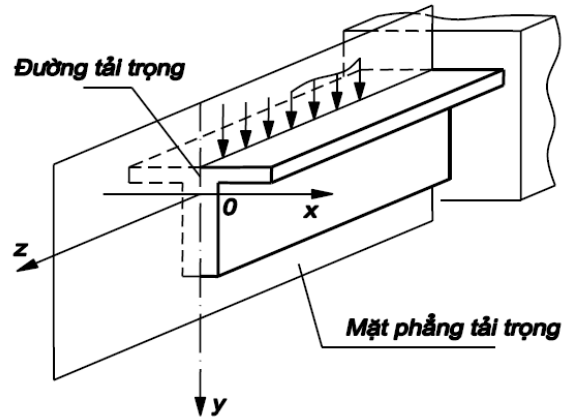


Chương 6. UỐN NGANG PHẪNG

6.1. KHÁI NIỆM CHUNG

6.1.1. Định nghĩa về uốn phẳng

Ta sẽ xét những thanh thẳng mặt cắt có trục đối xứng; trục đối xứng đó và trục thanh tạo thành *mặt phẳng đối xứng* của thanh. Những thanh đó sẽ chịu *uốn phẳng* nếu thanh cân bằng dưới tác dụng của các lực nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh; những lực này có thể là lực tập trung hoặc phân bố có phương vuông góc với trục của thanh, hoặc là những ngẫu lực



Hình 6.1

Mặt phẳng chứa các ngoại lực gọi là *mặt phẳng tải trọng*. Hình 6.1 cho ta một ví dụ về một dầm chịu uốn phẳng: mặt phẳng tải trọng trùng với mặt phẳng đối xứng của thanh.

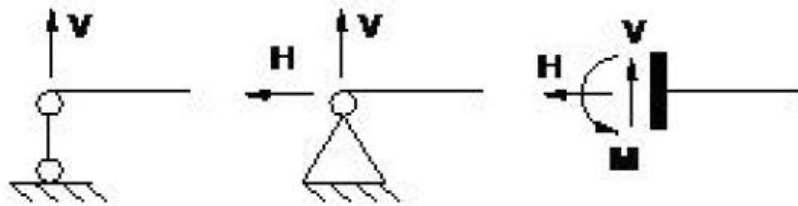
Thanh chịu uốn được gọi là *dầm*.

6.1.2. Gối tựa và phản lực gối tựa

Dầm tựa trên các bộ phận đỡ, những bộ phận này được gọi là *gối tựa* hay *liên kết*.

Có ba loại gối tựa thường gặp là: bản lề di động, bản lề cố định và ngàm.

Hình 6.2 biểu thị sơ đồ tính toán và phản lực của ba loại liên kết trên. Để xác định các phản lực gối tựa ta dùng các phương trình cân bằng tĩnh học trong cơ học lý thuyết.



Hình 6.2

Nếu số phương trình cân bằng tĩnh học bằng số phản lực cần tìm thì ta hoàn toàn xác định được các phản lực của dầm. Đó là loại *dầm tĩnh định*. Nếu dầm có số

phản lực nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh học, ta có *dầm siêu tĩnh*. Chúng ta sẽ nghiên cứu chủ yếu loại dầm tĩnh định.

6.2. NỘI LỰC TRONG DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.2.1. Khái niệm

Sau khi xác định được phản lực thì toàn bộ ngoại lực tác dụng lên dầm đã được xác định. Ta sẽ tính nội lực của dầm.

Giả sử có một dầm mặt cắt có trục đối xứng chịu tác dụng của một lực thẳng đứng P (hình 6.3), trị số của lực và kích thước của dầm cho trên hình vẽ ($P = 4 \text{ kN}$). Ta xác định nội lực tại một mặt cắt bất kỳ của dầm.

Trước hết ta phải xác định các phản lực ở các gối tựa A và B . Vì các ngoại lực, bao gồm tải trọng P và các phản lực liên kết V_A , V_B và H_B , là một hệ lực cân bằng, nên ta có:

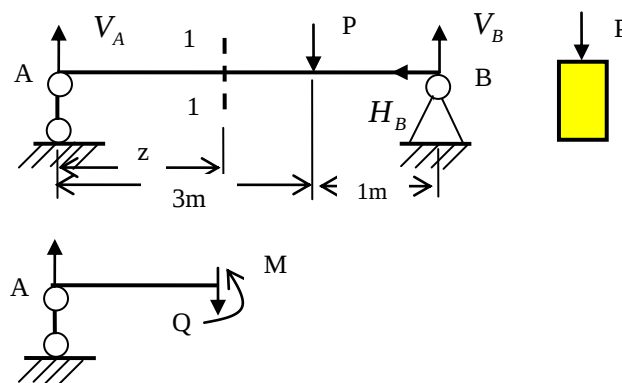
$$\Sigma M_A = V_B \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$$

$$V_B = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = -V_A \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$V_A = 1 \text{ kN}$$

Phương trình $\Sigma Z = 0$ cho ta thấy phản lực nằm ngang H_B tại gối B bằng không: $H_B = 0$. Từ đây về sau ta nhớ rằng phản lực dọc (nằm ngang) của dầm chịu uốn luôn luôn bằng không.



Hình 6.3

Để tính nội lực trong dầm ta dùng phương pháp mặt cắt.

Tưởng tượng cắt dầm làm hai phần theo mặt cắt 1-1, cách gối A một đoạn bằng z . Tách riêng một phần dầm để xét, phần trái chẳng hạn. Để cho phần dầm tách ra vẫn cân bằng như khi dầm còn nguyên vẹn thì phải đặt vào mặt cắt 1-1 những nội lực. Các nội lực này được phân bố trên toàn bộ mặt cắt. Quy luật phân bố của chúng như thế nào chúng ta sẽ nghiên cứu ở phần sau. Nhưng nếu thu toàn bộ nội lực về

trọng tâm của mặt cắt ta sẽ được một lực Q và một mômen M ; Q gọi là *lực cắt* và tính bằng *niuton* (N), M gọi là *mômen uốn* và tính bằng *niuton mét* (Nm) (hình 6.3).

Vì phần dầm tách ra vẫn cân bằng nên các ngoại lực của phần dầm đó cân bằng với lực cắt Q và mômen uốn M . Do đó ta có:

$$Q = V_A = 1 \text{ kN}$$

$$M = V_A \cdot z = 1 \cdot z \text{ kNm}$$

Như vậy trị số của lực cắt Q bằng trị số hình chiếu của ngoại lực tác dụng về phía trái mặt cắt lên mặt cắt đó, trị số của mômen uốn M bằng trị số mômen của ngoại lực tác dụng về phía trái mặt cắt đối với trọng tâm của mặt cắt đó.

Như đã biết ở phần trước, nội lực trên cùng một mặt cắt của hai phần dầm (nằm bên trái và bên phải của mặt cắt) thì bằng nhau về trị số nhưng về hướng thì ngược nhau. Do đó trên mặt cắt 1-1 của phần dầm phía phải và của phần dầm phía trái, các nội lực Q và M bằng nhau về trị số nhưng ngược nhau về hướng.

Nếu trên phần dầm đang xét có nhiều ngoại lực tác dụng thì lực cắt Q , mômen uốn M tại mặt cắt nào đó bằng tổng đại số lực cắt Q , mômen uốn M tại mặt cắt đó do từng ngoại lực tác dụng trên phần dầm đang xét gây ra.

6.2.2. Xác định nội lực tại mặt cắt bất kỳ

Từ các nội dung diễn giải trong mục trên, người ta đề ra quy tắc chung để xác định lực cắt Q và mômen uốn M trên mặt cắt bất kỳ của dầm chịu uốn phẳng như sau:

6.2.2.1. Quy tắc xác định trị số Q_i , M_i

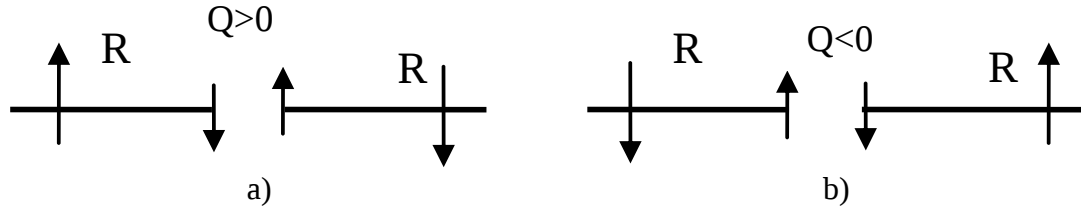
- Lực cắt Q về trị số bằng tổng đại số hình chiếu các ngoại lực ở về một phía của mặt cắt lên mặt cắt đó.

- Mômen uốn M về trị số bằng tổng đại số mômen của các ngoại lực ở về một phía của mặt cắt đối với trọng tâm mặt cắt đó.

6.2.2.2. Quy tắc xác định dấu Q_i , M_i

Nếu muốn cho lực cắt Q , mômen uốn M có một dấu duy nhất mặc dù ta xét phần trái hay phần phải của dầm thì cần theo các quy ước sau:

- Lực cắt Q sẽ có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực tác dụng lên một phần của dầm có khuynh hướng làm cho phần đó quay theo chiều kim đồng hồ



Hình 6.4

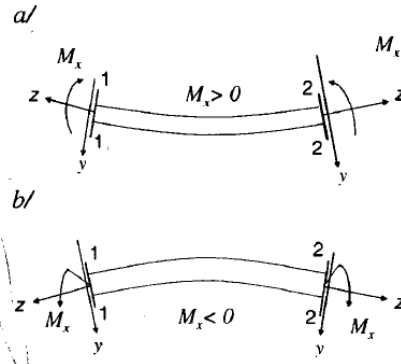
quanh trọng tâm mặt cắt đang xét (hình 6.4a). Ngược lại, Q có dấu âm (hình 6-4b).

- Mômen uốn M sẽ có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực ở về một phía của mặt cắt có khuynh hướng làm cho *thờ phía dưới của dầm bị dãn* lúc đó xem như mặt cắt đang xét bị ngàm lại (hình 6.5a). Ngược lại, M có dấu âm (hình 6.5b)

Tổng hợp các trường hợp ở hình 6.4a và 6.5a ta được trường hợp nội lực mang dấu dương trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang phẳng. Ngược lại, các trường hợp ở hình 6.4b và 6.5b ta được trường hợp nội lực mang dấu âm.

6.2.2.3. Ví dụ áp dụng

Các trường hợp trên hình vẽ 6.4 và 6.5 chính là các ví dụ về quy ước dấu của nội lực Q và M . Trong các ví dụ dưới đây khi xét nội lực của các bài toán cụ thể, chúng ta sẽ trở lại áp dụng quy ước này nhiều lần.



Hình 6.5

6.3. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

Thường trên những mặt cắt khác nhau của dầm, mômen uốn M và lực cắt Q có dấu và trị số khác nhau. Điều đó có nghĩa là M và Q biến đổi theo vị trí của mặt cắt trên trục dầm. Gọi z là hoành độ của các mặt cắt thì M và Q là những hàm số biến thiên theo z , ký hiệu là $Q(z)$ và $M(z)$

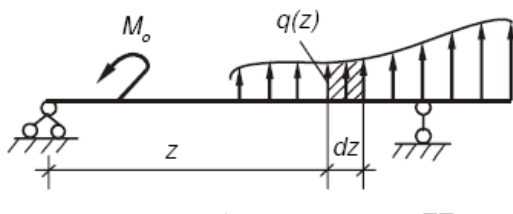
Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của Q và M dọc theo trục dầm gọi là *biểu đồ nội lực* Q, M .

Vẽ biểu đồ Q, M là một bước quan trọng trong quá trình tính toán dầm chịu uốn phẳng, vì qua biểu đồ đó ta có thể dễ dàng xác định được trị số lực cắt và mômen uốn tại những *mặt cắt nguy hiểm*. Thông thường những mặt cắt có trị số lực cắt lớn nhất $Q_{\max}$ và mặt cắt có trị số mômen uốn lớn nhất $M_{\max}$ là những mặt cắt nguy hiểm nhất.

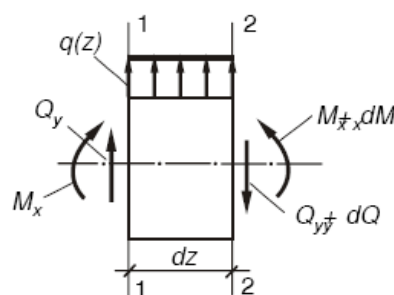
6.3.1. Định lý Giu-rap-xki

Trong một dầm chịu uốn, giữa lực cắt Q , mômen uốn M và cường độ q của tải trọng phân bố có một mối liên hệ toán học quan trọng. Ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ đó trong mục này.

Cho một dầm đặt trên hai gối tựa A và B, chịu tải trọng bất kỳ như hình 6.6



Hình 6.6



Hình 6.7

Ta quy ước rằng cường độ lực phân bố $q(z)$ sẽ có dấu dương, nếu nó hướng từ dưới lên trên và có dấu âm trong trường hợp ngược lại. Trên hình 6.6, giả thiết $q(z)$ hướng lên.

Trong đoạn dầm chịu lực phân bố, xét hai mặt cắt bất kỳ 1-1 và 2-2 cách gối A một đoạn z và $z + dz$. Ta tách đoạn dz ra khỏi dầm (hình 6.7). Trên mặt cắt 1-1 có các nội lực Q, M và trên mặt cắt 2-2 có các nội lực $Q + dQ$ và $M + dM$. Vì đoạn dz rất ngắn, nên có thể xem $q(z)$ phân bố đều trên dz và có hợp lực bằng $q(z).dz$. Gọi trục y là trục thẳng đứng. Viết các phương trình cân bằng cho đoạn thanh này, ta được:

$$\sum Y = Q - (Q + dQ) + q(z).dz = 0$$

$$\sum M_o = - M + (M + dM) - Q \frac{dz}{2} - (Q + dQ) \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

Từ phương trình thứ nhất ta rút được: $\frac{dQ}{dz} = q(z)$ (6-1)

Từ phương trình thứ hai, sau khi bỏ qua vô cùng bé bậc hai $dQ \cdot \frac{dz}{2}$, ta được:

$$\frac{dM}{dz} = Q \quad (6-2)$$

Từ (6-1) và (6-2), ta suy ra được:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = q(z) \quad (6-3)$$

Các công thức (6-1), (6-2) và (6-3) có ý nghĩa rất quan trọng. Đó là các công thức biểu thị định lý *Giu-rap-xki*:

- Đạo hàm cấp một đối với z của lực cắt Q tại một mặt cắt nào đó thì bằng cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ tại mặt cắt đó.

- Đạo hàm cấp một đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó thì bằng lực cắt Q tại mặt cắt đó.

- Đạo hàm cấp hai đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó thì bằng cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ tại mặt cắt đó.

Các liên hệ trên đây giữ một vai trò rất quan trọng trong việc vẽ hoặc kiểm tra các biểu đồ Q và M .

Thực vậy, dựa vào các liên hệ trên có thể rút ra một số quy luật của biểu đồ Q và M sẽ trình bày ở phần dưới.

6.3.2. Các phương pháp vẽ biểu đồ Q và M

6.3.2.1. Phương pháp mặt cắt thuận túy

1. Các bước vẽ biểu đồ Q, M

Khi vẽ biểu đồ Q, M của một dầm ta cần theo các bước sau đây:

a) Xác định các phản lực:

b) Chia dầm ra làm nhiều đoạn, trong mỗi đoạn phải đảm bảo sao cho *nội lực không thay đổi đột ngột*. Muốn thế ta phải dựa vào các mặt cắt có đặt lực hay mômen tập trung, hoặc có sự thay đổi đột ngột của lực phân bố, để phân đoạn.

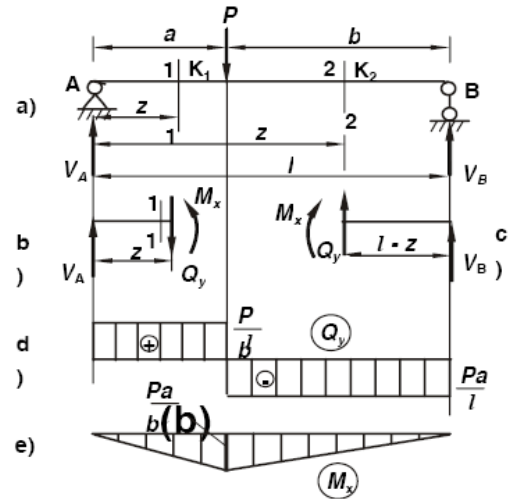
Sau đó, lập biểu thức giải tích của Q , M cho một *mặt cắt bất kỳ* trong từng đoạn.

c) Vẽ biểu đồ Q và M . Đặt trục hoành song song với trục của dầm. Trên trục tung, vuông góc với trục hoành, đặt các giá trị của Q hoặc M theo tỷ lệ xích nhất định.

Dùng các biểu thức của Q và M để vẽ biểu đồ của chúng. Ta quy ước rằng:

- Các tung độ dương của biểu đồ Q đặt ở phía trên trục hoành, tung độ âm đặt ở phía dưới.

- Các tung độ dương của biểu đồ M đặt ở phía dưới trục hoành, các tung độ âm đặt ở phía trên. Như vậy cũng có nghĩa là tung độ của biểu đồ M luôn luôn đặt về phía thớ bị dãn của dầm.



Hình 6.8

Ví dụ 6.1

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm tựa trên hai gối bản lề A và B, chịu tải trọng P như hình 6.8a.

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Ngoại lực tác dụng gồm tải trọng P đã biết và các phản lực V_A, V_B chưa biết (phản lực $H_A = 0$). Do đó trước hết phải xác định phản lực. Ta giả thiết hướng của các phản lực như hình 6.8a. Viết các phương trình cân bằng tĩnh học ta được:

$$\sum M_A = V_B \cdot l - P \cdot a = 0; \text{ Do đó: } V_B = \frac{P \cdot a}{l};$$

$$\sum M_B = P \cdot b - V_A \cdot l = 0; \text{ Do đó: } V_A = \frac{P \cdot b}{l};$$

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M* : Căn cứ theo ngoại lực tác dụng, ta phân dầm này làm hai đoạn AC và CB (C là điểm đặt của lực P).

1- Biểu thức nội lực trong đoạn AC:

Để lập biểu thức giải tích của Q và M tại một mặt cắt bất kỳ trong đoạn AC , ta cắt dầm bằng mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z (hình 6.8b). Ta xét phần dầm nằm phía bên trái của mặt cắt. Với điều kiện: $0 \leq z \leq a$:

- Lực cắt Q bằng:

$$Q(z) = V_A = P \frac{b}{l} \quad (6-4)$$

Ứng dụng quy tắc xác định dấu Q_i ở trên đã học, $Q(z)$ có dấu dương vì ngoại lực V_A làm cho phần dầm đang xét quay theo chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét.

- Mômen uốn M tại mặt cắt 1-1 bằng :

$$M(z) = V_A \cdot z = P \frac{b}{l} z \quad (6-5)$$

Ứng dụng quy tắc xác định dấu mômen uốn, $M(z)$ có dấu dương vì V_A làm cho thớ phía dưới của dầm bị dãn.

Khi $z > a$, tức là khi mặt cắt đã vượt quá điểm C thì ngoại lực phía trái không phải chỉ có một phản lực V_A mà sẽ còn có lực P , do đó biểu thức (6-4) và (6-5) không dùng được nữa và tại điểm C nội lực trong dầm đã đột ngột thay đổi. Chính vì lý do đó mà ta phải phân dầm thành hai đoạn lấy điểm C làm ranh giới.

2- Biểu thức nội lực trong đoạn CB :

Để xác định nội lực của mặt cắt bất kỳ trong đoạn CB ta dùng mặt cắt 2-2, cách gối A một đoạn z , nhưng phải thỏa mãn điều kiện: $a \leq z \leq l$. Xét phần bên phải của mặt (hình 6.8c) ta được:

$$Q(z) = -V_B = -P \frac{a}{l} \quad (6-6)$$

Lực cắt $Q(z)$ có dấu âm, vì ngoại lực V_B muốn làm cho phần dầm đang xét quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét.

$$M(z) = V_B(l-z) = P \frac{a}{l} (l-z) \quad (6-7)$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

1- Khi mặt cắt 1-1 thay đổi vị trí từ A đến C , nghĩa là $0 \leq z \leq a$, thì:

- Theo (6-4), lực cắt $Q(z)$ luôn luôn bằng hằng số. Do đó biểu đồ của $Q(z)$ là một đường thẳng song song với trục z (hình 6-8d) có tung độ bằng $P \frac{b}{l}$

Lực cắt Q có dấu dương nên các tung độ đặt ở phía trên trục hoành.

- Theo (6-5), mômen uốn $M(z)$ là một hàm bậc nhất của z . Do đó đường biểu diễn $M(z)$ là đoạn thẳng xiên xác định được bằng hai điểm:

Điểm nhỏ nhất với $z = 0$, $M = 0$; điểm lớn nhất với $z = a$, $M = P \frac{ab}{l}$

Nhớ rằng theo quy ước đã nêu ở trên, tung độ dương của M đặt phía dưới trục hoành (hình 6.8e)

2.- Trong đoạn CB, theo (6-6) lực cắt Q là một hằng số nên đường biểu diễn là một đường song song với trục hoành. Vì Q có dấu âm nên các tung độ của biểu đồ đặt ở phía dưới (hình 6-8d).

Biểu đồ M là một đường thẳng xiên vì $M(z)$ là một hàm số bậc nhất của z , theo biểu thức (6-7). Đường thẳng này được xác định nhờ hai điểm (hình 6.8e):

Điểm nhỏ nhất với $z = 0$, $M = 0$

Điểm lớn nhất với $z = b$, $M = P \frac{ab}{l}$

Khi vẽ xong các biểu đồ ta kẻ những gạch theo phương vuông góc với trục dầm và đặt dấu vào trong các biểu đồ đó.

Ta thấy mặt cắt có lực cắt lớn nhất nằm trong đoạn AC:

$$Q_{\max} = \frac{P.b}{l} \quad (\text{nếu } b > a)$$

Và mặt cắt có mômen lớn nhất là tại điểm đặt lực P :

$$M_{\max} = \frac{P.ab}{l}$$

Chú ý: * Tại các mặt cắt có lực tập trung V_A , V_B , P biểu đồ Q có các bước nhảy, trị tuyệt đối của các bước nhảy này bằng trị số các lực V_A , V_B , P và tại các mặt cắt đó biểu đồ M gây khúc.

* Nếu lực tập trung P đặt tại điểm giữa của dầm ($a = b = \frac{l}{2}$) thì:

$$Q_{\max} = \frac{P}{2} \quad (6-8a)$$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \quad (6-8b)$$

Trường hợp này rất hay gặp, nên các trị số trên đáng ghi nhớ.

Ví dụ 6.2

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm chịu tải trọng phân bố đều trên suốt chiều dài với cường độ q (hình 6-9a)

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Trước hết ta phải xác định phản lực gối tựa V_A và V_B tại A và B

Coi hợp lực của lực phân bố $R = ql$ đặt tại chính giữa dầm, lập các phương trình cân bằng ta có:

$$\sum M_A = V_B l - ql \frac{l}{2} = 0, \text{ suy ra: } V_B = \frac{ql}{2}$$

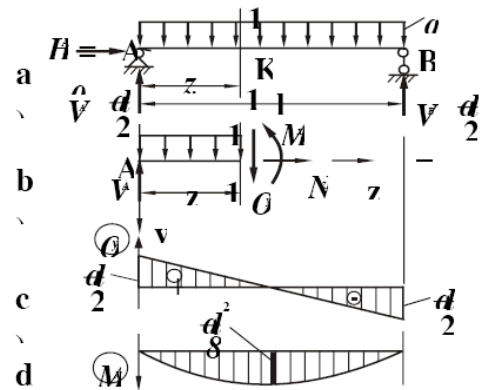
$$\sum M_B = ql \frac{l}{2} - V_A l = 0. \text{ suy ra: } V_A = \frac{ql}{2}$$

(Cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng vì tải trọng đối xứng nên phản lực $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$)

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M*

Trong suốt chiều dài của dầm, từ A đến B ngoại lực không thay đổi đột ngột, do đó dầm chỉ gồm một đoạn.

Để xác định nội lực, ta cắt dầm bằng mặt cắt 1-1 cách gối tựa A một đoạn z . Phần dầm phía trái mặt cắt chịu tác dụng của các ngoại lực V_A và lực phân bố đều trên chiều dài z có hợp lực qz (hình 6-9b), do đó ta có:



Hình 6.9

$$Q(z) = V_A - qz = q \frac{l}{2} - qz$$

$$M(z) = V_A z - qz \frac{z}{2} = q \frac{l}{2} z - q \frac{z^2}{2}$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

- Lực cắt Q là một hàm bậc nhất nên đường biểu diễn của nó là một đường thẳng (hình 6-9c), xác định bởi hai điểm: điểm đầu mút trái với $z = 0$, $Q = \frac{ql}{2}$; điểm đầu mút phải với $z = l$, $Q = -\frac{ql}{2}$.

- Mômen uốn M là một hàm bậc hai nên biểu đồ của M là một parabol bậc hai (hình 6-9d). Để vẽ biểu đồ M ta xác định một số điểm như sau:

$$\text{điểm mút trái với } z = 0, \quad M = 0;$$

$$\text{điểm gần mút trái với } z = \frac{l}{4} \quad M = \frac{3}{32}ql^2$$

$$\text{điểm giữa dầm với } z = \frac{l}{2} \quad M = \frac{ql^2}{8}$$

$$\text{điểm gần mút cuối với } z = \frac{3l}{4} \quad M = \frac{3}{32}ql^2;$$

$$\text{điểm mút cuối với } z = l \quad M = 0$$

Căn cứ vào biểu đồ Q , M trên hình 6-9 ta thấy tại mặt cắt chính giữa dầm có:

$$Q = 0; \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \quad (6-9)$$

Mặt cắt tại gối tựa A và B có:

$$|Q_{\max}| = \frac{ql}{2} \quad (6-10)$$

Ví dụ 6.3

Vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M của dầm dài l chịu tác dụng của mômen tập trung $M_o = m$ như hình 6-10.

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Xác định phản lực thẳng đứng V_A , V_B bằng cách lập các phương trình cân bằng:

$$\sum M_B = V_A l - m = 0, \text{ suy ra: } V_A = \frac{m}{l}$$

$$\sum M_A = V_B l - m = 0, \text{ suy ra: } V_B = \frac{m}{l}$$

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M*

Ta chia dầm ra làm 2 đoạn AC và CB, điểm C là vị trí phân đoạn vì tại đó có mômen tập trung m .

* *Biểu thức nội lực trong đoạn AC*:

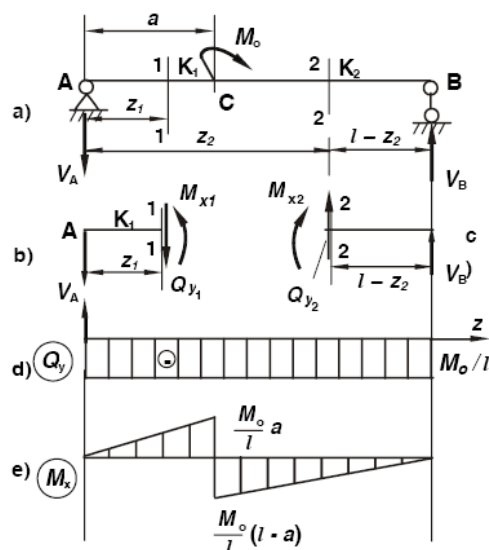
Tính nội lực tại mặt cắt 1-1 cách đầu trái dầm một đoạn z_1 bất kỳ (hình 6-10b), ta được :

$$\left. \begin{aligned} Q(z_1) &= -V_A = -\frac{m}{l} \\ M(z_1) &= -V_A z_1 = -\frac{m}{l} z \end{aligned} \right\} (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$\text{Khi } z_1 = 0 \rightarrow Q = -\frac{m}{l} \text{ và } M = 0$$

$$\text{Khi } z_1 = a, \rightarrow Q = -\frac{m}{l} \text{ và } M = -\frac{ma}{l}$$

* *Biểu thức nội lực trong đoạn CB*:



Hình 6.10

Nội lực trên mặt cắt 2-2, (hình 6.10c) cách đầu trái A của dầm một đoạn z_2 là :

$$\left. \begin{aligned} Q(z_2) &= -V_B = -\frac{m}{l} \\ M(z_2) &= V_B(l - z_2) = \frac{m}{l}(l - z_2) \end{aligned} \right\} \quad (a \leq z_2 \leq l)$$

Khi $z_2 = a$, $Q = -\frac{m}{l}$ và $M = \frac{m}{l}(l - a)$

Khi $z_2 = l$, $Q = -\frac{m}{l}$ và $M = 0$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

Trong đoạn AC và CB, biểu đồ Q là đường thẳng nằm ngang, còn biểu đồ M là đường thẳng xiên như hình 6.10d và 6.10e.

Từ các biểu đồ ta thấy :

$$|Q_{\max}| = \frac{m}{l} \quad (6-11)$$

$$|M_{\max}| = \frac{m}{l}(l - a) \quad \text{nếu } (l - a) > a \quad (6-12)$$

Chú ý: Ở mặt cắt có mômen tập trung tác dụng thì biểu đồ M có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của mômen tập trung. Nhưng tại mặt cắt có mômen tập trung đó, biểu đồ lực cắt Q không có gì thay đổi.

Ví dụ 6.4

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu lực phân bố như hình 6-11a.

Bài giải

a) *Xác định phản lực:* Trước hết, để xác định phản lực V_A và V_B ta có thể thay thế lực phân bố tam giác bằng hợp lực của chúng $R = q_0 \frac{l}{2}$, đi qua trọng tâm C của tam giác. Viết các phương trình cân bằng, ta được:

$$\sum M_A = V_B l - q_0 \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} = 0$$

$$\sum M_B = q_0 \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - V_A l = 0$$

Từ đó, rút ra:

$$V_B = \frac{q_0 l}{3}; V_A = \frac{q_0 l}{6}$$

b) Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M

Dầm này chỉ có một đoạn nên ta dùng một mặt cắt là đủ xác định được các biểu thức của nội lực Q và M . Xét mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z . Phần dầm phía trái chịu tác dụng của phản lực V_A và của hợp lực của lực phân bố, có trị số bằng diện tích tam giác A11 (hình 6.11b) và đi qua trọng tâm tam giác đó. Do đó nội lực tại mặt cắt 1-1 bằng:

$$Q(z) = V_A - q(z) \frac{z}{2}$$

$$M(z) = V_A z - q(z) \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

Cường độ lực phân bố $q(z)$ biến thiên bậc nhất theo z , ta có thể tính được $q(z)$ bằng tam giác đồng dạng: $\frac{q(z)}{q_0} = \frac{z}{l}$; Từ đó ta được: $q(z) = q_0 \frac{z}{l}$

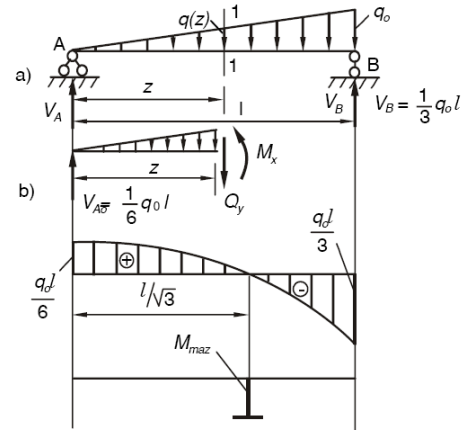
Thay trị số của $q(z)$ vào $Q(z)$ và $M(z)$, ta được:

$$Q(z) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} z^2 \quad (0 \leq z \leq l)$$

$$M(z) = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0}{6l} z^3$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

Vẽ đồ thị biểu diễn hàm bậc hai của $Q(z)$ và hàm bậc ba của $M(z)$ ở trên, ta được các biểu đồ nội lực của dầm (hình 6-11 c,d). Mômen uốn M sẽ đạt cực đại khi đạo hàm cấp một của $M(z)$ triệt tiêu.



Hình 6.11

Bảng 6.1

z	0	1/2	$\frac{1\sqrt{3}}{3}$	1
Q (z)	$\frac{q_0 l}{6}$	$\frac{q_0 l}{24}$	0	$-\frac{q_0 l}{3}$
M (z)	0	$0,0625q_0 l^2$	$0,0641q_0 l^2$	0

Vậy ta có thể tính được hoành độ của mặt cắt có $M_{\max}$, như sau:

$$\frac{dM}{dz} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{qz^2}{2l} = 0, \text{ rút ra: } z = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Như vậy: } M_{\max} = M \Big|_{z = \frac{l\sqrt{3}}{3}} = 0,0641 q_0 l^2 \quad (6-13)$$

$$z = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Tại mặt cắt $z = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, lực cắt $Q = 0$. Ta thấy tại mặt cắt giữa dầm: $z = \frac{l}{2}$, mômen uốn M bằng:

$$M \Big|_{z = \frac{l}{2}} = \frac{q_0 l^2}{16} = 0,0625 q_0 l^2 \quad (6-14)$$

Trị số mômen uốn này chỉ kém trị số cực đại 2,4%. Do đó, để tiện cho tính toán, người ta có thể coi mặt cắt giữa dầm có mômen uốn lớn nhất và bằng $0,0641 \cdot q_0 l^2$.

Ví dụ 6.5

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm công – xôn chịu tải trọng tập trung ở cuối dầm như hình 6.12.

Bài giải

Dùng mặt cắt 1-1, cách gốc ngàm A một đoạn z ($0 \leq z \leq l$). Xét cân bằng phần dầm phía phải mặt cắt 1-1, biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt 1-1 là:

$$\sum Z = 0 \text{ suy ra: } N = 0$$

$$\sum Y = 0, \text{ suy ra: } Q - P = 0, \rightarrow Q = P$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -M - P(l - z) = 0 \rightarrow M = -P(l - z)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên hình 6.12

Tại mặt cắt ở ngàm có nội lực lớn nhất:

$$Q_{\max} = P$$

$$M_{\max} = -P.l \quad (6-15)$$

Từ bài toán này ta rút ra nhận xét là khi vẽ biểu đồ Q và M của dầm công-xôn thì không cần xác định phản lực và ta chỉ xét phần dầm có nút tự do.

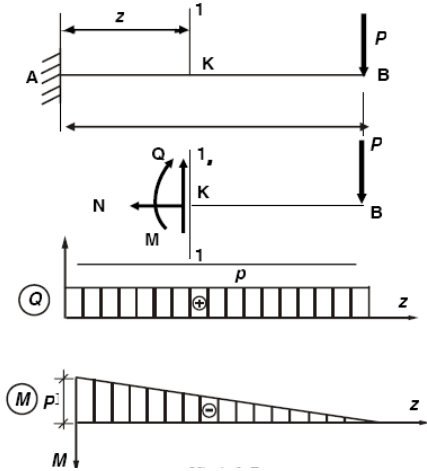
6.3.2.2. Một số quy luật của biểu đồ Q và M

Dựa vào Định lý Giu-rap-xki và các cách vẽ biểu đồ Q , M nêu trên, có thể rút ra một số quy luật của biểu đồ Q và M như sau:

a) Nếu trên một đoạn dầm không có tải trọng phân bố ($q=0$) nghĩa là $\frac{dQ}{dz} = 0, \frac{d^2M}{dz^2} = 0$, thì Q sẽ là hằng số và M sẽ là hàm bậc nhất trong đoạn đó. Do đó biểu đồ Q là một đường thẳng song song với trục hoành và biểu đồ M là một đường thẳng xiên.

Trường hợp đặc biệt, nếu $Q = 0$ thì M là hằng số và biểu đồ M là một đường thẳng song song với trục hoành.

b) Nếu trên một đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{hằng số}$) thì trong đoạn dầm đó, lực cắt Q là hàm bậc nhất, mômen uốn M là hàm bậc hai. Do đó, biểu đồ Q là một đường thẳng xiên, biểu đồ M là một parabol bậc hai. Trong trường hợp này, tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M sẽ qua cực trị. Nếu Q đổi dấu từ dương sang âm, M sẽ qua cực đại và nếu Q đổi từ âm sang dương, M sẽ qua cực tiểu.



Hình 6.12

c) Nếu trên một đoạn dầm có lực phân bố theo luật bậc nhất, thì lực cắt Q là hàm bậc hai và mômen uốn M là hàm bậc ba. Tại mặt cắt có $q = 0$ thì Q qua cực trị và M qua điểm uốn. Tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M qua cực trị.

6.3.2.3. Cách vẽ biểu đồ Q và M theo những điểm đặc biệt

Khi vẽ biểu đồ nội lực người ta làm theo các bước như đã nói ở trên, tức là lập biểu thức giải tích của $Q(z)$ và $M(z)$ và căn cứ vào đó mà vẽ biểu đồ. Tuy nhiên, ta có thể dựa vào các nhận xét rút ra ở các ví dụ trong 6.3.2.1 và dựa vào các tính chất đã nói trong 6.3.2.2. để tìm ra phương pháp vẽ biểu đồ Q , M theo những điểm đặc biệt.

Muốn vẽ biểu đồ Q , M theo những điểm đặc biệt ta cần theo các quy tắc chính như sau: vẽ biểu đồ từ mút trái sang mút phải của dầm; đường biểu diễn bao giờ cũng xuất phát từ trục hoành và cuối cùng lại trở về trục hoành.

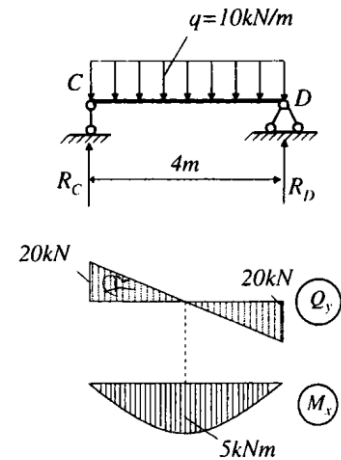
1. Khi vẽ biểu đồ Q :

- Tại mặt cắt có lực tập trung thì biểu đồ Q có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của lực tập trung, hướng bước nhảy trùng với hướng của lực tập trung.

- Tại mặt cắt có mômen tập trung, biểu đồ Q không có sự thay đổi gì.

- Nếu trên đoạn dầm không có lực phân bố ($q = 0$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng song song với trục z trong đoạn đó.

- Nếu trên một đoạn dầm có tải trọng phân bố đều ($q = \text{hằng số}$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng xiên theo hướng của tải trọng q trong đoạn đó. Trị số của lực cắt Q trong đoạn đó biến đổi, lượng biến đổi của lực cắt Q giữa hai mặt cắt bất kỳ bằng hợp lực của tải trọng phân bố trong đoạn dầm giữa hai mặt cắt đó.



Hình 6.13

Hình 6-13 nêu một ví dụ. Trong đoạn 4 m dầm chịu tải trọng phân bố đều hướng xuống nên biểu đồ Q là một đường xiên hướng xuống (kể từ trái sang phải). Lượng biến đổi của lực cắt Q giữa hai mặt cắt cuối và đầu của đoạn 4 m là:

$$|Q_2 - Q_1| = 4.q = 40 \text{ kN}$$

Lượng biến đổi của lực cắt Q trong đoạn từ $Q = 0$ đến cách mút trái $b(\text{m})$ là :

$$|0 - Q_1| = b.q;$$

$$\text{Do đó: } b = \frac{|Q_1|}{q} \quad (\text{m}) \quad (6-16)$$

2. Khi vẽ biểu đồ M

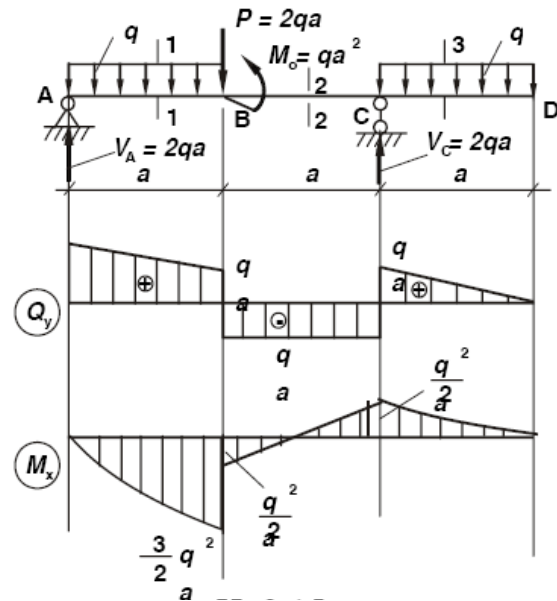
Tính trị số mômen uốn M tại các mặt cắt giới hạn những đoạn dầm mà ta đã phân chia để vẽ biểu đồ nội lực. Riêng vị trí có đặt mômen tập trung thì cần tính mômen uốn M hai mặt cắt bên trái và bên phải vị trí đó. Ngoài ra, ta cần có những chú ý như sau:

- Tại mặt cắt có lực tập trung, biểu đồ M bị gãy khúc.
- Tại mặt cắt có mômen tập trung, biểu đồ M sẽ có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của mômen tập trung đó; hướng của bước nhảy sẽ đi xuống nếu mômen tập trung quay cùng chiều kim đồng hồ và đi lên, nếu ngược lại.
- Trong đoạn dầm không có lực phân bố, biểu đồ M là một đường thẳng nằm ngang (nếu $Q = 0$) hoặc đường thẳng xiên (nếu $Q \neq 0$).

- Trong đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{hằng số}$), biểu đồ M là một đường parabol bậc hai. Đường cong này sẽ lồi về phía dưới nếu q hướng từ trên xuống dưới và ngược lại. Điểm cực trị của parabol ứng với điểm mà biểu đồ Q cắt trục hoành, tức là ứng với mặt cắt có $Q = 0$ (hình 6-13) và có vị trí xác định bởi (6-16).

Ví dụ 6.6

Cho một dầm chịu tải trọng như hình 6-14. Biết dầm chịu tải trọng phân bố



Hình 6.14

q , mômen tập trung $M_o = q.a^2$, lực tập trung $P = 2.q.a$. Khoảng cách mỗi đoạn dầm là a . Hãy vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M theo những điểm đặc biệt.

Bài giải

a) Xác định phản lực

Trước hết ta lập các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định phản lực:

$$\sum M_A = V_C.2a + M_o - P.a - q.a.\frac{a}{2} - q.a.\frac{5a}{2} = 0$$

Giải ra: $V_C = 2.q.a$

$$\sum M_C = -V_A.2a + M_o + P.a + q.a.\frac{3a}{2} - q.a.\frac{a}{2} = 0$$

Giải ra: $V_A = 2.q.a$

b) Phân đoạn và vẽ biểu đồ Q và M

Trong trường hợp này, ta phân dầm làm ba đoạn: AB, BC và CD

1. Vẽ biểu đồ Q : Ta hãy bắt đầu vẽ từ mút trái sang mút phải của dầm. Vì tại mút A có phản lực V_A hướng lên trên, nên từ điểm A trên trục hoành ta kẻ một đoạn thẳng AA_1 hướng từ dưới lên trên. Độ lớn đoạn AA_1 biểu thị lực cắt Q tại mặt cắt A và có giá trị bằng $V_A = + 2.q.a$. Trong đoạn AB dầm có tải trọng phân bố đều hướng xuống dưới nên biểu đồ Q là đoạn xiên xuống A_1B_1 . Vì hợp lực của phân bố trong đoạn AB là $q.a$, mà tung độ của điểm A là $2.q.a$, nên tung độ của điểm B sẽ là: $2.q.a - q.a = + q.a$. Đến điểm B có lực tập trung $P = 2.q.a$, chiều đi xuống, nên từ đây vẽ xuống một đoạn có trị số $2.q.a$. Từ B đến C không có lực phân bố hay lực tập trung nên ta vẽ tiếp một đường song song với trục hoành.

Tại C dầm chịu lực áp dụng $V_C = 2.q.a$ hướng lên nên biểu đồ Q có bước nhảy từ dưới lên trên là C_1C_2 và tung độ của C_2 là $2.q.a - q.a = + q.a$. Trong đoạn CD dầm chịu lực phân bố đều q hướng xuống nên biểu đồ Q là đường xiên C_2D hướng xuống. Hợp lực của lực phân bố trong đoạn này là $q.a$, mà tung độ của CB là $+ q.a$ nên tung độ của D bằng không, điểm D sẽ nằm trên trục hoành.

2. Vẽ biểu đồ M (hình 6.14). Trong đoạn AB biểu đồ M phải là đường cong bậc hai, vì trong đoạn đó lực cắt Q là bậc một. Tại mặt cắt A: $M_A = 0$, nên ta có điểm A với tung độ bằng 0 trên biểu đồ M . Tại mặt cắt trái sát điểm B: $M_B^{tr} = V_A.a - q.a.\frac{a}{2} =$

$\frac{3qa^2}{2}$, nên ta có điểm B_2 với tung độ $BB_2 = + \frac{3qa^2}{2}$ đặt về phía dưới trục hoành. Nối liền điểm A và điểm B_2 bởi đường cong bậc hai, ta sẽ được biểu đồ M trong đoạn AB.

Tại điểm B có mômen tập trung $M_0 = qa^2$ quay ngược chiều kim đồng hồ, do đó biểu đồ M có bước nhảy từ dưới lên trên với trị số tuyệt đối là qa^2 . Vậy tại mặt cắt phải sát điểm B, ta phải có: $M_B^{ph} = \frac{qa^2}{2}$ (vì: $M_B^{tr} + [M_B^{ph}] = - \frac{3qa^2}{2}$). Do đó ta có

điểm B_2 với tung độ $BB_3 = \frac{qa^2}{2}$ đặt về phía dưới trục hoành. Trong đoạn BC, ta xét

M_C : $M_C = - \frac{qa^2}{2}$, do đó điểm C có tung độ $\frac{qa^2}{2}$, đặt ở phía trên trục hoành. Biểu đồ M phải là đường thẳng bậc một đi về phía trên, nối hai điểm đặc biệt B_2 và C ta được biểu đồ đoạn BC.

Trong đoạn CD, dầm chịu lực phân bố đều nên biểu đồ M là một đường parabol bậc hai lồi về phía dưới. Tại mặt cắt C không có mômen tập trung nên biểu đồ M tại đó không có bước nhảy. Tại mặt cắt D: $M_D = 0$. Đường parabol C_2D biểu diễn biểu đồ M trong đoạn CD.

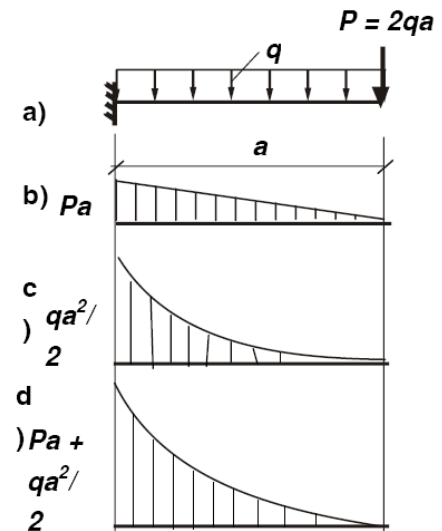
6.3.2.4. Phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ Q, M

Khi dầm chịu tác dụng của nhiều tải trọng, nếu dùng phương pháp như đã xét ở trên ta hoàn toàn vẽ được biểu đồ nội lực của dầm. Nhưng trong trường hợp này, nếu dùng *phương pháp cộng tác dụng* thì việc vẽ biểu đồ có thể sẽ đơn giản hơn. Ta hãy xét một số ví dụ sau đây:

Ví dụ 6.7

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu tải trọng như hình 6-15a.

Bài giải



Hình 6.15