

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

KHOA KINH TẾ - KẾ TOÁN

BỘ MÔN TOÁN KINH TẾ

.....

CAO TẤN BÌNH

Tailieu.vn

BÀI GIẢNG

LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN

Bình Định, 2015

CHƯƠNG 1

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

Thuật ngữ xác suất đề cập đến việc nghiên cứu tính ngẫu nhiên và không chắc chắn. Ngôn ngữ của xác suất thường xuyên được sử dụng một cách không chính thức trong cả văn nói và văn viết. Chẳng hạn như “Rất có khả năng giá cổ phiếu A sẽ tăng trong phiên giao dịch tới”, “Khoảng 50-50 cơ hội ông B sẽ tái đắc cử”, “Hy vọng rằng ít nhất 10,000 vé hòa nhạc sẽ được bán ra”. Chương 1 giới thiệu các khái niệm xác suất cơ bản, cho phép chúng ta diễn đạt các hiện tượng ngẫu nhiên bằng ngôn ngữ toán học một cách sáng sủa và logic. Các nghiên cứu về xác suất như một nhánh của toán học ra đời cách đây khoảng hơn 300 năm, bắt nguồn từ những câu hỏi liên quan đến các trò chơi ngẫu nhiên.

1.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ QUY TẮC ĐẾM

Quy tắc nhân

Một công việc được tiến hành qua k giai đoạn. Giai đoạn 1 có m_1 cách thực hiện, giai đoạn 2 có m_2 cách thực hiện, ..., giai đoạn k có m_k cách thực hiện. Khi đó có $n = m_1.m_2...m_k$ cách thực hiện công việc đó.

Tổ hợp

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{với } k, n \in \mathbb{N} \text{ và } 0 \leq k \leq n$$

Chỉnh hợp

$$A_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} \\ n^k \end{cases}$$

Hoán vị

$$P_n = \begin{cases} n! \\ \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \end{cases}$$

1.2 PHÉP THỬ VÀ CÁC LOẠI BIẾN CỐ

Phép thử

Khi quan sát một hiện tượng hay làm một thí nghiệm và chú ý đến kết quả của hiện tượng hay thí nghiệm đó, ta nói đã thực hiện một phép thử. Kết quả có thể xảy ra trong một phép thử gọi là các biến cố.

Ví dụ 1.2.1 Quan sát tình trạng hoạt động của một máy là một phép thử. Việc máy chạy tốt hay hỏng hóc là các biến cố.

Ví dụ 1.2.2 Tung một đồng xu là làm một phép thử. Mặt sấp xuất hiện hay mặt ngửa xuất hiện là các biến cố.

Ví dụ 1.2.3 Từ một lô sản phẩm gồm chính phẩm và phế phẩm, lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Khi đó việc lấy sản phẩm là phép thử, còn việc lấy được chính phẩm hay phế phẩm là các biến cố.

Các loại biến cố

Biến cố ngẫu nhiên: Là biến cố có thể xảy ra cũng có thể không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Ta thường ký hiệu các biến cố ngẫu nhiên bởi các chữ cái in: A, B, C, D,...

Biến cố chắc chắn: Là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Ta thường dùng ký hiệu U để biểu diễn biến cố chắc chắn.

Biến cố không thể có: Là biến cố không thể xảy ra khi thực hiện một phép thử. Ta thường dùng ký hiệu V để biểu diễn biến cố không thể có.

Ví dụ 1.2.4 Thực hiện phép thử tung một con xúc xắc. Khi đó biến cố ngẫu nhiên là A: mặt hai chấm xuất hiện, biến cố chắc chắn U là: mặt có số chấm nhỏ hơn 6 xuất hiện, và biến cố không thể có là: Mặt 7 chấm xuất hiện.

1.3 CÁC PHÉP TOÁN VỀ BIẾN CỐ

Tổng các biến cố

Biến cố E được gọi là tổng của hai biến cố A và B nếu E chỉ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xảy ra. Ký hiệu $E = A + B$.

Biến cố A được gọi là tổng của n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ nếu A chỉ xảy ra khi có ít nhất một trong n biến cố đó xảy ra. Ký hiệu $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$.

Tích các biến cố

Biến cố E được gọi là tích của hai biến cố A và B nếu E chỉ xảy ra khi cả hai biến cố A và B cùng đồng thời xảy ra. Ký hiệu $E = A.B$ hoặc $E = AB$.

Biến cố A được gọi là tích của n biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ nếu A chỉ xảy ra khi cả n biến cố này cùng đồng thời xảy ra. Ký hiệu $A = A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i$.

Ví dụ 1.3.1 Có hai danh sách lớp, mỗi danh sách đều có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên từ mỗi danh sách lớp. Gọi A là biến cố: chọn được nữ ở danh sách thứ nhất, B là biến cố: chọn được nữ ở danh sách thứ hai, E là biến cố: chọn được ít nhất một nữ, F là biến cố: chọn được cả hai nữ. Khi đó ta được $E = A + B$, và $F = AB$.

Biến cố đối

Biến cố B được gọi là biến cố đối của biến cố A nếu $A + B = U$ và $AB = \emptyset$. Ký hiệu $B = \bar{A}$.

Ví dụ 1.3.2 Trở lại ví dụ 1.3.1, nếu ta đặt M là biến cố: chọn được cả hai nam thì M là biến cố đối của biến cố E.

Các tính chất

$$A + A = A$$

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\overline{A + B} = \bar{A} \bar{B}$$

$$AB = BA$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

1.4 QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

Biến cố xung khắc nhau

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nhau nếu $AB = V$.

Nhóm n biến cố được gọi là xung khắc từng đôi nếu $A_i A_j = V, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.

Nhóm (họ) đầy đủ các biến cố

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ được gọi là một họ đầy đủ nếu chúng thỏa mãn hai điều kiện sau đây

$$(i) A_i A_j = V, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$$

$$(ii) A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$$

Ví dụ 1.4.1 Thực hiện phép thử gieo một con xúc xắc và ký hiệu $A_i, i = 1, \dots, 6$ là các biến cố mặt i chấm xuất hiện trong phép thử này. Khi đó Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_6$ tạo thành một nhóm đầy đủ.

Nhận xét: Hai biến cố đối nhau tạo thành họ đầy đủ.

1.5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Xác suất của một biến cố là một con số đặc trưng khả năng khách quan xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử. Ta có các kiểu định nghĩa khác nhau về xác suất của biến cố dưới đây.

Định nghĩa cổ điển về xác suất

Giả sử A là một biến cố nào đó trong một phép thử. Khi đó xác suất (probability) của A là

$$P(A) := \frac{m}{n}$$

Trong đó m là số các trường hợp có thể xảy ra A (số trường hợp thuận lợi cho A), n là số tất cả các trường hợp có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện (số trường hợp đồng khả năng của phép thử).

Ví dụ 1.5.1 Thực hiện phép thử tung một đồng xu. Gọi S là biến cố mặt sấp xuất hiện, khi đó ta có xác suất của S là $P(S) = 1/2$.

Ví dụ 1.5.2 Gieo một con xúc xắc (cân đối đồng chất). Gọi $A_i, i = 1, \dots, 6$ là biến cố mặt i chấm xuất hiện, khi đó ta được $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_6) = 1/6$.

Tính chất:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(U) = 1$$

$$P(V) = 0$$

Nhận xét: Xác suất của biến cố càng gần số 1 thì khả năng biến cố xảy ra càng cao, xác suất của biến cố càng gần số 0 thì khả năng biến cố xảy ra càng thấp.

Định nghĩa thống kê về xác suất

Xác suất xuất hiện biến cố A trong một phép thử là một số p không đổi mà tần suất xuất hiện biến cố đó trong n phép thử sẽ dao động rất ít xung quanh nó khi số phép thử tăng lên vô hạn. Như vậy về mặt thực tế với số phép thử đủ lớn ta có thể lấy $P(A) \approx f(A) = \frac{k}{n}$, với n là số phép thử và k là số lần xuất hiện biến cố A trong phép thử.

Ví dụ 1.5.3 Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung một đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau đây:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung n	Số lần được mặt sấp k	Tần suất $f(A)$
Buffon	4040	2048	0,5069
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Qua ví dụ này ta có thể nói rằng khả năng (xác suất) xuất hiện mặt sấp là 0,5.

Định nghĩa hình học về xác suất

Xác suất để điểm ngẫu nhiên rơi vào phần A của B là

$$P(A) = \frac{S_A}{S_B}$$

Trong đó S_A , S_B lần lượt là độ đo hình học (diện tích, thể tích,...) của A và B.

Ví dụ 1.5.4 Hai người hẹn gặp nhau tại một quán café trong khoảng thời gian từ 8h đến 9 giờ sáng, mỗi người có thể đến chỗ hẹn vào bất kỳ thời điểm nào trong khoảng thời gian này. Hôm đó cả hai cùng có việc bận đột xuất nên giao hẹn rằng người nào đến trước sẽ chờ người kia và thời gian chờ không quá 20 phút. Tính xác suất để hai người gặp được nhau.

Trả lời: Xác suất để hai người gặp được nhau là 5/9.

Định nghĩa tiên đề về xác suất

Cho $\mathfrak{M} = \{A \mid A \subset \Omega\}$, với Ω là không gian mẫu gồm các biến cố của phép thử. Nếu ánh xạ

$$P: \mathfrak{M} \rightarrow [0,1]$$

thỏa mãn các tính chất sau đây:

- (i) $0 \leq P(\Omega) \leq 1, \forall A \in \mathfrak{M}$
- (ii) $P(\Omega) = 1$
- (iii) $P(A + B) = P(A) + P(B), \forall AB = \emptyset$

Khi đó với mọi biến cố $A \subset \Omega$, giá trị $P(A)$ được gọi là xác suất của biến cố A.

Ba tính chất trên gọi là hệ tiên đề Kolmogorov.

Xác suất có điều kiện

Xác suất của biến cố phụ thuộc những gì được biết về kết quả phép thử.

Cho A, B là hai biến cố với $P(B) > 0$ (biến cố B đã xảy ra). Khi đó xác suất có điều kiện của biến cố A với biến cố B đã xảy ra được xác định như sau:

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ví dụ 1.5.5 Gieo một con xúc xắc. Gọi M là biến cố mặt một chấm xuất hiện, L là biến cố mặt lẻ chấm xuất hiện. Khi đó $P(M|L) = \frac{P(ML)}{P(L)} = 1/3$ và $P(L|M) = \frac{P(LM)}{P(M)} = 1$

Các tính chất về xác suất của biến cố

- Với A và B là hai biến cố cho trước bất kỳ, ta có $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Ví dụ 1.5.6 Trong một kết quả khảo sát gồm 100 người nữ có 60 người thích loại nước hoa E , 70 người thích loại nước hoa F , và 50 người thích cả hai loại nước hoa trên. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người này thích ít nhất một trong hai loại nước hoa.

- Nếu A và B là hai biến cố xung khắc nhau thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Ví dụ 1.5.7 Trong một thùng có 10 chi tiết máy trong đó có 2 chi tiết bị hỏng. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên ra 6 chi tiết thì có không quá 1 chi tiết bị hỏng.

- Với mọi biến cố A , ta có $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố, khi đó

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n)$$

- Nếu các A_i xung khắc nhau thì

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố, khi đó

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Ví dụ 1.5.8 Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 3 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên có thứ tự không hoàn lại 3 bóng để dùng. Tính xác suất để:

- Cả 3 bóng đều hỏng.
 - Cả 3 bóng đều không hỏng.
 - Có ít nhất 1 bóng không hỏng.
 - Chỉ có bóng thứ hai hỏng.
- Nếu các biến cố $A_1, A_2, \dots, A_n$ độc lập từng đôi thì

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$$

Ví dụ 1.5.9 Xác suất vi trùng kháng mỗi loại thuốc T_1, T_2, T_3 lần lượt là 5%, 10% và 20%. Nếu dùng cả 3 loại để diệt vi trùng thì xác suất để vi trùng bị tiêu diệt là bao nhiêu? Giả sử tác dụng tiêu diệt vi trùng của 3 loại thuốc độc lập nhau.

- Công thức xác suất đầy đủ: Cho $A, H_1, H_2, \dots, H_n$ là các biến cố, trong đó nhóm $H_1, H_2, \dots, H_n$ là một họ đầy đủ và $P(H_i) > 0$. Khi đó xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i)$$

Ví dụ 1.5.10 Có 3 hộp giống nhau. Hộp thứ nhất đựng 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm, hộp thứ hai đựng 15 sản phẩm trong đó có 10 chính phẩm, hộp thứ ba đựng 20 sản phẩm trong đó có 15 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Tìm xác suất để lấy được chính phẩm.

- Công thức Bayes: Cho $A, H_1, H_2, \dots, H_n$ là các biến cố, trong đó nhóm $H_1, H_2, \dots, H_n$ là một họ đầy đủ, $P(H_i) > 0$, và $P(A) > 0$. Khi đó xác suất có điều kiện của từng H_i với biến cố A đã xảy ra là

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) P(A | H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i)}$$

Ví dụ 1.5.11 Trước khi đưa sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó và thấy có 34 người trả lời “sẽ mua”, 96 người trả lời “có thể sẽ mua”, và 70 người trả lời “không mua”. Kinh nghiệm cho thấy khách hàng thực sự mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời trên là 40%, 20% và 10%.

- a. Hãy đánh giá thị trường tiềm năng của sản phẩm đó.
- b. Trong số khách hàng thực sự mua sản phẩm thì có bao nhiêu phần trăm trả lời “sẽ mua”?

Ví dụ 1.5.12 Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Khả năng bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất:

- a. Chỉ có một người bắn trúng
- b. Có người bắn trúng mục tiêu
- c. Cả hai người bắn trượt

ĐS: a. 0,26 b. 0,98 c. 0,02

Ví dụ 1.5.13 Tín hiệu thông tin được phát ba lần với xác suất thu được cử mỗi lần là 0,4.

- a. Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đó
- b. Nếu muốn xác suất thu được thông tin lên đến 0,9 thì phải phát ít nhất bao nhiêu lần

ĐS: a. 0,784 b. 5 lần

Ví dụ 1.5.14 Có hai xạ thủ loại I và tám xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8.

- a. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.
- b. Nếu chọn ra hai xạ thủ và mỗi người bắn một viên thì khả năng để cả hai viên đều trúng đích là bao nhiêu?

ĐS: a. 0,82 b. 0,67

Ví dụ 1.5.15 Tỷ lệ người dân nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người viêm họng trong số người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số người không hút thuốc lá là 40%.

- a. Chọn ngẫu nhiên một người, biết rằng người đó viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc.
- b. Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất để người đó nghiện thuốc.

ĐS: a. 0,3913 b. 0,222