$\text{và: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 2.$$

I.3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

I.3.1. Khái niệm

Định nghĩa I.3.1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận của điểm x_0 nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ta nói $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, ta nói $f(x)$ liên tục phải tại điểm x_0 , nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ta nói $f(x)$ liên tục trái tại điểm x_0 , $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại x_0 .

Định nghĩa I.3.2: Hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

- Hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a; b)$ và $f(x)$ liên tục phải tại a , $f(x)$ liên tục trái tại b .

Chú ý: Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $V(x_0)$ của điểm x_0 , với mọi x thuộc $V(x_0)$, ($x \neq x_0$). Đặt: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, Δx và Δy lần lượt được gọi là số gia của biến x và số gia của $f(x)$ tại x_0 .

Định nghĩa I.3.3: Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Ví dụ: Xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \end{cases} \quad \text{tại điểm } x = 0.$$

Giải: Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} = f(0)$

Vậy $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

I.3.2. Các tính chất của hàm số liên tục

Định lý I.3.1: Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ cùng liên tục tại x_0 thì tổng, hiệu, tích, thương ($g(x_0) \neq 0$) của chúng cũng liên tục tại x_0 .

Định lý I.3.2: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 và tương ứng hàm $g(u)$ liên tục tại điểm $u_0 = g(x_0)$ thì hàm hợp $g \circ f$ cũng liên tục tại x_0 .

Định lý I.3.3 (Định lý Weiest'rass 1): Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì bị chặn trên đoạn đó.

Định lý I.3.4 (Định lý Weiest'rass 2): Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì $f(x)$ đạt đến giá trị lớn nhất và bé nhất trên đoạn đó.

Định lý I.3.5 (Định lý Bonzano – Cauchy 1): Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a ;b)$ để $f(c) = 0$.

Định lý I.3.6 (Định lý Bonzano – Cauchy 2): Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.

Ví dụ: Chứng minh phương trình: $x^5 + 3x - 1 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm dương.

Giải: Đặt $f(x) = x^5 + 3x - 1$ thì $f(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbf{R}$, ta có: $f(0) = -1$, $f(1) = 3$ nên $f(0).f(1) < 0$, vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

I.3.3. Hàm gián đoạn

Định nghĩa I.3.4: Hàm số $f(x)$ gọi là gián đoạn tại điểm x_0 nếu nó không liên tục tại điểm đó.

Chú ý: Điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu $f(x)$ gián đoạn tại điểm đó nhưng tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, ta gọi x_0 là điểm gián đoạn bỏ được của $f(x)$.

- Điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn loại 2 nếu nó là điểm gián đoạn của $f(x)$ nhưng không là gián đoạn loại 1.

Ví dụ: Hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

điểm $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn bỏ được vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$.

I.4. ĐẠO HÀM, VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

I.4.1. Đạo hàm cấp một

Định nghĩa I.4.1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của điểm x_0 . Đặt: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$ tại x_0 . Kí hiệu: $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Vậy: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 ta nói $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 .

- Hàm số $f(x)$ gọi là khả vi trong tập $U \subset \mathbf{R}$, nếu nó khả vi tại mọi điểm $x_0 \in U$.

Lưu ý: - Nếu tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ta gọi đó là đạo hàm bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 .

Kí hiệu: $f'(x_0^+)$, vậy $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tương tự: đạo hàm bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 , và $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Nếu $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = A$ thì $f'(x_0) = A$.

Định lý I.4.1: Nếu $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.

Lưu ý: - Định lý trên chỉ là một điều kiện cần, điều ngược lại chưa chắc đã đúng. Chẳng hạn hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. (tự chứng minh).

Các quy tắc tính đạo hàm

- Quy ước: $u = u(x)$, $v = v(x)$ và các hàm số này có đạo hàm tại cùng một điểm.

Ta có:

$$- (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$- (u.v)' = u'.v + v'.u$$

$$- \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$- \text{Nếu } y = y(u) \text{ và } u = u(x) \text{ thì: } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Bảng đạo hàm của các hàm sơ cấp

Đạo hàm hàm sơ cấp	Đạo hàm hàm hợp
$C' = 0$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \quad (\alpha \in \mathbf{R})$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1)$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1)$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(\cot gx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot gu)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctg x)' = -(\operatorname{arccot} gx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctg u)' = -(\operatorname{arccot} gu)' = \frac{u'}{1+u^2}$

Ví dụ: Tính đạo hàm các hàm số sau:

1) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$

2) $y = \sin^2[\cos(2x + 1)]$

Giải:

1) Ta có: $y' = \frac{2x(x + 2) - (x^2 + 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$

2) Ta có: $y' = 2\sin[\cos(2x + 1)]\cos[\cos(2x + 1)][-2\sin(2x + 1)]$
 $= -2\sin 2[\cos(2x + 1)].\sin(2x + 1)$

Tính chất của đạo hàm

Định lý 1.4.2 (Định lý Rolle): Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a ; b]$, khả vi trong khoảng $(a ; b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a ; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 1.4.2 (Định lý Lagrange): Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a ; b]$, khả vi trong khoảng $(a ; b)$ thì tồn tại $c \in (a ; b)$ sao cho :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Định lý 1.4.3 (Định lý Cauchy): Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều liên tục trong đoạn $[a ; b]$, khả vi trong khoảng $(a ; b)$ và $g'(x) \neq 0$ thì tồn tại $c \in (a ; b)$ sao cho :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Quy tắc L' hospitalle

Quy tắc 1: Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ đều liên tục trong đoạn $[a ; b]$ và $c \in (a ; b)$ sao cho : $f(c) = g(c)$. Nếu trong lân cận của điểm c tồn tại $f'(x)$, $g'(x)$ ($g'(x) \neq 0$) thì

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Quy tắc 2: Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ đều liên tục trong đoạn $[a; b]$ và $c \in (a; b)$ sao cho: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. Nếu trong lân cận của điểm c tồn tại $f'(x)$, $g'(x)$ ($g'(x) \neq 0$) thì:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lưu ý: - Quy tắc L' hospitalle vẫn đúng khi $x \rightarrow \infty$ (nếu các điều kiện trên thỏa mãn).

Ví dụ: Tính:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

Giải:

1) Các hàm số $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x^3$ đều thỏa mãn các điều kiện của quy tắc L'hospitalle trong mọi lân cận của điểm $x = 0$, nên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

2) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

Cực trị của hàm số

Định nghĩa I.4.2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $(a; b)$. Ta nói rằng $f(x)$ nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu tồn tại một lân cận của x_0 bán kính δ , sao cho với mọi x thuộc lân cận đó, ta có:

$$f(x) < f(x_0) \text{ (} f(x) > f(x_0) \text{)}, (x \neq x_0)$$

- Điểm x_0 gọi là điểm cực trị (cực đại hay cực tiểu tương ứng)

Định lý I.4.4: Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Lưu ý: Điều kiện $f'(x_0) = 0$ chỉ là một điều kiện cần của điều kiện cực trị.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = x^2$ có $f'(0) = 0$ và đạt cực trị tại $x = 0$; hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(0) = 0$ nhưng không đạt cực trị tại $x = 0$. (tự chứng minh)

Định lý I.4.5: Nếu $f(x)$ có đạo hàm trong một lân cận của x_0 bán kính δ và $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua điểm x_0 , thì x_0 là điểm cực trị của $f(x)$ ($f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì x_0 là điểm cực đại, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì x_0 là điểm cực tiểu).

Lưu ý: Điều kiện trên không nhất thiết $f(x)$ phải có đạo hàm tại x_0 , miễn rằng $f(x)$ vẫn xác định tại x_0 .

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = (2x+1)\sqrt[3]{x^2}$

Giải: Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{2(5x+1)}{3\sqrt[3]{x}}$

Hàm số có 2 điểm tới hạn là $x_1 = -1/5$ và $x_2 = 0$.

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-1/5$	0	$+\infty$	
f'(x)		+	0	-	+

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x_1 = -1/5$, $y_{CD} = \frac{3}{5\sqrt[3]{5}}$; đạt cực tiểu tại $x_2 = 0$, $y_{CT} = 0$.

I.4.2. Vi phân cấp một

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 : $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Khi đó:

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \theta(\Delta x)$, trong đó $\theta(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx .

Định nghĩa I.4.3: Ta gọi biểu thức $f'(x_0) \cdot \Delta x$ là vi phân cấp 1 của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu: dy .

- Với $y = x$ thì $dy = dx = \Delta x$. Nên ta có: $dy = f'(x)dx$

Định lý I.4.6: Nếu các hàm số $u(x)$, $v(x)$ cùng có vi phân tại x_0 , thì tại đó ta có:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, d(u \cdot v) = vdu + u dv, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Định lý I.4.7: Cho hàm số $f(x)$, nếu x là biến độc lập hay là một hàm của biến khác thì vi phân của nó đều có dạng: $dy = f'(x)dx$ (tính bất biến của vi phân)

I.4.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa I.4.4: Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x , khi đó $f'(x)$ cũng là một hàm số của biến x . Giả sử $f'(x)$ cũng khả vi tại điểm x , khi đó $[f'(x)]'$ gọi là đạo hàm cấp hai của hàm $f(x)$, kí hiệu: $f''(x)$

Tiếp tục như vậy ta có định nghĩa:

Định nghĩa I.4.5: Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi đến cấp n tại điểm x , đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của $f(x)$ gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$, kí hiệu: $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Ví dụ:

1) Cho $f(x) = x^3$, tính $f''(x)$

Ta có: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$.

2) Cho $f(x) = \sin x$. Chứng minh: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ($n \in \mathbf{N}, n \geq 1$)

Giải:

1) Ta có: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$.

2) Sử dụng phép quy nạp, ta có: $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (đúng khi $n = 1$)

Giả sử khi $n = k$, ta có: $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó: $f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

Vậy: Công thức trên đúng khi $n = k + 1$, nên: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ($n \in \mathbf{N}, n \geq 1$)

Vị phân cấp cao

Định nghĩa I.4.6: Giả sử hàm số $y = f(x)$ khả vi tại điểm x , $dy = f'(x)dx$ cũng là một hàm số của x . Khi đó: $d(dy) = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx dx$. Ta viết:

$$d^2y = f''(x)dx^2$$

- Một cách tổng quát, ta có vị phân cấp n ($n \geq 2$) của hàm số $f(x)$:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

I.5. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

I.5.1. Tích phân bất định

Khái niệm

Định nghĩa I.5.1: Cho hai hàm số $F(x)$, $f(x)$ cùng xác định trong khoảng $(a; b)$. Hàm số $F(x)$ gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a; b)$.

- $F(x)$ gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a; b)$ và $F'(a^+) = f(a)$, $F'(b^-) = f(b)$.

Định lý I.5.1: Nếu hàm số $f(x)$ có các nguyên hàm là $F(x)$ và $G(x)$ thì :

$$G(x) = F(x) + C, (C = \text{const}).$$

Định nghĩa I.5.2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$, kí hiệu: $\int f(x)dx$

Vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$, trong đó: $F'(x) = f(x)$, ($C = \text{const}$).

Kí hiệu $\int$ là dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Ví dụ: