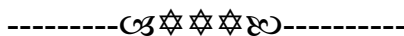


BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP QUẢNG NINH



Chủ biên: TS. Bùi Ngọc Hùng
Tham gia: ThS. Nguyễn Thị Mai Anh



GIÁO TRÌNH
LÝ THUYẾT SAI SỐ
(LƯU HÀNH NỘI BỘ)

Quảng Ninh – 2019

Chương 1. Lý thuyết sai số và bình sai trực tiếp dãy trị đo của cùng một đại lượng

1.1. Khái niệm về đo đạc

Phép thử nhằm xác định một đại lượng trắc địa gọi là phép đo. Phép đo là so sánh đại lượng cần xác định với một đại lượng cùng loại được chọn làm đơn vị. Các điều kiện tạo nên phép đo gọi là điều kiện đo. Kết quả thu được của một phép đo theo một quy trình nhất định, trong một thời điểm cụ thể gọi là trị đo.

Các điều kiện của một phép đo bao gồm điều kiện đặc trưng cho môi trường ngoại cảnh, điều kiện đặc trưng cho độ tin cậy của máy móc, dụng cụ đo và điều kiện đặc trưng cho người đo.

Ví dụ trong đo dài trực tiếp bằng thước thép. Quy trình đo lúc này được tiến hành từ thao tác định tuyến, phân đoạn, kéo thước, đọc số và đo các đại lượng cần thiết để hiệu chỉnh vào mỗi đoạn như nhiệt độ, hiệu chênh cao của hai đầu thước,... Các điều kiện đặc trưng cho môi trường đo có thể kể đến là ảnh hưởng của nhiệt độ, độ lồi lõm địa hình, của tốc độ gió; Đặc trưng cho dụng cụ máy móc là độ chính xác đọc số của thước thép, của máy móc dùng để đo nhiệt, đo hiệu chênh cao; Đặc trưng cho người đo có thể là cách tổ chức nhóm đo, lực kéo ở hai đầu thước và khả năng đọc số.

Dễ nhận thấy, mỗi thao tác trong quy trình đo đều ảnh hưởng đến kết quả của một phép đo. Trị đo thu được cuối cùng là tổng hợp các thông tin thu được từ các điều kiện đặc trưng của điều kiện đo trong một khoảng thời gian nhất định. Trên thực tế phép đo có thể tiến hành bằng phương pháp trực tiếp hay gián tiếp

1.1.1. Đo trực tiếp và đo gián tiếp.

Đo trực tiếp: Là so sánh trực tiếp đại lượng cần đo với đơn vị đo tương ứng. Ví dụ: Đo độ dài của một đoạn thẳng bằng thước thép.

Đo gián tiếp: Là đại lượng cần xác định được tính toán thông qua đại lượng đo trực tiếp. Ví dụ: Muốn xác định diện tích của 1 hình chữ nhật ta cần phải đo trực tiếp chiều dài a và chiều rộng b hay trị đo gián tiếp được xác định thông qua hai đại lượng đo trực tiếp a và b .

1.1.2. Đo cùng độ chính xác và không cùng độ chính xác.

Đo cùng độ chính xác: Là kết quả đo nhận được trong cùng một điều kiện đo.

Đo không cùng độ chính xác: Là kết quả đo nhận được trong điều kiện đo khác nhau.

Ví dụ, kết quả đo góc $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ trong một tam giác một người đo dùng một máy đo theo một phương pháp với số lần đo như nhau và trong điều kiện thời tiết ổn định thì kết quả đo của 3 góc đó nhận được cùng độ chính xác, ngược lại, một trong các điều kiện trên khác đi, chẳng hạn dùng máy khác, người đo khác hoặc áp dụng cách đo khác thì kết quả đo của 3 góc sẽ không cùng độ chính xác.

1.1.3. Trị đo cần thiết và trị đo thừa.

Trị đo cần thiết (t): Là số lượng đo tối thiểu để xác định một đồ hình lưới trắc địa và giải một bài toán trắc địa.

Trị đo thừa (r): Là đại lượng đo dư ra để kiểm tra hoặc nâng cao độ chính xác. Trong bình sai điều kiện thì trị đo thừa chính là số phương trình điều kiện ràng buộc giữa các trị đo với nhau, số trị đo thừa được xác định là:

$$r = n - t$$

1.2. SAI SỐ VÀ PHÂN LOẠI SAI SỐ

1.2.1. Sai số đo

Bất kỳ một phép đo nào dù hoàn chỉnh đến đâu vẫn tồn tại sai số, tức là không thể xác định được trị thực của đại lượng cần đo.

Nếu gọi L_i là trị đo, L_0 là trị thực thì chênh lệch giữa trị thực và trị đo được gọi là sai số thực của trị đo, kí hiệu là Δ_i .

$$\Delta_i = L_0 - L_i \quad (2.2)$$

Sai số thực luôn luôn tồn tại do đó ta phải tìm quy luật để xác định nó, trong thực tế ta không thể tìm được trị thực mà chỉ xác định được trị xác suất thông qua số hiệu chỉnh V_i :

$$L'_i = L_i + V_i \quad (2.3)$$

Trong đó: L'_i được gọi là trị xác suất nhất hay trị sau bình sai.

1.2.2 Nguyên nhân gây nên sai số.

Có rất nhiều nguyên nhân gây ra sai số đo nhưng ta có thể phân thành 3 nguyên nhân chính như sau:

+ Sai số do dụng cụ đo và máy móc: Là sai số do sử dụng dụng cụ và máy móc không chính xác.

+ Sai số do người đo: Do các giác quan của con người không chuẩn xác gây nên. Ví dụ, mắt người chỉ phân biệt được hai điểm cách nhau 0.2mm nên khi đo chiều dài một đoạn thẳng nếu ta ước đọc không đúng phần lẻ mm sẽ có sai số đọc số.

+ Sai số do ngoại cảnh: Do ảnh hưởng của điều kiện thời tiết, điều kiện địa hình, địa vật gây nên. Ví dụ, cùng đo chiều dài một đoạn thẳng bằng thước thép nhưng khi đo nhiệt độ môi trường thay đổi làm chiều dài thước bị co giãn hoặc địa hình gập ghềnh thước bị cong, vênh,... thì kết quả đo sẽ kém chính xác.

1.2.3 Phân loại sai số

Dựa vào tính chất và quy luật xuất hiện khi xử lý số liệu đo đạc người ta phân làm 3 loại sai số:

1.2.3.1 Sai số thô (sai lầm).

Là sai số do nhầm lẫn của con người trong khi đo đạc hoặc tính toán, sai số thô thường có giá trị lớn không xuất hiện theo quy luật nhưng có thể phát hiện và loại bỏ nhờ phép đo thừa.

2.1.3.2. Sai số hệ thống.

Là những sai số thường có trị số và dấu không đổi và nó biến đổi theo một quy luật. Các nguyên nhân sinh ra sai số hệ thống là do dụng cụ máy móc không hoàn chỉnh, do thói quen của người đo và do điều kiện ngoại cảnh,...

Ví dụ: Giả sử dùng thước thép 20m để đo một đường thẳng nào đó, nhưng chiều dài thật của thước là 20,001m. Như vậy trong kết quả một lần kéo thước có chứa +1mm và sai số này được gọi là sai số hệ thống.

Sai số hệ thống có thể loại bỏ hoặc giảm bớt được nếu biết nguyên nhân và quy luật xuất hiện bằng rồi dùng phương pháp kiểm định tìm được trị số của nó để cải chính vào kết quả đo.

2.1.3.3. Sai số ngẫu nhiên.

Sai số ngẫu nhiên sinh ra do tổng hợp của nhiều nguồn sai số, chúng luôn tồn tại trong kết quả đo, xuất hiện biến thiên phức tạp cả về dấu và trị số.

Giả sử khi đo đoạn thẳng bằng thước thép ngoài sai số khắc vạch và sai số giãn nở nhiệt là mang tính chất hệ thống, còn các sai số do lực kéo không đều, do gió thổi,...tất cả các sai số này đều đồng thời tác động trong khoảng khắc theo độ lớn (trị số) và chiều (dấu) khác nhau lên chúng là sai số ngẫu nhiên.

Sai số ngẫu nhiên xuất hiện không theo quy luật do đó ta không khắc phục mà chỉ có thể tìm cách hạn chế ảnh hưởng của nó tới kết quả đo.

Vì sai số thô và sai số hệ thống có thể tìm biện pháp loại trừ hoặc giảm bớt được nên có thể coi sai số ngẫu nhiên là thành phần chủ yếu của sai số và nó là đối tượng nghiên cứu của lý thuyết sai số.

1.3. Đặc tính của sai số ngẫu nhiên

1.3.1. Ví dụ khảo nghiệm.

Sai số ngẫu nhiên có trị số và dấu xuất hiện không theo quy luật, nhưng trong cùng một điều kiện đo nhất định, sai số ngẫu nhiên sẽ xuất hiện theo những quy luật nào đó.

Để nghiên cứu đặc tính cơ bản của sai số ngẫu nhiên, người ta tiến hành thực nghiệm đo các góc của 162 tam giác, đã xác định được các sai số thực như sau:

bảng 1-1

khoảng sai số	- Δ		+ Δ		tổng	
	số lượng	%	số lượng	%	số lượng	%
0" 00 -:- < 0"20	21	13,0	21	13,0	42	26,0
0" 20 -:- < 0"40	19	11,7	19	11,7	38	23,4
0" 40 -:- < 0"60	11	6,8	16	9,9	27	16,7
0" 60 -:- < 0"80	8	5,0	13	8,0	21	13,0
0" 80 -:- < 1"00	7	4,3	9	5,6	16	9,9
1" 00 -:- < 1"20	6	3,7	5	3,1	11	6,8
1" 20 -:- < 1"40	3	1,8	1	0,6	4	2,4
1" 40 -:- < 1"60	2	1,2	1	0,6	3	1,8
> 1"60	0	0	0	0	0	0
tổng	77	47,5	85	52,5	162	100,0

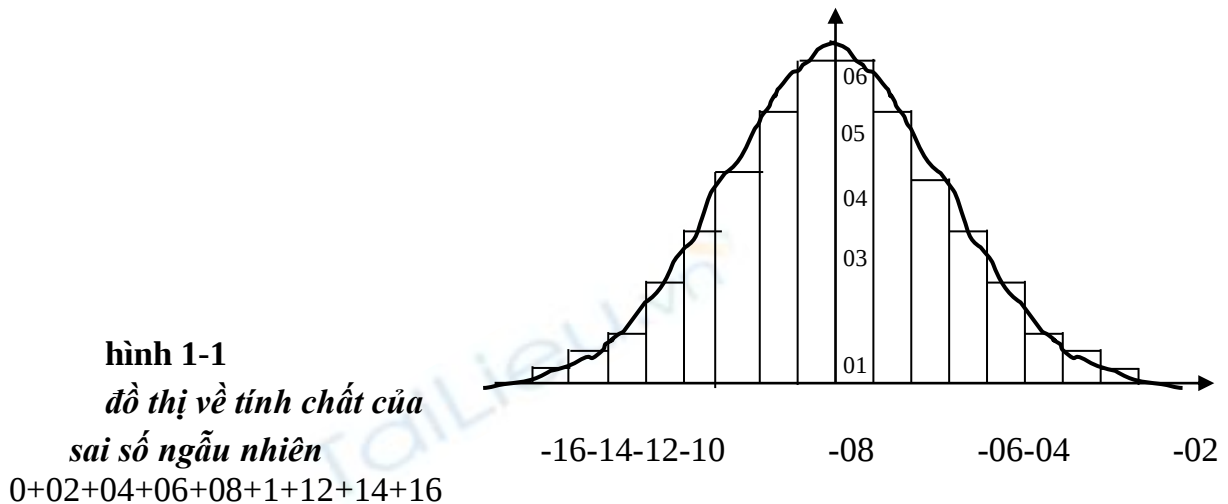
Để dễ nhận biết quy luật phân bố của sai số, ta dùng số liệu ở bảng 1-1 để vẽ đồ thị:

Trên trục hoành biểu diễn các khoảng sai số tương ứng với bảng trên. diện tích của mỗi hình chữ nhật biểu diễn bằng số phần trăm xuất hiện trong khoảng sai số ghi trong bảng 1-1. ta có thể xác định chiều cao để vẽ hình chữ nhật như sau: ví dụ sai số

xuất hiện trong khoảng $0'' 00 -:- < 0''20$ chiếm 13% thì chiều cao của hình chữ nhật tương ứng là:

$$h = \frac{13}{100 \times 0.2} = 0.65$$

Nếu nối điểm giữa của các cạnh đáy phía trên hình chữ nhật ta sẽ được một đường gãy khúc đối xứng qua trục tung và tiệm cận với trục hoành



1.3.2. Các đặc tính của sai số ngẫu nhiên.

Qua thực nghiệm trên ta thấy sai số ngẫu nhiên có những đặc tính sau đây:

a. Đặc tính giới hạn:

Trong những điều kiện đo đạc cụ thể, trị tuyệt đối của sai số ngẫu nhiên không vượt quá một giới hạn nhất định.

b. Đặc tính tập trung:

Sai số ngẫu nhiên có trị tuyệt đối càng nhỏ, thì có khả năng xuất hiện càng nhiều.

c. Đặc tính đối xứng:

Sai số ngẫu nhiên dương và âm với trị số tuyệt đối bé có số lần xuất hiện gần bằng nhau.

d. Đặc tính bù trừ:

Khi số lần đo tiến tới vô cùng, thì số trung bình cộng của các sai số đo đạc ngẫu nhiên của cùng một đại lượng sẽ tiến tới không.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0$$

1.4. Tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác

Một trong những nhiệm vụ chủ yếu của công tác xử lý số liệu trắc địa là đánh giá độ tin cậy của các đại lượng đo. Đánh giá độ tin cậy là xây dựng các đại lượng đặc

trung cho kết quả đo và kết quả xử lý, làm tiêu chuẩn để so sánh gọi là tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác.

Trong thực tế, sau khi đo nhiều lần ta sẽ thu được các trị trung bình cộng trong các trường hợp với số lần đo khác nhau là khác nhau. Nhưng các trị trung bình cộng này luôn khác trị thực. Nảy sinh vấn đề là trị trung bình cộng nào ở trong các trị trung bình trên được coi là đáng tin cậy nhất. Giải quyết mâu thuẫn này người ta dựa vào các tiêu chuẩn sau đây để đánh giá.

1.4.1. Sai số trung bình

Khi đo 1 đại lượng nào đó n lần, giả sử các sai số thực của n lần đo đó là : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_n$. Vì tổng đại số của các sai số đo theo tính chất thứ tự của sai số ngẫu nhiên sẽ triệt tiêu nhau nên không dùng nó để đánh giá độ chính xác của kết quả đo được. Vì vậy ta dùng số trung bình để đánh giá độ chính xác kết quả đo đó.

Sai số trung bình là trị trung bình cộng các trị tuyệt đối các sai số thực thành phần, được xác định bởi công thức:

$$\theta = \frac{[\Delta]}{n} \quad (2.5)$$

Trong đó: Δ là sai số thực
 n là số lần đo.

Tuy nhiên dùng sai số trung bình θ trong nhiều trường hợp chưa đánh giá được chính xác vì nó chưa phản ánh được độ biến động của sai số ngẫu nhiên

Ví dụ: Đo một đại lượng ở 2 điều kiện khác nhau (không cùng độ chính xác) như sau:

Điều kiện 1: $\Delta: -5'', -3'', +7'', +1''$.

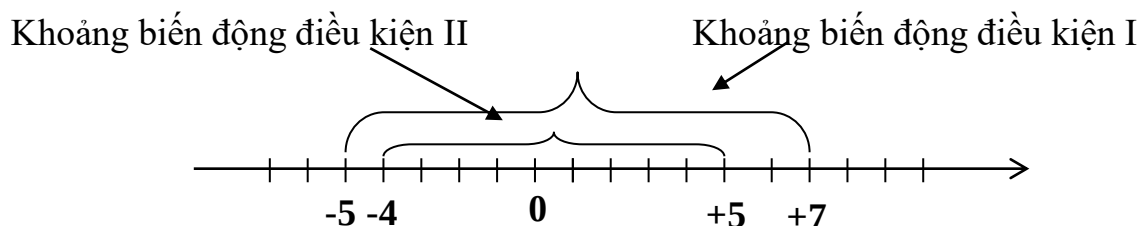
Điều kiện 2: $\Delta: +5'', -4'', -3'', -4''$.

Sai số trung bình:

Điều kiện I: $\theta_I = \frac{5+3+7+1}{4} = 4''$

Điều kiện II: $\theta_{II} = \frac{5+4+3+4}{4} = 4''$

Ta thấy $\theta_I = \theta_{II}$ có nghĩa là ở hai điều kiện đo khác nhau cho độ chính xác như nhau. Với kết quả này ta lầm tưởng là hai kết quả đo ở hai điều kiện đo đạt độ chính xác như nhau, nhưng. Nhưng điều kiện II tốt hơn vì biến động sai số của điều kiện II < điều kiện I (hình 2.1)



1.4.2. Sai số trung phương (m)

Để phản ánh được mức độ dao động của các sai số người ta đã dùng sai số trung phương để đánh giá độ chính xác của các đại lượng đo. Khi có dãy sai số thực, nếu n vô cùng lớn thì sai số trung phương sẽ được tính :

Công thức gần đúng của Gauss:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} \quad (2-6)$$

Trong đó:

Δ là sai số thực: $\Delta_i = L_0 - L_i$ (2.7)

n là số lần đo.

Vậy sai số trung phương (m): Là căn bậc hai của trị trung bình cộng của bình phương các sai số thực thành phần.

Ví dụ: Với số liệu của mục (2.2.1), thay vào (2-6):

$$m_I = \sqrt{\frac{25 + 9 + 49 + 1}{4}} = \pm 4.58$$

$$m_{II} = \sqrt{\frac{25 + 16 + 9 + 16}{4}} = \pm 4.06$$

Từ kết quả trên ta thấy rõ ràng điều kiện II tốt hơn điều kiện I.

1.4.3. Sai số xác suất (r)

Sai số xác suất là trị số nào đó của sai số ngẫu nhiên mà các sai số ngẫu nhiên khác có trị tuyệt đối lớn hơn hoặc nhỏ hơn nó đều có khả năng xuất hiện như nhau. Nếu sắp xếp các sai số ngẫu nhiên theo thứ tự tăng dần thì có thể coi sai số nằm giữa là sai số xác suất.

Bằng lý thuyết xác suất người ta chứng minh được mối quan hệ giữa sai số xác suất và sai số trung phương m:

$$\theta = 0.7979m \approx \frac{4}{5}m \quad (2-8)$$

$$r = 0.6745m \approx \frac{2}{3}m \quad (2-9)$$

1.4.4. Sai số trung phương tương đối

Sai số trung bình, sai số trung phương, sai số giới hạn là những sai số tuyệt đối. Trong đo dài nếu dùng sai số tương đối sẽ phản ánh rõ hơn mức độ chính xác của kết quả đo.

Sai số tương đối là tỷ số giữa sai số đo và giá trị của đại lượng đo. Trong đó tử số luôn nhận là 1 còn mẫu số được làm tròn đến bội số của 10. Mẫu số của sai số tương đối biểu thị cho chất lượng đo đạc, mẫu số càng lớn thì độ chính xác đo càng cao và ngược lại.

$$\frac{1}{T} = \frac{m_L}{L} \quad (2-10)$$

Ví dụ: Đo chiều dài 2 đoạn thẳng bằng thước thép được kết quả như sau:

$$S_1 = 50m; \quad m_{S_1} = \pm 5mm$$

$$S_2 = 250m; \quad m_{s_2} = \pm 5mm$$

Nhìn vào trị số tuyệt đối m_s thì ta tưởng rằng hai cạnh đo với độ chính xác như nhau, nhưng nếu dùng sai số tương đối ta thấy cạnh S_2 có độ chính xác cao hơn.

Sai số trung phương tương đối:

$$\frac{m_{s_1}}{S_1} = \frac{5}{50.000} = \frac{1}{10.000};$$

$$\frac{m_{s_2}}{S_{21}} = \frac{5}{250.000} = \frac{1}{50.000}.$$

1.4.5. Sai số giới hạn

Theo đặc tính thứ nhất của sai số ngẫu nhiên đã nêu rõ: trong điều kiện đo nhất định, trị số tuyệt đối của sai số ngẫu nhiên không vượt quá một giới hạn nhất định.

Như vậy, trong một dãy kết quả đo, trị đo nào có sai số vượt quá giới hạn đó thì trị đo ấy không phù hợp với quy luật và xem như không đảm bảo độ chính xác và không dùng để cải chính vào kết quả đo.

Giá trị sai số giới hạn phụ thuộc chủ yếu vào điều kiện đo. Trong lý thuyết xác suất người ta đã chứng minh được rằng nếu sai số đo phù hợp với quy luật phân phối chuẩn thì có 3% sai số ngẫu nhiên có giá trị lớn hơn 3 lần sai số trung phương, và 5% sai số ngẫu nhiên có giá trị vượt quá 2 lần sai số trung phương.

Trong thực tế số lần đo không nhiều, sai số ngẫu nhiên lớn hơn 3 lần sai số trung phương rất ít có khả năng xuất hiện. Vì vậy ta thường lấy 3 lần sai số trung phương làm giới hạn của sai số ngẫu nhiên.

Gọi $\Delta_{\max}$ là sai số giới hạn, ta có:

$$\Delta_{\max} = 3m \quad (2.11)$$

Trong trắc địa công trình với yêu cầu độ chính xác cao, thường quy định:

$$\Delta_{\max} = 2m \quad (2.12)$$

1.5. Sai số trung phương của hàm các trị đo

Trong các bài toán trắc địa các đại lượng cần xác định thường là hàm số mà đối số là những đại lượng đo trực tiếp. Vì vậy ta cần phải xác định sai số trung phương của hàm các đối số là trị đo trực tiếp độc lập nhau.

Ví dụ: Để xác định các giá số toạ độ ΔX , ΔY ta phải xác định thông qua trị đo cạnh S và góc định hướng α , trong đó góc α lại được xác định thông qua góc β .

1.5.1. Sai số trung phương của hàm số dạng tổng quát

Giả sử ta có hàm số dạng tổng quát như sau:

$$F = f(x, y, \dots, u) \quad (2.13)$$

Trong đó:

$x, y, \dots, u$ là các đại lượng đo độc lập, có sai số trung phương tương ứng là $m_x, m_y, \dots, m_u$. Ta cần xác định sai số trung phương của hàm các trị đo m_f .

Gọi $X, Y, \dots, U$ là trị thực của các đại lượng đo độc lập, các sai số thực tương ứng sẽ là:

$$X = x_i + \Delta x_i \rightarrow \Delta x_i = X - x_i$$

$$Y = y_i + \Delta y_i \rightarrow \Delta y_i = Y - y_i$$

.....

$$U = u_i + \Delta u_i \rightarrow \Delta u_i = U - u_i$$

Sai số thực của hàm: $\Delta F_i = F - f_i$

Hay: $\Delta F_i = F(X, Y, \dots, U) - f_i(x, y, \dots, u)$

Hoặc:

$$\Delta F_i = F(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, \dots, u_i + \Delta u_i) - f(x_i, y_i, \dots, u_i) \quad (2.15)$$

Khai triển Taylor và bỏ qua các số hạng bậc cao bằng cách lấy đạo hàm riêng của hàm số F theo các đối số $x, y, \dots, u$, ta có:

$$\Delta F_i = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Delta x_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \Delta y_i + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) \Delta u_i \quad (2.16)$$

(với $i = 1, 2, \dots, n$)

Bình phương 2 vế (2-16) sau đó lấy tổng từng vế chia cho số lần đo n :

$$\frac{[\Delta F \cdot \Delta F]}{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{[\Delta x \cdot \Delta x]}{n} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{[\Delta y \cdot \Delta y]}{n} + \dots + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \cdot \frac{[\Delta x \cdot \Delta y]}{n} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{[\Delta u \cdot \Delta u]}{n}$$

Theo giả thiết các đại lượng $x, y, \dots, u$ là các đại lượng đo độc lập vì vậy các sai số $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta u$ là các sai số ngẫu nhiên và độc lập. Theo tính chất 4 của sai số ngẫu nhiên và định nghĩa sai số trung phương ta có:

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \cdot m_u^2 \quad (2.17)$$

Hay:

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \cdot m_u^2} \quad (2.18)$$

Ví dụ: Trong tam giác đo 2 góc: $\beta_1 = 50^\circ 00' 00''$; $\beta_2 = 60^\circ 00' 00''$. Với sai số $m_{\beta_1} = \pm 3''$; $m_{\beta_2} = \pm 4''$. Hãy tính: m_{β_3} và β_3 ?

Giải: Ta có: $f = \beta_3 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2) = 70^\circ 00' 00''$

$$\text{Vì } \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right) = 1 \text{ nên } m_{\beta} = \sqrt{m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2} = \sqrt{16 + 9} = \pm 5''$$

1.5.2. Sai số trung phương của một số hàm đơn giản

* Sai số trung phương hàm dạng:

Giả sử có hàm số dạng:

$$F = a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n \quad (2.19)$$

Trong đó:

a_i là các hằng số.

L_i là các đại lượng đo với sai số trung phương là m_i .

Vì phân hàm F trên theo các đối số là các đại lượng đo và chuyển vị phân thành sai số thực ta được:

$$\Delta F = a_1 \Delta L_1 + a_2 \Delta L_2 + \dots + a_n \Delta L_n \quad (2.20)$$

Và chuyển sang sai số trung phương:

$$m_F^2 = a_1^2 m_{L_1}^2 + a_2^2 m_{L_2}^2 + \dots + a_n^2 m_{L_n}^2$$

Hay:

$$m_F = \sqrt{a_1^2 m_{L_1}^2 + a_2^2 m_{L_2}^2 + \dots + a_n^2 m_{L_n}^2} \quad (2.21)$$

Nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$: $\rightarrow m_F^2 = m_{L_1}^2 + m_{L_2}^2 + \dots + m_{L_n}^2$

Nếu đo cùng độ chính xác: $m_{L_1} = m_{L_2} = \dots = m_{L_n} = m_L$ ta có:

$$m_F = m_L \sqrt{n} \quad (2.22)$$

* Sai số trung phương hàm số dạng:

Giả sử hàm số có dạng: $F = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_3}$

Áp dụng công thức tính sai số trung phương hàm tổng quát:

$$m_F^2 = \left(\frac{L_2}{L_3}\right)^2 m_{L_1}^2 + \left(\frac{L_1}{L_3}\right)^2 m_{L_2}^2 + \left(\frac{L_1 L_2}{L_3^2}\right)^2 m_{L_3}^2 \quad (2.23)$$

Khi bài toán vừa là hàm có các trị đo góc vừa có trị đo chiều dài hoặc chênh cao nếu sử dụng công thức hàm tổng quát ta phải biểu thị sai số trung phương đo góc dưới dạng m_β/ρ'' .

Ví dụ: Xác định chênh cao h bằng phương pháp đo cao lượng giác:

$$h = S \cdot \operatorname{tg} V + i - t$$

Với trị đo và sai số trung phương là: $S = 143.5\text{m}$; $V = 2^\circ 30'$; $i = 1.5\text{m}$; $t = 2.2\text{m}$, $m_S = \pm 1'$; $m_i = m_t = 0$ (coi như không có sai số), ta có hàm:

$$h = 143.5 \operatorname{tg} 2^\circ 30' + 1.5 - 2.2 = 5.76\text{m}$$

$$m_h = \sqrt{\operatorname{tg}^2 V \cdot m_S^2 + \frac{S^2}{\cos^4 V} \frac{m_V^2}{\rho^2}} = \pm 0.048\text{m}$$

Ví dụ: Một cách đường chuyền S được đo thành 4 đoạn liên nhau được kết quả như sau:

$$L_1 = 91,24\text{m} \pm 0,20\text{m} ; L_2 = 79,15\text{m} \pm 0,15\text{m}$$

$$L_3 = 102,05\text{m} \pm 0,35\text{m} ; L_4 = 117,35\text{m} \pm 0,18\text{m}.$$

Hãy tính sai số trung phương và sai số trung phương tương đối của cạnh đường chuyền.

- Chiều dài cạnh đường chuyền là :

$$S = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 390.39\text{m}$$

- Sai số trung phương :

$$m_S = \pm \sqrt{m_{L_1}^2 + m_{L_2}^2 + m_{L_3}^2 + m_{L_4}^2} = \pm 0,46\text{m}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{T} = \frac{m_S}{S} = \frac{0,46}{390,39} \approx \frac{1}{800}$$

1.5. 3. Công thức Fererô

Dùng để tính sai số trung phương đo góc m_β của lưới gồm n tam giác theo sai số khép góc w_β của tam giác.

Nếu các góc A_i, B_i, C_i đo cùng độ chính xác m_β và tổng trị thực: $(A_0 + B_0 + C_0) = 180^\circ$ thì ta có sai số khép là sai số thực Δ_i :

$$\omega_{\beta i} = \Delta_i = (A_i + B_i + C_i) - 180^\circ \quad (2.32)$$

Theo định nghĩa sai số trung phương, nếu có n tam giác thì sai số trung phương của sai số khép góc là:

$$m_\omega = \pm \sqrt{\frac{[\omega_\beta \omega_\beta]}{n}}$$

Vì các góc đo cùng độ chính xác $m_{A_i} = m_{B_i} = m_{C_i} = m_\beta$, nên ta có:

$$m_\omega^2 = m_{A_i}^2 + m_{B_i}^2 + m_{C_i}^2 = 3 \cdot m_\beta^2 \quad (2.33)$$

$$m_\omega^2 = 3m_\beta^2 = \frac{[\omega_\beta \omega_\beta]}{n}$$

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{[\omega_\beta \omega_\beta]}{3n}}$$

Trong đó: n - là số tam giác.

$w_{\beta i}$ - là sai số khép góc trong tam giác.

Ví dụ: Đo tất cả các góc của lưới 12 tam giác cùng độ chính xác, tính được các sai số khép góc tương ứng là $\omega_1=8''$; $\omega_2=-6''$; $\omega_3=4''$; $\omega_4=-2''$; $\omega_5=-7''$; $\omega_6=8''$; $\omega_7=-8''$; $\omega_8=3''$; $\omega_9=2''$; $\omega_{10}=9''$; $\omega_{11}=-1''$; $\omega_{12}=3''$. Độ chính xác đo góc trong lưới tam giác này là $m_\beta=\pm 3.3''$

1.6. Trọng số

1.6.1. Khái niệm về trọng số

Khi đo không cùng độ chính xác một đại lượng thì kết quả nhận được sẽ có tầm quan trọng khác nhau và không thể tính trị trung bình cộng theo phương pháp thông thường được. Để bình sai các đại lượng không cùng độ chính xác, người ta đưa vào một con số hỗ trợ gọi là trọng số để nêu lên chất lượng khác nhau của kết quả đo, tức là nêu lên mức độ tin cậy khác nhau của các kết quả đo có độ chính xác khác nhau.

**Định nghĩa trọng số:*

Trọng số là một số tỷ lệ nghịch với bình phương của sai số trung phương.

$$P_L = \frac{c}{m_L^2} \quad (2.48)$$

Trong đó: $+ m_L$ là sai số trung phương của trị đo.

$+ c$ là hằng số được chọn thống nhất cho tất cả các phép đo tham gia bình sai.

Ta thấy rằng P_L và m_L^2 là quan hệ tỷ lệ nghịch, tức là sai số trung phương càng nhỏ thì trọng số càng lớn và ngược lại. Người ta có thể dùng P_L để so sánh độ chính xác giữa các trị đo.

**Trọng số đơn vị:*

Nếu ta có n phép đo với sai số trung phương tương ứng là $m_1, m_2, \dots, m_n$. Theo định nghĩa trọng số, ta có:

$$P_1 = \frac{c}{m_1^2}; P_2 = \frac{c}{m_2^2}; \dots, P_n = \frac{c}{m_n^2} \quad (2.49)$$

Nếu ta chọn $c = m_0^2$ thì ta có các trọng số:

$$P_0 = \frac{m_0^2}{m_0^2}; P_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2}; P_2 = \frac{m_0^2}{m_2^2}; \dots, P_n = \frac{m_0^2}{m_n^2}$$

$P_0 = 1$ gọi là trọng số đơn vị.

Sai số trung phương tương ứng với trọng số $P_0 = 1$ gọi là sai số trung phương trọng số đơn vị. Nếu kí hiệu $m_0 = \mu$, ta có:

$$P_L = \frac{\mu^2}{m_L^2} \quad (2.50)$$

Vai trò của μ và P rất quan trọng khi xử lý bài toán trắc địa hỗn hợp có nhiều trị đo không cùng độ chính xác.

Ví dụ: Cạnh S được đo bằng 3 phương pháp khác nhau không cùng độ chính xác, nhận được kết quả và sai số trung phương như sau:

$$P_1 = \left(\frac{0.12}{0.3}\right)^2 = 0.16$$

$$P_2 = 0.16$$

$$P_3 = \left(\frac{0.12}{0.18}\right)^2 = 0.44$$

TT	S_i	m_i	P_i
1	48.38	0.3	0.16
2	48.28	0.12	1
3	48.29	0.18	0.44

1.6.2. Trị trung bình mang trọng số

Giả sử có một đại lượng được đo n lần nhận được kết quả là: $L_1, L_2, \dots, L_n$ với trọng số tương ứng là $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Trị trung bình của đại lượng trên được tính theo công thức:

$$\bar{L} = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + \dots + P_n L_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{[PL]}{[P]} \quad (2.51)$$

**Sai số trung phương của trị trung bình mang trọng số:*

Từ công thức (2.33), để đánh giá độ chính xác ta dùng công thức sau:

$$m_L = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} \quad (2.52)$$

Trong đó sai số trung phương trọng số đơn vị tính theo công thức Bessen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[PVV]}{(n-1)}} \quad (2.53)$$

1.7. Đánh giá độ chính xác theo các trị đo kép

1.7.1. Sai số trung phương theo các hiệu của kết quả đo kép không cùng độ chính xác.

Giả sử đại lượng X_i được tiến hành đo 2 lần ta nhận được cặp trị số là $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$; $L''_1, L''_2, \dots, L''_n$. Trọng số tương ứng là $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Giả thiết trị đo chỉ chứa sai số ngẫu nhiên thì sai số của $L'_i; L''_i$ lần lượt là:

$$\Delta'_i = X - L'_i$$

$$\Delta''_i = X - L''_i$$

Số chênh giữa cặp trị đo là:

$$d_i = L'_i - L''_i = \Delta''_i - \Delta'_i \quad (a)$$

Nếu 2 trị đo đều chính xác thì $d_i=0$ tức là trị số thật của d_i là 0. Do đó sai số thật của số chênh d_i là:

$$\Delta d_i = 0 - d_i = -d_i = \Delta'_i - \Delta''_i \quad (a')$$

Trọng số của các hiệu là:

$$P_{di} = \frac{P_i}{2} \Rightarrow \frac{1}{P_{di}} = \frac{2}{P_i} \quad (b)$$

Theo công thức tính sai số trung phương tương ứng với trọng số đơn vị, ta có:

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_d \Delta d \Delta d]}{n}} \quad (c)$$

Thay (a), (b) vào (c) ta có:

$$\mu = \sqrt{\frac{[Pdd]}{2n}}$$

Đối với trị số là sai số trung bình cộng từ 2 lần đo của 1 cặp thì sai số trung phương đơn vị trọng số là: $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[Pdd]}{n}}$

1.7.2. Tính sai số trung phương từ hiệu các cặp đo kép trong trường hợp đo có độ chính xác đều nhau.

Trường hợp độ chính xác giữa các trị đo trong các cặp đều nhau thì chọn trọng số của mỗi lần đo là 1. Lúc đó sai số trung phương tương ứng với trọng số đơn vị cũng chính là sai số trung phương của trị đo. Ta có:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$$

VD: Trên 1 tuyến độ cao chia 5 đoạn đo, mỗi đoạn đo 2 lần và được kết quả sau.

Tính sai số trung phương của hiệu số độ cao toàn tuyến

Đoạn đo	Hiệu số độ cao		d = h' - h''	dd	S _i	$P_{dd} = \frac{dd}{S}$
	h'(m)	h''(m)	(mm)		(Km)	
1	3.248	3.240	8	64	4.0	16.0
2	0.348	0.336	-8	64	3.2	20.0
3	4.444	4.437	7	49	2.0	24.5
4	-3.360	-3.352	-8	64	2.6	24.6
5	-3.699	-3.704	5	25	3.4	7.4
					15.2	92.5

$$\text{Chọn } P_i = \frac{1}{S_i}$$

$$\text{Có } \mu = m_{1km} = \pm \sqrt{\frac{dd}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{92.5}{10}} = \pm 3.06 \text{ mm}$$

Sai số trung phương của hiệu số độ cao đoạn 2 đo 1 lần là:

$$m_2 = \sqrt{S_2} \cdot m_{km} = \sqrt{3,2.3,6} = \pm 5,4 \text{ mm}$$

Sai số trung phương của hiệu số độ cao trung bình của đoạn 2:

$$m_{2TB} = \frac{m_2}{\sqrt{2}} = \frac{5.4}{\sqrt{2}} = \pm 3.8 (\text{mm})$$

Chiều dài toàn tuyến $[S] = 15,2 \text{ km}$

Sai số trung phương của hiệu số độ cao toàn tuyến là:

$$m_t = m_{km} \sqrt{[S]} = 3,06 \sqrt{15,2} = \pm 11,9 (\text{mm})$$

Sai số trung phương của hiệu số độ cao trung bình tuyến:

$$m_{tb} = \frac{m_t}{\sqrt{2}} = \pm 8.4 (\text{mm}).$$

1.8 Nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau trong tính toán trắc địa

1. Khái niệm chung :

Dựa vào lý thuyết sai số ta có thể tính được sai số trung phương của bất kỳ hàm số nào khi đã biết sai số trung phương của các đối số.

Trong trắc địa dựa vào nguyên tắc này khi tiến hành công tác thiết kế thường gặp bài toán ngược, tức là cần ước tính độ chính xác của đối số để có thể đảm bảo độ chính xác đã cho trước của hàm số.

2. Thiết lập công thức ước tính độ chính xác của các đối số :

Giả sử ta có hàm số ở dạng :

$$F = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

Trong đó : $L_1, L_2, \dots, L_n$ là các trị đo độc lập

$m_{L_1}, m_{L_2}, \dots, m_{L_n}$ là các sai số trung phương tương ứng của trị đo

áp dụng công thức tính sai số trung phương của hàm tổng quát ta có :

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1} \right)^2 m_{L_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_2} \right)^2 m_{L_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n} \right)^2 m_{L_n}^2$$

Ta cần ước tính độ chính xác của các đại lượng đo $L_1, L_2, \dots, L_n$ sao cho độ chính xác của hàm F đạt được yêu cầu đã đặt ra. Tức là phải tính $m_{L_1}, m_{L_2}, \dots, m_{L_n}$ sao cho thỏa mãn m_F cho trước.

Để giải quyết vấn đề này ta áp dụng nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau nghĩa là cho ảnh hưởng sai số của các đại lượng đo L_i đối với sai số trung phương của hàm đều bằng nhau. Tức là :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial L_1} \right)^2 m_{L_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L_2} \right)^2 m_{L_2}^2 = \dots = \left(\frac{\partial f}{\partial L_n} \right)^2 m_{L_n}^2 = \frac{m_F^2}{n}$$

$$\text{Hay } \left| \frac{\partial f}{\partial L_1} \right| m_{L_1} = \left| \frac{\partial f}{\partial L_2} \right| m_{L_2} = \dots = \left| \frac{m_F}{\sqrt{n}} \right|$$

$$\Rightarrow m_{L_i} = \frac{m_F}{f_i \sqrt{n}} \quad \text{với} \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial L}$$

VD: Cần phải đo khoảng cách $S = 120\text{m}$ và góc đứng 4° với độ chính xác bao nhiêu để độ chênh cao h tính theo công thức : $h = S \cdot \text{tg} v$ có SSTP là $m_h = \pm 4.0^{\text{mm}}$

Giải :

$$\text{Có } \frac{\partial h}{\partial S} = \text{tg} v$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{S}{\cos^2 v}$$

$$m_h^2 = \text{tg}^2 v \cdot m_s^2 + \left(\frac{S}{\cos^2 v} \right)^2 \cdot \frac{m_v^2}{\rho''^2}$$

Theo nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau thì :

$$\text{tg}^2 v \cdot m_s^2 = \left(\frac{S}{\cos^2 v} \right)^2 \cdot \frac{m_v^2}{\rho''^2} = \frac{m_h^2}{2}$$

$$\Rightarrow m_s^2 = \frac{m_h^2}{2 \text{tg}^2 v} \rightarrow m_s = \frac{m_h}{\sqrt{2} \cdot \text{tg} v}$$

$$m_v^2 = \frac{\cos^4 v \cdot m_h^2}{2s^2} \rho''^2 \Rightarrow m_v = \frac{\cos^2 v \cdot m_h}{\sqrt{2} \cdot s} \rho''$$

Thay số vào ta được : $m_s = \pm 40^{\text{cm}}$

$$m_v = \pm 0.81$$

Khi áp dụng nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau ta cần kết hợp giải quyết cùng các yêu cầu về kỹ thuật và kinh tế sao cho đảm bảo độ chính xác và đạt hiệu quả kinh tế nhất. Trường hợp yêu cầu kỹ thuật đảm bảo và phương án nêu ra đạt hiệu quả về kinh tế thì áp dụng nguyên tắc ảnh hưởng bằng nhau là tiện lợi nhất. Trường hợp sau khi ước tính, thấy các phương tiện kỹ thuật không đảm bảo yêu cầu độ chính xác của một đại lượng nào đó hoặc có thể đảm bảo được nhưng không kinh tế thì cần giải quyết bằng cách hạ thấp độ chính xác của các đại lượng đó để đo đạc được dễ dàng hơn, đồng thời tăng độ chính xác của đại lượng khác để cuối cùng đảm bảo được độ chính xác của hàm đặt ra.

1.9 Sai số làm tròn

1.9.1 Một số quy tắc làm tròn số

Trong trắc địa các kết quả đo và kết quả xử lý là những số viết dưới dạng các chữ số thập phân. Tùy thuộc vào yêu cầu độ chính xác, mà người ta thường cắt bỏ những chữ số thập phân cuối theo nguyên tắc làm tròn số.

Khi làm tròn phải theo các quy tắc sau :

- Nếu phần bỏ đi nhỏ hơn 0,5 đơn vị của chữ số cuối cùng được giữ lại, thì chữ số cuối cùng vẫn giữ nguyên.
- Nếu phần bỏ đi lớn hơn 0,5 đơn vị của chữ số cuối cùng được giữ lại, thì phải thêm vào chữ số cuối cùng ấy 1 đơn vị.
- Nếu phần bỏ đi vừa đúng bằng 0,5 đơn vị của chữ số cuối cùng được giữ lại mà chữ số cuối cùng ấy là số lẻ thì được thêm 1 đơn vị để thành số chẵn.

1.9.2 Ví dụ làm tròn số

Cần làm tròn đến milimét một chiều dài cạnh AB, theo các kết quả đo như sau:

SAB(1) = 2,7374 m, theo quy tắc 1, kết quả sau khi làm tròn là : 2,737

SAB(2) = 2,7376 m, theo quy tắc 2, kết quả sau khi làm tròn là : 2,738

SAB(3) = 2,7375 m, theo quy tắc 1, kết quả sau khi làm tròn là : 2,738

1.9.3. Quan hệ giữa sai số trung phương tính tròn và sai số giới hạn tính tròn :

Để tìm quan hệ giữa sai số làm tròn giới hạn và sai số trung phương của sai số làm tròn, ta giả thiết sai số làm tròn giới hạn là α được chia thành n phần bằng nhau e , nghĩa là $\alpha = n.e$ và trong khoảng $(-\alpha, \alpha)$ sai số làm tròn có thể nhận 1 trong các khả năng là:

$-n.e, -(n-1).e, \dots, -2e, -e, 0, e, 2e, \dots, (n-1)e, n.e$

Vì số khả năng có thể xảy ra của sai số làm tròn $\varepsilon(-\alpha, \alpha)$ là $(2n+1)$ nên sai số trung phương của sai số làm tròn có dạng :

$$m_{lt} = \sqrt{\frac{2(e^2 + 4e^2 + \dots + (ne)^2)}{2n+1}} = e \cdot \sqrt{\frac{2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{2n+1}} = e \cdot \sqrt{\frac{2.n(n+1)(2n+1)/6}{2n+1}} = e \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}$$

$$\text{mà } e = \frac{\alpha}{n} \quad m_{lt} = \alpha \sqrt{\frac{n+1}{3n}}$$

$$\text{khi } n \text{ lớn ta có : } m_{lt} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Đây chính là quan hệ giữa sai số trung phương tính tròn hoặc sai số giới hạn tính tròn.

1.10 Bình sai trực tiếp

Bình sai trực tiếp là trường hợp đặc biệt của bình sai gián tiếp. Bản chất của phương pháp là tiến hành đo nhiều lần cùng một đại lượng là nhận được nhiều trị đo, có thể là cùng độ chính xác hoặc không cùng độ chính xác. Nhiệm vụ đặt ra là tiến hành bình sai như thế nào để tìm ra trị xác suất nhất của các trị đo và đánh giá độ chính xác của các trị đo cũng như trị sau bình sai.

1.10.1 Nguyên tắc số bình phương nhỏ nhất

Dựa trên cơ sở của lý thuyết xác suất, người ta đã chứng minh được rằng trong trường hợp đo cùng độ chính xác, để nhận được các trị sau bình sai có độ tin cậy lớn nhất nghĩa là xấp xỉ với trị thực thì tổng bình phương vi phải thỏa mãn điều kiện:

$$[vv] = \min$$

Trong trường hợp trị đo không cùng độ chính xác thì:

$$[pvv] = \min$$

Các điều kiện trên chính là nguyên tắc số bình phương nhỏ nhất.

Nếu trong kết quả đo chỉ bao gồm các sai số ngẫu nhiên thì chúng tuân theo luật phân bố chuẩn và những trị sau bình sai theo nguyên tắc số bình phương nhỏ nhất sẽ là những giá trị xác suất nhất và là trị trung bình cộng. Để chứng minh trị trung bình cộng là trị xác suất nhất ta giả thiết rằng trị xác suất nhất của một đại lượng nào đó là x . Các trị đo lần lượt là: $L_1, L_2, \dots, L_n$. Chênh lệch giữa trị xác suất nhất và trị đo là V_i , ta có:

$$V_1 = x - L_1$$

$$V_2 = x - L_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$V_n = x - L_n$$

Nếu chúng ta sử dụng các trị x khác nhau, thì sẽ nhận được một nhóm v khác nhau. Bây giờ chúng ta dựa vào nguyên lý bình phương nhỏ nhất để tìm một giá trị xác suất nhất x sao cho tổng bình phương các số chênh giữa x và trị đo là nhỏ nhất. Tức là:

$$[VV] = (V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2) = \min.$$

Để tìm giá trị cực tiểu của hàm trên, ta viết lại quan hệ giữa $[VV]$ và x , tức là:

$$[VV] = (x - L_1)^2 + (x - L_2)^2 + \dots + (x - L_n)^2 = \min = f$$

Lấy đạo hàm bậc nhất đối với biến số x và cho bằng 0, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - L_1) + 2(x - L_2) + \dots + 2(x - L_n) = 0$$

Từ đó ta nhận được: $n.x - [L] = 0$

$$\text{và} \quad x = \frac{[L]}{n}$$

Vì đạo hàm bậc hai dương, tức là: $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 2n > 0$

Nên giá trị x tìm được theo công thức (2-5) thỏa mãn điều kiện $[vv] = \min$. Do đó x tìm được theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất cũng chính là trị trung bình cộng.

1.10.2 Bình sai trực tiếp khi đo cùng độ chính xác

1.10.2.1 Trị trung bình cộng và sai số trung phương của trị trung bình cộng

1. Trị trung bình cộng

Khi tiến hành đo một đại lượng nhiều lần cùng độ chính xác khi số lần đo tăng lên vô hạn thì trị trung bình cộng của các trị đo rất gần với trị thực. Cho nên trong bình sai trực tiếp cùng độ chính xác, trị trung bình cộng được coi là trị xác suất nhất. Đây

chính là nguyên lý của trị trung bình cộng. Nguyên lý này có thể dựa vào đặc tính thứ tư của sai số ngẫu nhiên để chứng minh.

Giả sử đo một đại lượng n lần nhận được kết quả là $L_1, L_2, \dots, L_n$. Những trị số này được đo trong cùng 1 điều kiện và có sai số thực lần lượt là $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Trị thực của của đại lượng đo là X . Theo định nghĩa về sai số thực ta có :

$$\Delta_1 = L_1 - X$$

$$\Delta_2 = L_2 - X$$

.....

$$\Delta_n = L_n - X$$

Lấy tổng ta được :

$$[\Delta] = [L] - n.X$$

Chia 2 vế cho n ta được:

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[L]}{n} - X \quad (2.1.1)$$

Trong đó $\frac{[\Delta]}{n}$ là sự chênh lệch giữa trị trung bình cộng và trị thực được gọi là sai số thực của trị trung bình cộng.

Theo tính chất của sai số ngẫu nhiên ta có :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0$$

Đặt $\frac{[L]}{n} = x$ thay vào (2.1.2) ta được

$$x = \lim_{x \rightarrow \infty} x$$

Ta thấy khi số lần đo tăng lên vô hạn thì trị trung bình cộng x sẽ xấp xỉ với trị thật X . Nhưng trong thực tế không thể tiến hành đo vô hạn lần được. Vì vậy, người ta gọi trị trung bình cộng là trị số đáng tin cậy nhất của đại lượng đo và ta lấy nó làm kết quả đo đạc. Đó chính là nguyên tắc số trung bình cộng và là cơ sở cho bình sai trực tiếp.

Khi tính trị trung bình cộng theo (2.1.1) nhiều khi phức tạp trong việc tính toán khi các trị số L và n lớn. Để tiện cho tính toán ta lấy trị số gần đúng L_0 để tính ra lượng sai ε

$$\varepsilon_i = L_i - L_0 \text{ hay } L_i = L_0 + \varepsilon$$

Nếu đo n lần ta được :

$$L_1 = L_0 + \varepsilon_1$$

$$L_2 = L_0 + \varepsilon_2$$

.....

Lấy tổng : $[L] = n.L_0 + [\varepsilon]$

$$\text{Hay } \frac{[L]}{n} = L_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = x \quad (2.1.2)$$

2. Sai số trung phương của trị trung bình cộng

Để xác định sai số trung phương của trị trung bình cộng ta xét công thức :

$$\bar{x} = \frac{[\bar{L}]}{n} = \frac{1}{n} L_1 + \frac{1}{n} L_2 + \dots + \frac{1}{n} L_n$$

Vì các trị đo đều cùng độ chính xác và đều có sai số trung phương là m nên sai số trung phương của trị trung bình cộng sẽ là:

$$M_x^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2$$

$$\text{Hay } M_x^2 = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 = \frac{m^2}{n} \quad \text{Vậy } M_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (2.3.1)$$

Tức là sai số trung phương của trị trung bình cộng bằng $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sai số trung phương của trị đo.

Từ (2.3.1) ta thấy khi xét trong điều kiện m không đổi thì n càng lớn M_x càng nhỏ, độ chính xác của trị trung bình cộng được nâng cao.

Ví dụ:

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
M_x	1	0.71	0.58	0.05	0.45	0.41	0.35	0.32	0.22	0.14	0.10

Nhưng ta thấy khi số lần đo tăng lên từ 20 ÷ 100 thì độ chính xác cũng chỉ tăng lên có 2 lần, như vậy là không kinh tế. Vì vậy muốn nâng cao độ chính xác của kết quả đo không chỉ đơn giản là tăng số lần lên là đạt được mục đích mà phải tìm biện pháp nâng cao độ chính xác đo ngắ, tức là phải chọn điều kiện đo, phương pháp, máy móc và số lần đo thích hợp.

1.10.2.2 Sai số trung phương của trị đo

Chúng ta đã biết công thức tính sai số của trị đo theo sai số thật là:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

Vì trị thật X thường không biết nên sai số thật Δ cũng không thể biết được. Do đó, công thức này trong thực tế ít được ứng dụng. Khi biết 1 dãy các trị đo L_i ta sẽ tính được trị xác suất nhất x của chúng, do đó dễ dàng tìm được số hiệu chỉnh V_i tức là:

$$V_i = x - L_i \quad (2.4.1)$$

Ta muốn thành lập công thức tính sai số trung phương của trị đo theo số hiệu chỉnh V_i thì phải tìm quan hệ giữa Δ và V .

Theo công thức tính sai số thực ta có :

$$\Delta_i = X - L_i \quad (2.4.2)$$

Lấy (2.4.2) - (2.4.1) ta được :

$$\Delta_i - V_i = X - x.$$

Mà $X - x = \delta_{TB}$ là sai số thật của trị trung bình, nên ta có :

$$\Delta_i - V_i = \delta_{TB} \text{ hay } \Delta_i = V_i + \delta_{TB}$$

Bình phương hai vế rồi lấy tổng ta được :

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[VV]}{n} + \frac{2\delta[V]}{n} + \delta^2 \quad (2.4.3)$$

Ta lại có : $\frac{[\Delta\Delta]}{n} = m^2$

$$\delta = \frac{[\Delta]}{n} \text{ bình phương ta được : } \delta_{TB}^2 = \frac{1}{n^2} ([\Delta^2] + 2[\Delta_i \Delta_j])$$

Vì tích của 2 số ngẫu nhiên vẫn là sai số ngẫu nhiên nên ta coi $[\Delta_i \Delta_j] = 0$.

Theo bài trước $[V] = 0$.

Thay vào (2.4.3) ta được :

$$m^2 = \frac{[VV]}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Hay $m = \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$

Đây chính là công thức tính sai số trung phương của trị đo theo số hiệu chỉnh v_i và gọi là công thức Bessen.

1.10.2.3. Trình tự bài toán bình sai trực tiếp cùng độ chính xác

- **Tính trị xác suất nhất (trị trung bình cộng) của các trị đo**

$$x = \frac{[L]}{n}$$

Vì số chênh giữa các L_i tương đối nhỏ, nên khi tính trị trung bình cộng chỉ cần tính trị trung bình của các số chênh đó nghĩa là ta chọn một trị gần đúng L_0 rồi lần lượt lấy các trị đo L_i trừ đi L_0 ta sẽ được các số chênh lệch ε_i

$$\varepsilon_i = L_i - L_0$$

Khi đó trị xác suất nhất sẽ được tính:

$$x = L_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

- **Tính sai số trung phương của trị đo theo công thức Bessen**

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

- **Ghi kết quả cuối cùng**

$$X = x \pm M_x$$

Các bước kiểm tra trong quá trình tính toán :

$$[V] = 0$$

$$[VV] = V_1(x-L_1) + V_2(x-L_2) + \dots + V_n(x-L_n)$$