

ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH ĐỒNG THÁP  
TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỘNG ĐỒNG ĐỒNG THÁP



**GIÁO TRÌNH**

MÔN HỌC: TOÁN RỜI RẠC

NGÀNH, NGHỀ: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

TRÌNH ĐỘ: CAO ĐẲNG

(Ban hành kèm theo Quyết định số      /QĐ-CDCTD ngày      tháng      năm 20...  
của Hiệu trưởng trường Cao đẳng Cộng đồng Đồng Tháp)

Đồng Tháp, năm 2017

## MỤC LỤC

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| CHƯƠNG 1: ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ.....                                            | 1  |
| 1. PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ.....                                                | 1  |
| 1.1. MỆNH ĐỀ.....                                                        | 1  |
| 1.1.1. Khái niệm mệnh đề.....                                            | 1  |
| 1.1.2. Phân loại mệnh đề: gồm 2 loại.....                                | 1  |
| 1.2. BẢNG CHÂN TRỊ.....                                                  | 2  |
| 1.3. CÁC PHÉP TOÁN VỀ MỆNH ĐỀ.....                                       | 2  |
| 1.3.1. Phép phủ định.....                                                | 2  |
| 1.3.2. Phép hội (phép nối liền, giao).....                               | 3  |
| 1.3.3. Phép tuyển (phép nối rời, hợp).....                               | 4  |
| 1.3.4. Phép kéo theo (mệnh đề có điều kiện).....                         | 5  |
| 1.3.5. Phép kéo theo hai chiều (Phép tương đương).....                   | 5  |
| 2. CÁC TÍNH CHẤT.....                                                    | 5  |
| 2.1. BIỂU THỨC LOGIC (DẠNG MỆNH ĐỀ).....                                 | 5  |
| 2.1.1. Định nghĩa.....                                                   | 5  |
| 2.1.2. Một số tính chất.....                                             | 7  |
| 3. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP SUY LUẬN.....                                      | 10 |
| 3.1. QUY TẮC KHĂNG ĐỊNH (MODUS PONENS).....                              | 11 |
| 3.2. QUY TẮC PHỦ ĐỊNH (MODUS TOLLENS).....                               | 11 |
| 3.3. TAM ĐOẠN LUẬN (SYLLOGISM).....                                      | 12 |
| 3.4. QUY TẮC MÂU THUẬN (CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG).....                 | 13 |
| 3.5. QUY TẮC CHỨNG MINH THEO TRƯỜNG HỢP.....                             | 13 |
| 3.6. PHẢN VÍ DỤ.....                                                     | 14 |
| 3.7. MỘT VÀI VÍ DỤ CỤ THỂ CÓ SỬ DỤNG KẾT HỢP NHIỀU QUY TẮC SUY DIỄN..... | 14 |
| 4. VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ.....                                                | 16 |
| 4.1. VỊ TỪ.....                                                          | 16 |
| 4.1.1. Định nghĩa.....                                                   | 16 |
| 4.1.2. Các phép toán trên vị từ.....                                     | 16 |
| 4.2. LƯỢNG TỪ.....                                                       | 16 |
| 4.3. LƯỢNG TỪ HÓA VỊ TỪ HAI BIẾN.....                                    | 17 |
| 4.4. PHỦ ĐỊNH MỆNH ĐỀ LƯỢNG TỪ.....                                      | 18 |
| BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 1.....                                             | 20 |
| CHƯƠNG 2: PHÉP ĐẾM.....                                                  | 23 |
| 1. TẬP HỢP.....                                                          | 23 |
| 1.1. KHÁI NIỆM.....                                                      | 23 |
| 1.1.1. Khái niệm tập hợp.....                                            | 23 |
| 1.1.2. Biểu diễn tập hợp.....                                            | 23 |
| 1.1.3. Một số dạng tập hợp.....                                          | 24 |
| 1.2. TẬP HỢP CON, TẬP HỢP BẰNG NHAU.....                                 | 24 |
| 1.2.1. Tập hợp con.....                                                  | 24 |
| 1.2.2. Tập hợp bằng nhau.....                                            | 25 |
| 1.3. CÁC PHÉP TOÁN.....                                                  | 25 |
| 1.3.1. Phép hợp.....                                                     | 25 |
| 1.3.2. Phép giao.....                                                    | 25 |

|        |                                                      |    |
|--------|------------------------------------------------------|----|
| 1.3.3. | Phép hiệu.....                                       | 26 |
| 1.4.   | CÁC TÍNH CHẤT.....                                   | 27 |
| 1.4.1. | Tính chất .....                                      | 27 |
| 1.4.2. | Lực lượng của tập hợp .....                          | 27 |
| 1.4.3. | Tích Descartes của tập hợp và lực lượng của nó ..... | 28 |
| 1.4.4. | Biểu diễn các tập hợp trên máy tính .....            | 28 |
| 2.     | ÁNH XẠ .....                                         | 30 |
| 2.1.   | ĐỊNH NGHĨA .....                                     | 30 |
| 2.2.   | ĐƠN ÁNH, TOÀN ÁNH VÀ SONG ÁNH.....                   | 31 |
| 2.3.   | ÁNH VÀ ẢNH NGƯỢC CỦA MỘT TẬP HỢP .....               | 32 |
| 2.3.1. | Định nghĩa 1.....                                    | 32 |
| 2.3.2. | Định nghĩa 2.....                                    | 33 |
| 2.3.3. | Ánh xạ hợp.....                                      | 33 |
| 2.3.4. | Các tính chất của ánh xạ .....                       | 34 |
| 3.     | PHÉP ĐẾM.....                                        | 34 |
| 3.1.   | QUY TẮC ĐẾM.....                                     | 34 |
| 3.1.1. | Nguyên lý cộng.....                                  | 34 |
| 3.1.2. | Nguyên lý nhân.....                                  | 35 |
| 3.1.3. | Nguyên lý bù trừ .....                               | 37 |
| 3.1.4. | Nguyên lý chuồng bồ câu (Nguyên lý Dirichlet) .....  | 38 |
| 3.2.   | GIẢI TÍCH TỔ HỢP .....                               | 39 |
| 3.2.1. | Hoán vị.....                                         | 39 |
| 3.2.2. | Chỉnh hợp.....                                       | 40 |
| 3.2.3. | Tổ hợp .....                                         | 41 |
| 3.2.4. | Hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp.....        | 42 |
| 3.2.5. | Công thức nhị thức Newton.....                       | 43 |
|        | BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 2 .....                        | 46 |
|        | CHƯƠNG 3 ĐẠI SỐ QUAN HỆ .....                        | 50 |
| 1.     | QUAN HỆ.....                                         | 50 |
| 1.1.   | ĐỊNH NGHĨA .....                                     | 50 |
| 1.2.   | CÁC TÍNH CHẤT.....                                   | 51 |
| 1.2.1. | Tính phản xạ .....                                   | 51 |
| 1.2.2. | Tính đối xứng.....                                   | 52 |
| 1.2.3. | Tính bắc cầu (truyền).....                           | 52 |
| 2.     | QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG.....                             | 53 |
| 2.1.   | ĐỊNH NGHĨA .....                                     | 53 |
| 2.2.   | LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG.....                                 | 54 |
| 2.2.1. | Định nghĩa.....                                      | 54 |
| 2.2.2. | Định lý .....                                        | 55 |
| 3.     | QUAN HỆ THỨ TỰ.....                                  | 55 |
| 3.1.   | CÁC ĐỊNH NGHĨA .....                                 | 55 |
| 3.2.   | THỨ TỰ TOÀN PHẦN VÀ BÁN PHẦN .....                   | 56 |
| 3.3.   | PHẦN TỬ LỚN NHẤT, PHẦN TỬ NHỎ NHẤT .....             | 57 |
| 3.4.   | PHẦN TỬ TỐI ĐẠI, PHẦN TỬ TỐI TIỂU .....              | 57 |
| 3.5.   | BIỂU ĐỒ HASSE .....                                  | 58 |
| 3.6.   | TẬP THỨ TỰ TỐT .....                                 | 59 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4. NGÔN NGỮ TRUY VẤN DỮ LIỆU .....                                              | 59  |
| 4.1. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP.....                                                 | 60  |
| 4.2. CÁC PHÉP TOÁN QUAN HỆ .....                                                | 62  |
| BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 3 .....                                                   | 64  |
| CHƯƠNG 4 ĐẠI SỐ BOOLE .....                                                     | 66  |
| 1. ĐẠI SỐ BOOLE .....                                                           | 66  |
| 1.1. ĐỊNH NGHĨA .....                                                           | 66  |
| 1.2. TÍNH CHẤT .....                                                            | 68  |
| 1.2.1. Các hằng đẳng thức của đại số Boole.....                                 | 68  |
| 1.2.2. Tính đối ngẫu của đại số Boole .....                                     | 69  |
| 1.3. ĐỊNH LÝ .....                                                              | 70  |
| 1.4. CÁC MỆNH ĐỀ.....                                                           | 71  |
| 1.4.1. Định nghĩa.....                                                          | 72  |
| 1.4.2. Mệnh đề .....                                                            | 72  |
| 2. HÀM BOOLE .....                                                              | 72  |
| 3. DẠNG NÓI RỜI CHÍNH TẮC .....                                                 | 74  |
| 3.1. MỆNH ĐỀ.....                                                               | 74  |
| 3.2. DẠNG NÓI RỜI CHÍNH TẮC .....                                               | 75  |
| 3.2.1. Các khái niệm .....                                                      | 75  |
| 3.2.2. Cách tìm dạng nổi rời chính tắc cho hàm Boole .....                      | 75  |
| 4. BÀI TOÁN MẠCH ĐIỆN .....                                                     | 77  |
| 5. MẠNG CÁC CÔNG .....                                                          | 78  |
| 5.1. CÁC CÔNG ĐIỆN TỬ CƠ BẢN.....                                               | 79  |
| 5.2. CÔNG NOR VÀ NAND .....                                                     | 83  |
| 6. ƯỚC LƯỢNG CÔNG THỨC .....                                                    | 83  |
| 6.1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ.....                                           | 84  |
| 6.2. PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH.....                                          | 85  |
| 6.2.1. Biểu đồ Karnaugh của một hàm Boole f .....                               | 85  |
| 6.2.2. Tế bào và tế bào lớn.....                                                | 88  |
| 6.2.3. Phương pháp Karnaugh tìm công thức đa thức tối thiểu của hàm Boole ..... | 93  |
| BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG 4 .....                                                   | 99  |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO.....                                                         | 102 |

## CHƯƠNG 1: ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

### ▪ Giới thiệu

Trong chương này sẽ giới thiệu về mệnh đề, biểu thức mệnh đề, các phép toán, ví dụ ứng dụng, giới thiệu một số thuật ngữ chuyên dùng, tương đương logic và cách chứng minh.

### ▪ Mục tiêu

Kiến thức: trình bày các nội dung sau:

- Các khái niệm, các phép toán về mệnh đề.
- Một số phương pháp suy luận.
- Vị từ, lượng từ.

Kỹ năng: Thực hiện được các yêu cầu sau:

- Giải các bài toán mệnh đề.
- Sử dụng các phương pháp suy luận phù hợp.

Năng lực tự chủ và trách nhiệm:

- Vận dụng kiến thức đã học để hình thành kỹ năng cần thiết.

## 1. Phép toán mệnh đề

### 1.1. Mệnh đề

#### 1.1.1. Khái niệm mệnh đề.

Mệnh đề toán học là một phát biểu mà có thể gán cho nó một trong hai giá trị logic là đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai).

Thường ký hiệu mệnh đề toán học bằng các chữ cái Latin hoa: P, Q, R, S,...

#### Ví dụ 1:

- Các khẳng định sau là mệnh đề:

- ✓ “Thành Phố Cao Lãnh là trung tâm của tỉnh Đồng Tháp”
- ✓ “ $2 + 3 = 7$ ”
- ✓ “4 là số chẵn.”

- Các khẳng định sau không phải mệnh đề:

- ✓ “X là số nguyên tố”
- ✓ “Hôm nay ngày thứ mấy?”
- ✓ “ $x \square 3 = 5$ ”

**Lưu ý:** Câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh, hàm phán đoán,... không phải là mệnh đề.

#### 1.1.2. Phân loại mệnh đề: gồm 2 loại

- Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, nếu... thì..., khi và chỉ khi,...) hoặc trạng từ “không”

#### Ví dụ 2:

- Nếu thông minh thì tôi sẽ học giỏi.
- 2 là số nguyên tố và là số lẻ.
- 3 không phải là số chẵn
- B đang học toán rồi rạc hoặc học kỹ thuật lập trình
- Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ “không”

**Ví dụ 3:**

- Hôm nay trời mưa.
- 4 là số nguyên tố.

## 1.2. Bảng chân trị

Chân trị của mệnh đề: Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.

P có chân trị đúng ta viết  $P = 1$  (hoặc Đ, T), P có chân trị sai ta viết  $P = 0$  (hoặc S, F)

**Ví dụ 4:**

- $P = \text{“Thành phố Hồ Chí Minh là thủ đô nước Việt Nam”} \downarrow P = 0$
- $Q = \text{“10 là số chẵn”} \downarrow Q = 1$

Bảng chân trị là bảng thể hiện tất cả các chân trị của một mệnh đề logic, biểu diễn mối quan hệ giữa những giá trị chân lý của các mệnh đề

## 1.3. Các phép toán về mệnh đề

### 1.3.1. Phép phủ định.

Cho trước mệnh đề P, định nghĩa một mệnh đề mới, kí hiệu  $\neg P$  hay  $\bar{P}$ , đọc là “không P” hoặc “phủ định của P”. Gọi  $\neg P$  là mệnh đề phủ định của P.

Bảng chân trị của phép phủ định:

| P | $\neg P$ |
|---|----------|
| 1 | 0        |
| 0 | 1        |

**Ví dụ 5:**

a)  $P = \text{“Minh giỏi lập trình”}$ .

$\neg P = \text{“Minh không giỏi lập trình”}$

Nếu  $P = 1 \square \neg P = 0$ . Nếu  $P = 0 \square \neg P = 1$

b)  $Q = \text{“}12 > 7\text{”}$ ,  $Q = 1$

$\neg Q = \text{“}12 \leq 7\text{”}$ ,  $\neg Q = 0$

### 1.3.2. Phép hội (phép nối liền, giao)

Cho trước hai mệnh đề  $P$ ,  $Q$  mệnh đề nối liền của hai mệnh đề  $P$ ,  $Q$  được kí hiệu là  $P \wedge Q$  (đọc là “ $P$  và  $Q$ ”)

Mệnh đề  $P \wedge Q$  đúng khi cả  $P$  và  $Q$  cùng đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép hội.

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

**Ví dụ 6:**

a)  $P$  = “3 là số nguyên tố”

$Q$  = “3 là số chẵn”

$P \wedge Q$  = “3 là số nguyên tố và 3 là số chẵn”

Ta có  $P = 1$ ,  $Q = 0$ , do đó  $P \wedge Q = 0$

b)  $P$  = “Hôm nay là chủ nhật”

$Q$  = “Hôm nay trời mưa”

Mệnh đề  $P \wedge Q$  đúng vào hôm chủ nhật trời mưa, và là sai vào bất kì ngày nào không phải chủ nhật và vào ngày chủ nhật mà trời lại không mưa.

**Lưu ý:**

- Khi nối hai mệnh đề bởi từ và trong phép hội, thường ta bỏ bớt một số từ trùng lặp hoặc sửa đổi chút ít câu văn.

**Ví dụ 7:** Dây đồng (*dẫn điện*) và dây chì (*dẫn điện*)

- Phép hội đôi khi còn diễn đạt bởi liên từ khác như: **đồng thời, nhưng, mà**,...hoặc bằng một **dấu phẩy**.

**Ví dụ 8:** - “An giỏi tin học **nhưng** yếu anh văn”

- “Lan **vừa** giỏi tin học **vừa** giỏi anh văn”

- “Anh, chị có thể đọc sách ở thư viện”

- “Món này cay **mà** ngon”

- Không phải từ và bao giờ cũng là ý nghĩa của phép hội

**Ví dụ 9:** - “Lý luận **và** thực hành phải đi đôi với nhau”

- “Trắng **và** đen là hai màu sắc đối lập nhau”

### 1.3.3. Phép tuyển (phép nối rời, hợp)

Cho trước hai mệnh đề  $P$ ,  $Q$ , mệnh đề nối rời của hai mệnh đề  $P$ ,  $Q$  là một mệnh đề, kí hiệu  $P \sqcup Q$  (đọc là “P hay Q”).

Mệnh đề  $P \sqcup Q$  sai khi cả hai  $P$ ,  $Q$  cùng sai, trong các trường hợp khác  $P \sqcup Q$  đúng.

Bảng chân trị của phép tuyển.

| $P$ | $Q$ | $P \sqcup Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 1            |
| 0   | 1   | 1            |
| 0   | 0   | 0            |

*Ví dụ 10:*

a)  $P = "3 > 4"$ ,  $Q = "3 > 5"$

$P \sqcup Q = "3 > 4 \text{ hay } 3 > 5"$

$P = 0, Q = 0 \Rightarrow P \sqcup Q = 0$

b)  $P = \text{“An là ca sĩ”}$ ,  $Q = \text{“An là nhạc sĩ”}$ . Khi đó ta có mệnh đề nối rời của  $P$  và  $Q$  là  $P \sqcup Q = \text{“An là ca sĩ hay An là nhạc sĩ”}$ . Mệnh đề nối liền này sẽ đúng nếu như một trong hai mệnh đề trên là đúng hoặc cả hai mệnh đề trên đều đúng. Nếu cả hai mệnh đề  $P$  và  $Q$  đều sai thì  $P \sqcup Q$  sẽ sai.

**Lưu ý:** Mệnh đề  $P \sqcup Q$ , từ hay (hoặc) để chỉ  $P$  hoặc  $Q$  hoặc cả  $P$ ,  $Q$ . Tuy nhiên có trường hợp chỉ  $P$  hoặc chỉ  $Q$  chứ không có trường hợp chỉ cả hai  $P$ ,  $Q$ . Để phân biệt rõ ràng ta có thêm phép tuyển chặt:

-  $P$  hoặc  $Q$  để chỉ  $P$  hoặc  $Q$  và có thể cả  $P$  lẫn  $Q$ , dùng kí hiệu  $\sqcup$ , gọi là phép tuyển không chặt (phép tuyển)

-  $P$  hoặc  $Q$  để chỉ  $P$  hoặc  $Q$  không thể cả  $P$  lẫn  $Q$ , dùng kí hiệu  $\oplus$ , gọi là phép tuyển chặt. Bảng chân trị của phép tuyển chặt

| $P$ | $Q$ | $P \oplus Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 1            |
| 0   | 1   | 1            |
| 0   | 0   | 0            |

*Ví dụ 11:* Hôm nay là thứ 7 hoặc là chủ nhật

#### 1.3.4. Phép kéo theo (mệnh đề có điều kiện)

Mệnh đề  $P$  kéo theo mệnh đề  $Q$  là một mệnh đề, kí hiệu  $P \downarrow Q$  (đọc là “ $P$  kéo theo  $Q$ ” hay “Nếu  $P$  thì  $Q$ ” hay “ $P$  là điều kiện đủ của  $Q$ ” hay “ $Q$  là điều kiện cần của  $P$ ”).

Xét ví dụ:  $P$  = “ $A$  trúng số”,  $Q$  = “ $A$  mua laptop mới”, khi đó mệnh đề  $P$  kéo theo  $Q$  sẽ là “Nếu  $A$  trúng số thì  $A$  sẽ mua laptop mới”. Ta có các trường hợp sau đây:

- $A$  đã trúng số và anh ta mua laptop mới: hiển nhiên mệnh đề  $P \downarrow Q$  là đúng.
- $A$  đã trúng số nhưng anh ta không mua laptop mới: rõ ràng mệnh đề  $P \downarrow Q$  là sai.
- $A$  không trúng số nhưng anh ta vẫn mua laptop mới: mệnh đề  $P \downarrow Q$  vẫn đúng.
- $A$  không trúng số và anh ta không mua laptop mới: mệnh đề  $P \downarrow Q$  đúng.

Mệnh đề  $P \downarrow Q$  chỉ sai khi  $P$  đúng  $Q$  sai, và đúng trong mọi trường hợp còn lại. Bảng chân trị của phép kéo theo

| $P$ | $Q$ | $P \downarrow Q$ |
|-----|-----|------------------|
| 1   | 1   | 1                |
| 1   | 0   | 0                |
| 0   | 1   | 1                |
| 0   | 0   | 1                |

#### 1.3.5. Phép kéo theo hai chiều (Phép tương đương)

Mệnh đề  $P$  kéo theo mệnh đề  $Q$  và ngược lại (mệnh đề  $P$  tương đương với mệnh đề  $Q$ ) là một mệnh đề, ký hiệu  $P \square Q$  (đọc là “ $P$  nếu và chỉ nếu  $Q$ ” hay “ $P$  khi và chỉ khi  $Q$ ” hay “ $P$  là điều kiện cần và đủ của  $Q$ ”).

**Ví dụ 12:**  $P$  = “Bình trúng số giải cao nhất”,  $Q$  = “Bình trúng số độc đắc”. Khi đó mệnh đề  $P \square Q$  = “Nếu Bình trúng số giải cao nhất thì Bình trúng số độc đắc và ngược lại”.

$P \square Q$  đúng khi và chỉ khi  $P$  và  $Q$  có cùng chân trị. Bảng chân trị của phép kéo theo hai chiều:

| $P$ | $Q$ | $P \square Q$ |
|-----|-----|---------------|
| 1   | 1   | 1             |
| 1   | 0   | 0             |
| 0   | 1   | 0             |
| 0   | 0   | 1             |

## 2. Các tính chất

### 2.1. Biểu thức logic (dạng mệnh đề)

#### 2.1.1. Định nghĩa

Biểu thức logic được cấu tạo từ:

- Các mệnh đề cụ thể (các hằng mệnh đề: P, Q, R, S,...)
- Các biến mệnh đề p, q, r, s ..., tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán logic  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\downarrow$ ,  $\uparrow$  và dấu đóng mở ngoặc () để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

**Ví dụ 13:** -  $E(p, q, r) = (p \wedge q) \wedge (\neg r \downarrow P)$  là một dạng mệnh đề trong đó p, q, r là biến mệnh đề, P là hằng mệnh đề.

$$- E(p, q, r, s) = (p \wedge q) \downarrow (\neg r \downarrow s)$$

Độ ưu tiên của các toán tử logic:

- Ưu tiên mức 1: ( )
- Ưu tiên mức 2:  $\neg$
- Ưu tiên mức 3:  $\wedge$ ,  $\vee$
- Ưu tiên mức 4:  $\downarrow$ ,  $\uparrow$

Bảng chân trị của một biểu thức logic: là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

**Ví dụ 14:** Với một biến mệnh đề, ta có hai trường hợp là 0 hoặc 1. Với hai biến mệnh đề p, q ta có bốn trường hợp chân trị của bộ biến (p, q) là các bộ giá trị (0,0), (0,1), (1,0) và (1,1).

Nhận xét: Trong trường hợp tổng quát, nếu có n biến mệnh đề thì ta có  $2^n$  trường hợp chân trị cho bộ n biến (trừ dòng tiêu đề).

**Ví dụ 15:**  $E(p, q, r) = (p \wedge q) \wedge (\neg r \downarrow p)$  có bảng chân trị sau:

| p | q | r | $\neg r$ | $p \wedge q$ | $\neg r \downarrow p$ | $E(p, q, r)$ |
|---|---|---|----------|--------------|-----------------------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1        | 0            | 0                     | 0            |
| 0 | 0 | 1 | 0        | 0            | 1                     | 1            |
| 0 | 1 | 0 | 1        | 0            | 0                     | 0            |
| 0 | 1 | 1 | 0        | 0            | 1                     | 1            |
| 1 | 0 | 0 | 1        | 0            | 1                     | 1            |
| 1 | 0 | 1 | 0        | 0            | 0                     | 0            |
| 1 | 1 | 0 | 1        | 1            | 1                     | 1            |
| 1 | 1 | 1 | 0        | 1            | 1                     | 1            |

☐ Lập bảng chân trị mệnh đề sau

a)  $(p \downarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)$

b)  $(s \downarrow (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \downarrow (r \wedge q)) \wedge s)$

### 2.1.2. Một số tính chất

#### a) Tương đương logic

Định nghĩa: Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic với nhau nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Kí hiệu:  $E \equiv F$  (E tương đương với F)

**Chú ý:** Nếu P và Q tương đương logic thì dạng mệnh đề  $P \equiv Q$  luôn lấy giá trị là 1 dù các biến có lấy bất cứ giá trị nào.

**Ví dụ 16:**  $(p \downarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

Thật vậy: ta có bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \downarrow q$ | $\neg p \vee q$ | $(p \downarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|------------------|-----------------|-------------------------------------------|
| 1   | 1   | 0        | 1                | 1               | 1                                         |
| 1   | 0   | 0        | 0                | 0               | 1                                         |
| 0   | 1   | 1        | 1                | 1               | 1                                         |
| 0   | 0   | 1        | 1                | 1               | 1                                         |

☐ Chứng minh  $(p \equiv q) \equiv (\neg p \vee q)$

#### b) Hằng đúng, hằng sai

- Hằng đúng: Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng đúng nếu nó luôn luôn nhận lấy giá trị logic bằng 1 (đúng)

**Ví dụ 17:**  $P \equiv \neg P$  là hằng đúng

| $P$ | $\neg P$ | $P \equiv \neg P$ |
|-----|----------|-------------------|
| 1   | 0        | 1                 |
| 0   | 1        | 1                 |

- Hằng sai: Một dạng mệnh đề được gọi là một hằng sai nếu nó luôn luôn nhận lấy giá trị logic bằng 0 (sai)

**Ví dụ 18:**  $P \equiv P$  là hằng sai

| $P$ | $\neg P$ | $P \equiv \neg P$ |
|-----|----------|-------------------|
| 1   | 0        | 0                 |
| 0   | 1        | 0                 |

- Tiếp liên: là một mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai.

**Ví dụ 19:**  $(P \equiv Q) \equiv \neg Q$  là tiếp liên

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \equiv Q$ | $(P \equiv Q) \equiv \neg Q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------------------------|
| 1   | 1   | 0        | 1            | 1                            |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**Định lý:** Hai biểu thức logic E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi  $E \equiv F$  là hằng đúng.

Hệ quả logic: F được gọi là hệ quả logic của E nếu  $E \rightarrow F$  là hằng đúng.

Ký hiệu:  $E \models F$

**Ví dụ 20:**  $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

### c) Tính ưu tiên của các phép toán logic

Tương tự phép toán số học, để tránh phải dùng nhiều dấu ngoặc trong biểu thức logic, người ta đã đưa ra một thứ tự ưu tiên trong việc tính toán như sau:

| Cấp ưu tiên | Thực hiện                                                       |
|-------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1           | Các phép toán trong ngoặc                                       |
| 2           | Phép phủ định ( $\neg$ )                                        |
| 3           | Phép hội ( $\wedge$ )                                           |
| 4           | Phép tuyển ( $\vee$ )                                           |
| 5           | Phép suy diễn và tương đương ( $\rightarrow, \leftrightarrow$ ) |

Trong phép toán có cùng cấp ưu tiên, phép toán nào đứng trước được ưu tiên trước.

**Ví dụ 21:** -  $\neg p \wedge q \wedge r \wedge s$  có nghĩa là  $(\neg p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$   
 -  $\neg(p \wedge q) \wedge r \wedge s$  có nghĩa là  $\neg(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

### d) Các quy luật logic

Với p, q, r là các biến mệnh đề, 1 là hằng đúng, 0 là hằng sai, ta có các tương đương logic:

1) Phủ định của phủ định:  $\neg\neg p \equiv p$

2) Quy tắc De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

3) Luật giao hoán

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

4) Luật kết hợp

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

5) Luật phân phối

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6) Luật lũy đẳng

$$p \vee p \equiv p \text{ và } p \wedge p \equiv p$$

7)

Luật trung hòa

$$p \vee 1 \equiv p \text{ và } p \wedge 0 \equiv p$$

8) Luật về phần tử bù

$$p \vee \neg p \equiv 1 \text{ và } p \wedge \neg p \equiv 0$$

9) Luật thông trị

$$p \vee 0 \equiv p \text{ và } p \wedge 1 \equiv p$$

10) Luật hấp thụ

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

11) Luật về phép kéo theo

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p \text{ (luật chứng minh phản chứng thứ nhất)}$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q \text{ (luật chứng minh phản chứng thứ 2)}$$

*Chứng minh:* Để chứng minh 11 luật trên có thể lập bảng chân trị 2 vế của tương đương logic

**Ví dụ 22:** Dùng bảng chân trị chứng minh quy tắc De Morgan

a)  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

b)  $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

*Giải*

a)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ |
|-----|-----|----------|----------|------------|------------------|------------------------|----------------------------------------------|
| 1   | 1   | 0        | 0        | 1          | 0                | 0                      | 1                                            |
| 1   | 0   | 0        | 1        | 1          | 0                | 0                      | 1                                            |
| 0   | 1   | 1        | 0        | 1          | 0                | 0                      | 1                                            |
| 0   | 0   | 1        | 1        | 0          | 1                | 1                      | 1                                            |

b) Tương tự

**Ví dụ 23:**

a) Sử dụng các quy luật logic để chứng minh dạng mệnh đề

$$E(p, q) = (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q \text{ là hằng đúng}$$

*Giải:*

$$\begin{aligned} E(p, q) &\equiv [p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow q \equiv [(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow q] \rightarrow q \\ &\equiv [0 \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q \\ &\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \rightarrow q \equiv q \rightarrow q \\ &\equiv p \rightarrow 1 \equiv 1 \end{aligned}$$

b) Chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng.

$$[(r \rightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow s) \rightarrow (t \rightarrow u)] \rightarrow (t \rightarrow u)$$

*Giải*

Ta thay  $r \rightarrow s$  bởi  $p$  và thay  $t \rightarrow u$  bởi  $q$ . Khi đó ta chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng:  $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ . Mà ta đã chứng minh mệnh đề này là hằng đúng ở câu a. Vậy  $[(r \rightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow s) \rightarrow (t \rightarrow u)] \rightarrow (t \rightarrow u)$  là một hằng đúng.

c) Chứng minh  $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

*Giải*

Ta có thể dùng bảng chân trị để chứng minh. Ở đây ta dựa vào quy luật logic

$$\begin{aligned} ((p \rightarrow q) \rightarrow r) &\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ &\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ &\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ &\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r \end{aligned}$$

☐ a) Chứng minh mệnh đề sau là một hằng đúng  $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$

b) Cho  $p, q, r$  là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$$[(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

### 3. Một số phương pháp suy luận

Suy luận là rút ra một mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã có. Mệnh đề đã có gọi là giả thiết hay tiền đề, mệnh đề mới được gọi là kết luận.

*Ví dụ:* Nếu Minh chăm học thì Minh thi đạt môn Toán rồi rạc. Mà Minh chăm học. Vậy Minh thi đạt môn Toán rồi rạc

$p$  = “Minh chăm học”,  $q$  = “Minh thi đạt môn Toán rồi rạc”

Ta có suy luận:  $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$

Ta có bảng chân trị

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ | $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1   | 1   | 1                 | 1                                 | 1                                                 |
| 1   | 0   | 0                 | 0                                 | 1                                                 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng  $p_1, p_2, \dots, p_n$  gọi là giả thiết (tiền đề) các quy tắc suy luận được áp dụng để suy ra chân lý của một khẳng định  $q$  là hệ quả logic của  $(p_1 \sqcap p_2 \sqcap \dots \sqcap p_n)$ .

Dạng lý luận này là đúng khi ta có biểu thức  $(p_1 \sqcap p_2 \sqcap \dots \sqcap p_n) \Downarrow q$  là hằng đúng.

Để tiện mô tả ta mô hình hóa phép suy luận theo sơ đồ sau:

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array}}{\sqcap q}$$

### 3.1. Quy tắc khẳng định (Modus Ponens)

Quy tắc này thể hiện ở dạng hằng đúng  $[(p \Downarrow q) \sqcap p] \Downarrow q$

Hoặc dưới dạng sơ đồ:

$$\frac{\begin{array}{c} p \Downarrow q \\ p \end{array}}{\sqcap q}$$

**Ví dụ 24:**

- a) Mọi người đều sẽ chết  
An là người  
Vậy: An sẽ chết
- b) Nếu Nam lười học thì sẽ không đạt môn Toán rời rạc.  
Mà Nam lười học  
Kết luận: Nam không đạt môn Toán rời rạc.

**Lưu ý:** Trong suy luận người ta có thể đổi thứ tự hai tiền đề. Chẳng hạn ở ví dụ trên ta có thể nói:

Nam lười học  
Nếu Nam lười học thì sẽ không đạt môn Toán rời rạc.  
Kết luận: Nam không đạt môn Toán rời rạc.

### 3.2. Quy tắc phủ định (Modus Tollens)

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng  $[(p \Downarrow q) \sqcap \Uparrow q] \Downarrow \Uparrow p$

Hoặc dưới dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{c} p \downarrow q \\ \nearrow q \\ \hline \square \nearrow p \end{array}$$

**Ví dụ 25:**

- a) Nếu An đi học đầy đủ thì An sẽ được dự thi môn Toán rời rạc  
An không được dự thi môn Toán rời rạc  
Suy ra: An không đi học đầy đủ.
- b) Nếu mặt trời ở đỉnh đầu, thì bóng ngắn nhất  
Bóng không ngắn nhất.  
Vậy mặt trời không ở đỉnh đầu.

### 3.3. Tam đoạn luận (Syllogism)

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng  $[(p \downarrow q) \square (q \downarrow r)] \downarrow (p \downarrow r)$

Hoặc dưới dạng sơ đồ:

$$\begin{array}{c} p \downarrow q \\ q \downarrow r \\ \hline \square p \downarrow r \end{array}$$

**Ví dụ 26:**

- a) Nếu trúng số độc đắc An sẽ giàu có.  
Nếu giàu có An sẽ mua xe sang.  
Vậy: Nếu trúng số độc đắc An sẽ mua xe sang.
- b) Minh đi chơi thì Minh không ôn Toán rời rạc  
Minh không ôn Toán rời rạc thì Minh sẽ thi rớt Toán rời rạc.  
Mà Minh lại đi chơi.  
Vậy Minh thi rớt Toán rời rạc

Nếu thể hiện các mệnh đề ở ví dụ b thành p, q, r thì lý luận trên có dạng:

$$\begin{array}{c} p \downarrow \nearrow q \\ \nearrow q \downarrow r \\ p \\ \hline \square r \end{array}$$

#### ❖ Quy tắc tam đoạn luận rời.

Được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \square q) \square \nearrow p] \downarrow q \text{ hoặc } [(p \square q) \square \nearrow q] \downarrow p$$

**Ví dụ 27:** Hôm nay là ngày chủ nhật hoặc là ngày lễ.  
Mà hôm nay không phải là ngày chủ nhật,

Vậy hôm nay phải là ngày lễ

*Ý nghĩa của quy tắc:* nếu trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có 1 trường hợp sai thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ đúng.

### 3.4. Quy tắc mâu thuẫn (chứng minh bằng phản chứng)

Quy tắc này được thể hiện bởi tương đương logic  $(p \downarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \downarrow 0]$

Quy tắc này cho phép chứng minh  $[(p \rightarrow q) \downarrow 0]$  thay cho  $(p \downarrow q)$ . Nói cách khác nếu thêm giả thiết phụ  $\rightarrow q$  vào giả thiết  $p$  cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì  $q$  là hệ quả logic của  $p$

Tổng quát:  $[(p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_n) \downarrow q] \equiv [(p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_n \rightarrow q) \downarrow 0]$

**Ví dụ 28:** Hãy sử dụng phương pháp phản chứng cho chứng minh sau:

$$\begin{array}{l} p \downarrow r \\ \rightarrow p \downarrow q \\ q \downarrow s \\ \hline \rightarrow r \downarrow s \end{array}$$

Phủ định của kết luận sẽ tương đương với:  $\rightarrow(\rightarrow r \downarrow s) \equiv \rightarrow(r \rightarrow s) \equiv \rightarrow r \rightarrow \rightarrow s$

Ta thêm vào tiền đề hai giả thiết phụ  $\rightarrow r$  và  $\rightarrow s$  và chứng minh suy luận sau là đúng:

$$\begin{array}{l} p \downarrow r \\ \rightarrow p \downarrow q \\ q \downarrow s \\ \rightarrow r \\ \rightarrow s \\ \hline \rightarrow 0 \end{array}$$

Ta có các bước sau đây:

$$\begin{array}{l} \rightarrow p \downarrow q \\ q \downarrow s \\ \hline \rightarrow \rightarrow p \downarrow s \end{array} \quad \text{(Tam đoạn luận)}$$

Mà

$$\begin{array}{l} \rightarrow s \\ \hline \rightarrow \rightarrow(\rightarrow p) \end{array} \quad \text{(Phương pháp phủ định)}$$

Hay tương đương

$$\begin{array}{l} p \\ p \downarrow r \\ \hline \rightarrow r \end{array}$$

Mà

Kết luận  $r$  cùng với giả thiết phụ  $\rightarrow r$  cho ta:  $(r \rightarrow \rightarrow r) \equiv 0$ . Ta có điều phải chứng minh

### 3.5. Quy tắc chứng minh theo trường hợp

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng sau:  $[(p \downarrow r) \sqcap (q \downarrow r)] \downarrow [(p \sqcap q) \downarrow r]$

Ý nghĩa của quy tắc này là nếu một giả thiết có thể tách ra thành hai trường hợp p đúng hay q đúng, và ta đã chứng minh được riêng rẽ cho từng trường hợp là kết luận r đúng, khi ấy r cũng đúng trong cả hai trường hợp.

Tổng quát:  $[(p_1 \downarrow q) \sqcap (p_2 \downarrow q) \sqcap \dots \sqcap (p_n \downarrow q)] \downarrow [(p_1 \sqcap p_2 \sqcap \dots \sqcap p_n) \downarrow q]$

**Ví dụ 29:**

Để chứng minh rằng  $f(n) = n(n+1)$  luôn chia hết cho 2 với mọi số tự nhiên n, ta xét hai trường hợp là n chẵn, n lẻ và thấy rằng trong cả hai trường hợp  $f(n)$  luôn chia hết cho 2. Vậy ta rút ra kết luận cần chứng minh là  $f(n)$  luôn chia hết cho 2 với mọi số tự nhiên n.

### 3.6. Phản ví dụ

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay không là một hằng đúng, ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Để tìm một phản ví dụ ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các tiên đề trong phép suy luận là đúng còn kết luận là sai.

**Ví dụ 30:** Hãy kiểm tra suy luận:

$$\frac{\begin{array}{c} p \downarrow r \\ p \\ \swarrow r \downarrow q \\ \hline \sqcap q \end{array}}{\sqcap q}$$

Ta tìm thấy một phản ví dụ  $p = 1 \quad q = 0 \quad r = 1$ . Khi đó

$$\frac{\begin{array}{c} p \downarrow r = 1 \\ \swarrow r \downarrow q = 1 \\ \hline \sqcap q = 0 \end{array}}{\sqcap q = 0}$$

Vì vậy suy luận đã cho không đúng.

### 3.7. Một vài ví dụ cụ thể có sử dụng kết hợp nhiều quy tắc suy diễn

**Ví dụ 31:** Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ. Suy luận này đúng hay sai?

Ta thể hiện dạng biến mệnh đề với:

p: ông Minh được tăng lương.

q: ông Minh nghỉ việc.

r: vợ ông Minh mất việc.

s: gia đình phải bán xe.

t: vợ ông hay đi làm trễ.

Ta có suy luận như sau:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \rightarrow p \downarrow q \\ q \square r \downarrow s \\ \downarrow r \end{array} \\
 p \\
 \hline
 \square \begin{array}{c} \rightarrow s \downarrow t \end{array}
 \end{array}$$

Dùng phân ví dụ ta chọn:  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $r = 1$ ,  $s = 0$ ,  $t = 1$ . Ta sẽ thấy đây là suy luận không đúng.

**Ví dụ 32:** Kiểm tra suy luận sau đúng hay sai: “Nếu nghệ sĩ Văn Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và Ông bầu sẽ rất buồn. Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì phải trả lại vé cho người xem. Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho người xem. Vậy nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn”

Để kiểm tra suy luận trên, ta thay các mệnh đề nguyên thủy bằng các biến mệnh đề:

p: “nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn”

q: “số vé bán ra ít hơn 50 vé”

r: “đêm diễn bị hủy bỏ”

s: “ông Bầu rất buồn”

t: “trả tiền vé lại cho người xem”

Ta có mô hình thể hiện suy luận sau:

$$\begin{array}{c}
 (\rightarrow p \square q) \downarrow (r \square s) \\
 \downarrow t \\
 \rightarrow t \\
 \hline
 \square p
 \end{array}$$

Suy luận trên được thể hiện theo các bước sau:

$$(\rightarrow p \square q) \downarrow (r \square s) \quad \text{(Tiền đề)}$$

$$\square s) \downarrow r \quad \text{(Hằng đúng)}$$

$$r \downarrow t \quad \text{(Tiền đề)}$$

$$\square (\rightarrow p \square q) \downarrow t \quad \text{(Tam đoạn luận mở rộng)}$$

Mà  $\rightarrow t$  (Tiền đề)

$$\square \rightarrow (\rightarrow p \square q) \quad \text{(Phương pháp phủ định)}$$

|     |                                                 |                                              |
|-----|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Hay | $p \rightarrow q$                               | (Quy tắc De Morgan và phủ định của phủ định) |
| Mà  | $\frac{(p \rightarrow q) \downarrow p}{\neg p}$ | (Hằng đúng)                                  |
|     |                                                 | (Phương pháp khẳng định)                     |

Vậy suy luận ban đầu là chính xác

#### 4. Vị từ và lượng từ

##### 4.1. Vị từ

##### 4.1.1. Định nghĩa:

Vị từ là một khẳng định  $p(x, y, \dots)$ , trong đó có chứa một số biến tự do  $x, y, \dots$  thuộc tập hợp  $A, B, \dots$  cho trước sao:

- Bản thân  $p(x, y, \dots)$  không phải là mệnh đề
- Nếu thay  $x, y, \dots$  thành những giá trị cụ thể  $x = a \in A, y = b \in B, \dots$  thì  $p(a, b, \dots)$  là một mệnh đề.

##### Ví dụ 33

- a)  $p(n) = "n \geq 1 \text{ là số nguyên tố}"$
- b)  $p(x) = "x^2 - 2x - 3 = 0, x \in \mathbb{R}"$
- c)  $p(x, y) = "x \leq y \text{ là số chẵn}, x, y \in \mathbb{Z}"$

##### 4.1.2. Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ  $p(x), q(x)$  theo một biến  $x \in A$ . Khi đó ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

- ❖ Phủ định:  $\neg p(x)$
- ❖ Phép nối liền (hội, giao):  $p(x) \wedge q(x)$
- ❖ Phép nối rời (tuyển, hợp):  $p(x) \vee q(x)$
- ❖ Phép kéo theo:  $p(x) \rightarrow q(x)$
- ❖ Phép kéo theo hai chiều:  $p(x) \leftrightarrow q(x)$

**Ví dụ 34:**  $p(x) = "x \text{ là số nguyên tố}"$ ,  $q(x) = "x \text{ là số chẵn}"$ . Khi đó ta có:

- Phủ định của  $p$ :  $\neg p(x) = "x \text{ không là số nguyên tố}"$
- Phép nối liền của  $p$  và  $q$ :  $p(x) \wedge q(x) = "x \text{ là số nguyên tố và } x \text{ là số chẵn}"$

##### 4.2. Lượng từ

Cho  $p(x)$  là một vị từ theo một biến xác định trên  $A$ . Các mệnh đề lượng từ hóa của  $p(x)$  được định nghĩa như sau:

- Mệnh đề "Với mọi  $x$  thuộc  $A$ ,  $p(x)$ ",  
Kí hiệu: " $\forall x \in A, p(x)$ "