

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ DẦU MỘT
KHOA ĐIỆN – ĐIỆN TỬ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT HÀM PHỨC TOÁN TỬ

BIÊN SOẠN: VĂN HOÀNG PHƯƠNG

LƯU HÀNH NỘI BỘ

CHƯƠNG 1: SỐ PHỨC

1. Dạng đại số của số phức

Số phức là các số có dạng $z = x + iy$ trong đó x, y là các số thực, còn i là **đơn vị ảo**. Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu là C . Vậy

$$C = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Trên tập hợp C , ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân số phức như sau

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + (y + y')i$$

$$(x + iy).(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

Dễ dàng kiểm tra được các phép toán $+$ và $.$ đều có tính giao hoán và kết hợp. Phép cộng có phần tử trung hoà là 0 và phép nhân có phần tử trung hoà là 1 .

Từ định nghĩa ta suy ra $i^2 = (0 + 1.i).(0 + 1.i) = (0.0 - 1.1) + (0.1 + 0.1)i = -1$.

Các số phức thường được ký hiệu ngắn gọn bằng chữ cái z . Ta thường viết “Cho số phức $z = x + iy$ ”.

Với số phức $z = x + iy$ thì x được gọi là **phần thực** của z và được ký hiệu là $x = \text{Re}(z)$, y được gọi là **phần ảo** của z và được ký hiệu là $y = \text{Im}(z)$.

Với số phức $z = x + iy$ thì số phức $\bar{z} = x - iy$ được gọi là **phức liên hợp** của z . Ta có các tính chất cơ bản sau đây

$$1) z + \bar{z} = 2x; z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$2) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$$

Đại lượng $\sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là $|z|$. Ta có các tính chất cơ bản sau (chứng minh!)

$$1) |z.z'| = |z|.|z'|$$

$$2) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Một số phức z khác 0 đều có nghịch đảo của nó. Cụ thể từ đẳng thức

$$z.\bar{z} = |z|^2$$

ta dễ dàng suy ra

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Từ đây ta cũng suy ra quy tắc chia hai số phức như sau

$$\frac{z}{z'} = z \cdot z'^{-1} = \frac{z \cdot \bar{z'}}{|z'|^2}.$$

Phép lũy thừa các số phức được thực hiện bằng phép nhân tuần tự.

Cuối cùng, ta xét bài toán khai căn số phức. Ví dụ, tìm căn bậc hai của số phức $1 + i$, tức là tìm số phức $z = x + iy$ sao cho $z^2 = 1 + i$. Ta có

$$z^2 = 1 + i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i.2xy = 1 + i$$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1, 2xy = 1$. Giải hệ này ta tìm được 2 giá trị của z là

$$z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{-2+2\sqrt{2}})$$

Bằng phương pháp này, ta có thể tìm được căn bậc hai của một số phức z bất kỳ. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp tương tự cho các căn bậc lớn hơn gặp nhiều khó khăn. Rất may mắn là để giải quyết vấn đề căn bản này, ta có thể sử dụng dạng lượng giác.

2. Dạng lượng giác của số phức

Số phức $z = x + iy$ có thể biểu diễn như điểm M có tọa độ (x, y) trong mặt phẳng Oxy . Ta gọi Ox là **trục thực**, Oy là **trục ảo** và Oxy là **mặt phẳng phức**. Đặt $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ và gọi φ là góc giữa OM và Ox thì ta có

$$a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$$

Từ đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Đây chính là **dạng lượng giác** của số phức z . Góc φ được gọi là **argument** của số phức z .

Để thấy rõ sự tiện lợi của dạng lượng giác, ta hãy xem kết quả của phép nhân hai số phức ở dạng lượng giác.

Giả sử $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ thì

$$z \cdot z' = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = rr'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi'\sin\varphi)] = r[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')].$$

Như vậy phép nhân hai số phức ở dạng lượng giác rất đơn giản: các môđun được nhân với nhau và các argument được cộng với nhau. Tương tự với phép nghịch đảo và phép chia:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'))$$

Nếu áp dụng tuần tự quy tắc nhân nói trên, ta dễ dàng chứng minh được công thức sau

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Công thức này được gọi là **công thức Moivre**.

Sử dụng công thức này, ta có thể dễ dàng tính lũy thừa của một số phức. Chẳng hạn nếu cần tính $(1+i)^{100}$, ta viết

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Từ đó

$$(1+i)^{100} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100} = 2^{50}\left(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}\right) = -2^{50}.$$

Chính sự đơn giản của phép lũy thừa sẽ giúp chúng ta có thể khai căn được các số phức. Giả sử ta cần tìm căn bậc n của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ta tìm căn dưới dạng $w = \rho(\cos\xi + i\sin\xi)$. Theo định nghĩa, w là căn bậc n của z khi và chỉ khi $w^n = z$. Từ đó, áp dụng công thức Moivre, ta được

$$\rho^n(\cos n\xi + i\sin n\xi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Từ đó suy ra

$$\rho = \sqrt[n]{r}, n\xi = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow \xi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

với k nguyên. Do tính tuần hoàn của hàm số $\sin x$ và $\cos x$, các giá trị k cách nhau một bội số của n sẽ cho ta các số phức w bằng nhau, vì vậy chỉ cần chọn $k = 0, 1, \dots, n-1$ là đủ. Ta có thể kết luận

Định lý. Cho n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r \neq 0$ là một số phức. Khi đó có đúng n căn bậc n của z , là

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chương 2: HÀM BIẾN PHỨC

I. HÀM BIẾN PHỨC

1.1. Định nghĩa

Quy tắc f cho tương ứng mỗi $z \in A$ với một hay nhiều giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ được gọi là một hàm biến phức z

Tập hợp A được gọi là miền xác định (MXĐ) của f

Tập hợp $B = \{\omega | \omega = f(z), z \in A\}$ gọi là tập giá trị của f

Nếu mỗi $z \in A$ ứng với một giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là **hàm đơn trị**, nếu mỗi $z \in A$ ứng với nhiều giá trị $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ thì f được gọi là **hàm đa trị**.

VD1: $f(z) = \frac{1}{z}$ là hàm đơn trị có MXĐ $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Trong $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\omega = f(z) = \sqrt{z}$ là hàm hai trị

Từ đây về sau ta chỉ xét hàm đơn trị

VD2: Cho $f(z) = z - 3\text{Im } z$. Tính $f(1)$, $f(-2i)$, $f(1-2i)$

VD3: Cho $f(z) = 3z + \bar{z}^2$. Tính $f(-1+3i)$

1.2. Phần thực và phần ảo của hàm biến phức

Với mỗi $z \in A$, $\omega = f(z) \in \mathbb{C}$ nên ta có thể viết: $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Các hàm $u(x,y) = \text{Re } \omega$ và $v(x,y) = \text{Im } \omega$ lần lượt gọi là phần thực hay phần ảo của hàm $f(z)$

VD4: Xác định phần thực và phần ảo của $\omega = z^2 + (1-i)\bar{z}$

VD5: Xác định phần thực và phần ảo của $f(z) = z - \frac{1}{z}$

1.3. Giới hạn của hàm biến phức

➤ Định nghĩa

Cho hàm biến phức $f(z)$ xác định trong lân cận của z_0 (có thể trừ điểm z_0). Số phức $a \neq \infty$ được gọi là giới hạn của $f(z)$ khi $z \rightarrow z_0$, kí hiệu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$,

nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| = \varepsilon$

Hàm phức $f(z)$ được gọi là có giới hạn ∞ khi $z \rightarrow z_0$, ký hiệu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, nếu

$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| = M$

Các giới hạn $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ được định nghĩa tương tự.

➤ **Định lý**

Nếu hàm phức $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ và $a = \alpha + i\beta$ thì

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = \alpha, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = \beta$$

Khi đó việc tính giới hạn hàm phức được chuyển thành việc tính giới hạn hai hàm biến thực. Do đó, các tính chất và phép tính giới hạn hàm phức tương tự như hàm thực.

1.4. Hàm số liên tục

➤ **Định nghĩa**

Cho hàm số $f(z)$ xác định trong miền chứa z_0 . Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục tại điểm z_0 nếu $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục trong miền B nếu $f(z)$ liên tục tại mọi điểm $z \in B$.

➤ **Nhận xét**

- Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ thì $u(x,y)$ và $v(x,y)$ liên tục tại (x_0, y_0)

VD6: a. $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 + i) = (1 + i)^2 + i = 3i$

b. Hàm phức $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM BIẾN PHỨC

2.1. Định nghĩa

Cho hàm số $\omega = f(z)$ xác định trong miền D chứa điểm $z = x + iy$. Cho z một số giả $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Gọi $\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$ là số giả tương ứng của $f(z)$. Nếu tỉ số $\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta z \rightarrow 0$ (theo mọi cách) thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $\omega = f(z)$ tại điểm z . Kí hiệu: $f'(z)$.

$$\text{Ta có: } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Chú ý:

- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì được gọi là khả vi tại điểm z
- $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z thì được gọi là liên tục tại z
- Đạo hàm của hàm biến phức có các tính chất và quy tắc tương tự như hàm biến số thực

VD1: Tính đạo hàm các hàm biến phức sau:

a) $f(z) = z^2$

b) $f(z) = \bar{z}$

2.2. Điều kiện khả vi Cauchy – Riemann (C-R)

➤ Định lý:

Nếu hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì các hàm hai biến thực $u(x, y)$ và $v(x, y)$ khả vi tại (x, y) và có các đạo hàm riêng tại (x, y) thỏa điều kiện C – R:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \quad (\text{C-R})$$

Chú ý: Hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ khả vi khi đạo hàm cấp 1 của nó liên tục

Ngược lại, nếu các hàm hai biến thực $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại (x, y) và thỏa điều kiện C – R thì hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ khả vi tại $z = x + iy$ và $f'(z) = u'_x + iv'_x$

Hệ quả: (Công thức tính đạo hàm)

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y$$

VD2: Xét sự khả vi của các hàm phức sau:

a) $\omega = z^2$

b) $f(z) = z \cdot \text{Re}z$

c) $\omega = 3\text{Re}z - \bar{z}$

Chú ý:

- Các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp và các công thức tính đạo hàm cơ bản của hàm thực vẫn áp dụng được cho hàm phức.
- Với $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ và $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ được xem như hàm 2 biến $z, \bar{z}$. Khi đó, điều kiện Cauchy – Riemann tương đương với $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f'_{\bar{z}} = 0$

VD3: Xét sự khả vi của hàm $f(z) = 2x - 4iy$

2.3. Hàm giải tích và hàm điều hòa

➤ Hàm giải tích

Hàm $\omega = f(z)$ gọi là giải tích trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc miền D

Hàm $\omega = f(z)$ gọi là giải tích tại z_0 nếu tồn tại 1 lân cận nào đó của z_0 sao cho $f(z)$ khả vi trong lân cận đó

VD4: a) Hàm $\omega = \bar{z}$ không giải tích $\forall z \in C$

b) Hàm $\omega = z^n$ khả vi tại $\forall z \in C$ nên giải tích trong C

c) Hàm $\omega = \frac{z}{1+z^2}$ giải tích tại $\forall z \in C \setminus \{\pm i\}$

Hai điểm $z = \pm i$ là điểm bất thường của hàm ω

➤ Hàm điều hòa

Hàm biến thực $u(x, y)$ được gọi là hàm điều hòa trong miền D nếu $u(x, y)$ thỏa phương trình Laplace: $\Delta u \equiv u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$

VD5: a) Hàm $u = x^2 - y^2$ là hàm điều hòa vì $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$

b) Hàm $u = \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trong toàn mặt phẳng trừ gốc tọa độ.

2.4. Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hòa

➤ Định lý 1

- Nếu hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ là hàm giải tích trong miền D thì $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là các hàm điều hòa trong miền D

VD7: Cho hàm phức $\omega = e^x (\cos y + i \sin y)$ giải tích trong C . CMR: các hàm $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ là các hàm điều hòa.

➤ Định lý 2

- Nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là hai hàm điều hòa liên hợp (nghĩa là thỏa điều kiện Cauchy – Riemann) trong D thì hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ giải tích trong D

Chú ý: Cho trước một hàm điều hòa, ta có tìm được hàm điều hòa liên hợp với nó (sai khác 1 hằng số). Vì vậy, khi cho trước phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích, ta có thể tìm được hàm giải tích đó (sai khác 1 hằng số)

VD8. Tìm hàm giải tích của hàm $f(z)$ biết phần thực $u = x^2 - y^2 + 2x$ và $f(0) = 0$

VD9: Tìm hàm giải tích $f(z)$ biết phần ảo $v(x, y) = e^x \sin y$

IV. CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

4.1. Hàm hữu tỉ

$$f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}$$

➤ Các trường hợp riêng của hàm hữu tỉ

- Hàm tuyến tính: $f(z) = az + b, D = C$
- Hàm lũy thừa: $f(z) = z^n, n \in Z, D = C$
- Hàm đa thức: $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n, D = C$
- Hàm phân tuyến tính: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, D = C \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

4.2. Hàm mũ và Logarit

a) Hàm mũ: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

❖ Tính chất

- Nếu $z = x$ thì $e^z = e^x$
- $|e^z| = |e^x| > 0$
- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- Hàm $\omega = e^z$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi i$
- Hàm $\omega = e^z$ khả vi với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $(e^z)' = e^z$

b) Hàm logarit $\omega = \operatorname{Ln} z$

➤ Định nghĩa:

Với $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$, ta có:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + k2\pi), (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Chọn $k = 0$ và ký hiệu $\operatorname{Ln} z$ ta được

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

➤ Tính chất:

- Hàm $\operatorname{Ln} z$ là hàm đơn trị xác định $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$
- Hàm $\omega = \operatorname{Ln} z$ khả vi $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$

4.3. Các hàm lượng giác và hyperbol

- Hàm cosin: $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$
- Hàm sin: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- Hàm cosin hyperbolic: $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$
- Hàm sin hyperbolic: $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sin(iz)$

Tất cả các tính chất và công thức lượng giác đã biết cũng đúng với các hàm lượng giác phức

Các hàm lượng hyperbol xác định và liên tục trên $\mathbb{C}$

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN CỦA HÀM PHỨC

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM PHỨC

1.1 Định nghĩa

Cho đường cong định hướng Joran C , tron từng khúc, có phương trình:

$z(t) = x(t) + iy(t)$, $t: a \rightarrow b$ và hàm phức $f(z)$ xác định liên tục trên C . Chia C thành n điểm chia liên tiếp: $z(a) = z_0, z_1, \dots, z_n = z(b)$.

Trên mỗi cung $z_{k-1}z_k$ ta chọn tùy ý điểm t_k ($k = \overline{1, n}$) và lập tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k)(z_k - z_{k-1})$$

Nếu khi $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$, tổng S_n dần đến giới hạn là $I \in \mathbb{C}$ (không phụ thuộc vào cách chia và chọn điểm t_k), thì I được gọi là tích phân của $f(z)$ dọc theo C hướng từ z_0 đến z_n . Kí hiệu $\int_C f(z)dz$

$$\text{Vậy } \int_C f(z)dz = \lim_{\max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)(z_k - z_{k-1})$$

Nếu đường cong có điểm đầu và điểm cuối lần lượt là A, B thì ta ký hiệu $\int_{AB} f(z)dz$.

Nếu đường cong C có điểm đầu và cuối trùng nhau thì ta ký hiệu $\oint_C f(z)dz$ với chiều của C là chiều dương.

1.2 Tính chất

Tích phân đường hàm phức dọc theo đường cong C có các tính chất như tích phân đường loại 2:

$$1. \int_C [f(z) + bg(z)]dz = a \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz$$

$$2. \text{ Nếu } C = C_1 \cup C_2 \text{ và } C_1 \cap C_2 = \emptyset \text{ thì } \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$$3. \int_{AB} f(z)dz = - \int_{BA} f(z)dz$$