

## Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

### 1.1. Mở đầu

#### 1.1.1. Khái niệm về toán kinh tế :

- **Toán kinh tế** hay còn gọi là *Kinh tế toán học* là một phân ngành của *Kinh tế học* nghiên cứu việc áp dụng toán học và phát triển các kỹ thuật toán học để giải quyết các vấn đề *Kinh tế học*.

- **Quy hoạch tuyến tính** ( linear programming \_ LP) là bài toán *tối ưu hoá*, trong đó *hàm mục tiêu* (objective function) và các *ràng buộc* đều là *hàm tuyến tính*.

#### 1.1.2. Bài toán quy hoạch tổng quát

Tìm vectơ  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  làm cực tiểu (hoặc cực đại) hàm số  $f(X)$ , với các điều kiện  $g_i(X) \leq 0, i = \overline{1, \dots, m}; x_j \geq 0, j = \overline{1, \dots, k}, k \leq n$ .

$$\min f(X) (\max f(X)) \quad (1.1)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} g_i(X) \leq 0, i = \overline{1, \dots, m}; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, \dots, k}, k \leq n; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

- Hàm  $f(X)$  gọi là **hàm mục tiêu**, các điều kiện (1.1), (1.2), (1.3) gọi là các **điều kiện buộc** của bài toán.

- Mỗi vectơ  $X = (x_j) \in R^n$  thỏa mãn hệ điều kiện buộc gọi là một phương án. Ta kí hiệu tập phương án là  $M$ .

- Một phương án làm cực tiểu (hoặc cực đại) hàm mục tiêu gọi là **phương án tối ưu** (hoặc gọi là **nghiệm**) của bài toán.

- Khi  $f(X)$  và  $g_i(X) (i = \overline{1, \dots, n})$  là các hàm tuyến tính,  $M \subset R^n$  thì bài toán đã cho được gọi là **Bài toán quy hoạch tuyến tính** (btqhtt).

### 1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính

#### 1.2.1. Một số mô hình thực tế

##### A. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một cơ sở có thể sản xuất hai loại sản phẩm A và B, từ các nguyên liệu I, II, III. Chi phí từng loại nguyên liệu và tiền lãi của một đơn vị sản phẩm, cũng như dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau đây:

| Nguyên liệu<br>Sản phẩm | I | II | III | Lãi |
|-------------------------|---|----|-----|-----|
| A                       | 2 | 0  | 1   | 3   |
| B                       | 1 | 1  | 0   | 5   |
| Dự trữ                  | 8 | 4  | 3   |     |

Hãy lập bài toán thể hiện kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất, trên cơ sở dự trữ nguyên liệu đã có.

### **Lập bài toán:**

Gọi  $x, y$  lần lượt là số sản phẩm A và B được sản xuất ( $x, y \geq 0$ , đơn vị sản phẩm). Khi đó ta cần tìm  $x, y \geq 0$  sao cho đạt lãi lớn nhất.

$$f(X) = 3x + 5y \rightarrow \max$$

với điều kiện nguyên liệu:

$$2x + y \leq 8;$$

$$1.y \leq 4;$$

$$1.x \leq 3;$$

Tức là cần giải bài toán:

$$f(X) = 3x + 5y \rightarrow \max$$

$$\text{với điều kiện: } \begin{cases} 2x + y = 8; \\ y \leq 4; \\ x \leq 3; \\ x, y \geq 0; \end{cases}$$

### **B. Bài toán phân công lao động:**

Một lớp học cần tổ chức lao động với hai loại công việc: xúc đất và chuyển đất. Lao động của lớp được chia làm 3 loại A, B, C, với số lượng lần lượt là 10, 20, 12. Năng suất của từng loại lao động trên từng công việc cho trong bảng dưới đây:

| Lao động<br>Công việc | A(10) | B(20) | C(12) |
|-----------------------|-------|-------|-------|
| Xúc đất               | 6     | 5     | 4     |
| Chuyển đất            | 4     | 3     | 2     |

Hãy tổ chức lao động sao cho có tổng năng suất lớn nhất.

**Lập bài toán:**

Gọi  $x_{ij}$  là số lao động loại  $j$  làm công việc  $i$  ( $j=1,2; x_{ij} \geq 0$ , nguyên). Khi đó, năng suất lao động của công việc đào đất sẽ là:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13};$$

còn chuyển đất sẽ là:  $4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23};$

Ta thấy rằng để có năng suất lớn nhất thì không thể có lao động dư thừa, tức là phải cân bằng giữa hai công việc. Vì vậy ta có bài toán sau:

$$6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} \rightarrow \max;$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 20; \\ x_{13} + x_{23} = 12; \end{cases}$$

**C. Bài toán khẩu phần thức ăn:**

Một khẩu phần thức ăn có khối lượng  $P$ , có thể cấu tạo từ  $n$  loại thức ăn. Giá mua một đơn vị thức ăn loại  $j$  là  $c_j$ . Để đảm bảo cơ thể phát triển bình thường thì khẩu phần cần  $m$  loại chất dinh dưỡng. Chất dinh dưỡng thứ  $i$  cần tối thiểu cho khẩu phần là  $b_i$  và có trong một đơn vị thức ăn loại  $j$  là  $a_{ij}$ .

Hỏi nên cấu tạo một khẩu phần thức ăn như thế nào để ăn đủ no, đủ chất dinh dưỡng mà có giá thành rẻ nhất.

**Lập bài toán:**

Gọi  $x_j$  ( $x_j \geq 0$ ) là số đơn vị thức ăn loại  $j$  được cấu tạo trong khẩu phần. Khi đó, giá thành của khẩu phần là:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j;$$

Vì phải đảm bảo thỏa mãn điều kiện đủ no và đủ chất, tức là:

$$\sum_{j=1}^n x_j = P, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1, m}.$$

Ta có bài toán sau:  $f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = P; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1, m}; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

Ta thấy rằng ba bài toán trên đều thuộc bài toán tổng quát.

### 1.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

#### A. Dạng hệ phương trình

Để nhất quán trong lập luận, ta xét bài toán tìm cực tiểu, sau đó ta xét cách đưa bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu.

\* Bài toán tổng quát của QHTT có dạng :

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1.4)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, \dots, k}; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{k+1, \dots, m}; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, r}, r \leq n; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

$$(1.7)$$

\* Chuyển bài toán tìm cực đại về bài toán tìm cực tiểu :

Nếu gặp bài toán tìm max, tức là :

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$X \in D$$

thì giữ nguyên ràng buộc, ta đưa nó về dạng bài toán tìm min :

$$g(X) = -f(X) = -\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$X \in D$$

#### Chứng minh :

Nếu bài toán tìm min có phương án tối ưu là  $X^*$  thì bài toán tìm max cũng có phương án tối ưu là  $X^*$  và  $g(X) = -f(X)$ .

Thật vậy,  $X^*$  là phương án tối ưu của bài toán tìm min, tức là

$$f(X^*) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j, \forall X \in D$$

$$\Rightarrow -\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j, \forall X \in D$$

$$\text{hay } -f(X^*) = g(X^*) \geq g(X), \forall X \in D$$

Vậy  $X^*$  là phương án tối ưu của bài toán max và

$$f_{\max} = -\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = -g_{\min} \quad (1.8)$$

## B. Dạng ma trận

Kí hiệu ma trận hàng  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{1 \times n}$  và các ma trận :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{n \times 1}^T$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)_{m \times 1}^T$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Trong đó T kí hiệu cho phép chuyển vị ma trận

Ta có bài toán:

$$CX \rightarrow \min \quad (1.9)$$

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

## C. Dạng véc tơ

Kí hiệu các véc tơ:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Ta có bài toán: } \min \langle CX \rangle \quad (1.11)$$

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = A_0 \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

### 1.2.3. *Dạng chính tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính*

Người ta thường xét bài toán QHTT dưới dạng sau:

$$f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1.13)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, \dots, m}; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (1.14)$$

$$(1.15)$$

Bài toán (1.13), (1.14), (1.15) được gọi là **Bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc**.

#### 1.2.4. Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc

**\*Phương pháp:** Ta có thể đưa bài toán tuyến tính tổng quát về bài toán tuyến tính dạng chính tắc tương đương nhờ các quy tắc sau:

- Nếu có  $\max f(X)$  thì đổi thành  $\{\min -f(X)\}$ .
- Nếu có bất đẳng thức  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  hoặc  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  thì ta đưa thêm ẩn phụ

$x_{n+i} \geq 0$ , với hệ số hàm mục tiêu  $c_{n+i} = 0$  để có:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i ;$$

- Nếu có ẩn  $x_k$  chưa ràng buộc về dấu, thì ta có thể thay nó bởi hai biến mới  $x_k'$  và  $x_k''$  không âm, theo công thức:

$$x_k = x_k' - x_k''.$$

#### **\*Các ví dụ:**

##### **Ví dụ 1.1**

Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$\min \{x_1 - x_2 - x_3\};$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} - 4x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 4; \\ x_1, x_3 \geq 0; \end{cases}$$

#### **Giải:**

Ta thấy có bất đẳng thức  $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 3$  nên ta đưa thêm ẩn phụ  $x_4, x_5 \geq 0$

Mặt khác, có ẩn  $x_2$  chưa ràng buộc về dấu, do đó ta thay  $x_2$  bởi  $x_2' - x_2''$ . Khi đó, bài toán ban đầu được chuyển về dạng sau:

$$(x_1 - x_2' + x_2'' - x_3) \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2' - x_2'' - x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 1.2**

Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7(1) \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1(2) \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10(3) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \\ x_1, x_5 \geq 0 \\ x_4 \leq 0 \end{cases}$$

**Giải:**

Vì  $x_2, x_3$  chưa ràng buộc về dấu nên ta thay  $x_2$  bởi  $x_2' - x_2'' (x_2', x_2'' \geq 0)$ ,  $x_3$  bởi  $x_3' - x_3'' (x_3', x_3'' \geq 0)$ ,  $x_4 \leq 0$  nên thay  $x_4$  bởi  $-x_4' (x_4' \geq 0)$ .

Vì có các bất đẳng thức (1), (2), (3) nên ta thêm các ẩn phụ  $x_6, x_7, x_8$ .

Từ đó, ta được bài toán sau:

$$2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5 \rightarrow \min$$

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + x_3' - x_3'' - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - x_7 = -1 \\ 2(x_2' - x_2'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \\ x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0 \end{cases}$$

**1.3. Mô tả bài toán QHTT và thuật toán đồ thị****1.3.1. Biểu diễn hình học quy hoạch tuyến tính hai biến**

Xét bài toán QHTT chuẩn tắc 2 biến

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min \quad (1.16)$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}; \end{cases} \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

- Ta thấy rằng:

$H = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$  chia  $\mathbb{R}^2$  thành hai nửa mặt phẳng:

$$D^+ = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 \geq b\}$$

$$D^- = \{x = (x_1, x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 \leq b\}$$

thì mỗi bất phương trình tuyến tính trong hệ ràng buộc

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m}$$

sẽ xác định một nửa mặt phẳng.

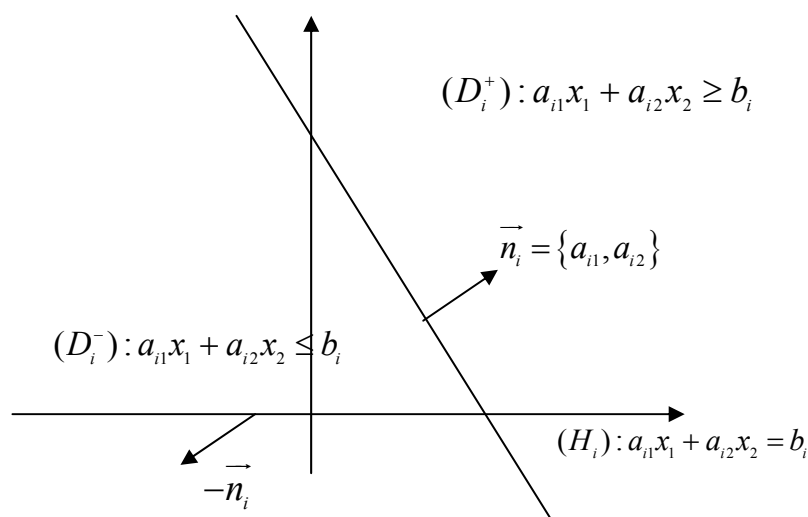
Vậy miền ràng buộc  $D$ , xác định bởi hệ ràng buộc là giao của  $m$  nửa mặt phẳng, sẽ là đa giác lồi hay khúc lồi ( $D \neq \emptyset$ ) hoặc không tồn tại ( $D = \emptyset$ ).

- Để xác định nửa mặt phẳng (1.17), ta phải xác định đường thẳng:

$$H_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad i = \overline{1, m}$$

Sau đó, xác định véc tơ pháp tuyến của nó:  $\vec{n}_i = \{a_{i1}, a_{i2}\}$   $i = \overline{1, m}$  thì phần nửa mặt phẳng ( $D_i^-$ ):  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, i = \overline{1, m}$  nằm về phía ngược hướng với  $\vec{n}_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ), còn nửa mặt phẳng ( $D_i^+$ ):  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i, (i = \overline{1, m})$  sẽ nằm về phía cùng hướng với  $\vec{n}_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ), kể cả biên của ( $H_i$ ).

**Chú ý:** Ngoài phương pháp xác định giữa mặt phẳng ( $D_i^-$ ) hoặc ( $D_i^+$ ) nêu trên, có thể xác định bằng cách: Xét điểm góc toạ độ  $O(0;0)$  thuộc nửa mặt phẳng nào bằng cách thay toạ độ  $O(0;0)$  vào hệ ràng buộc hoặc ngược lại.



Hình 1.1

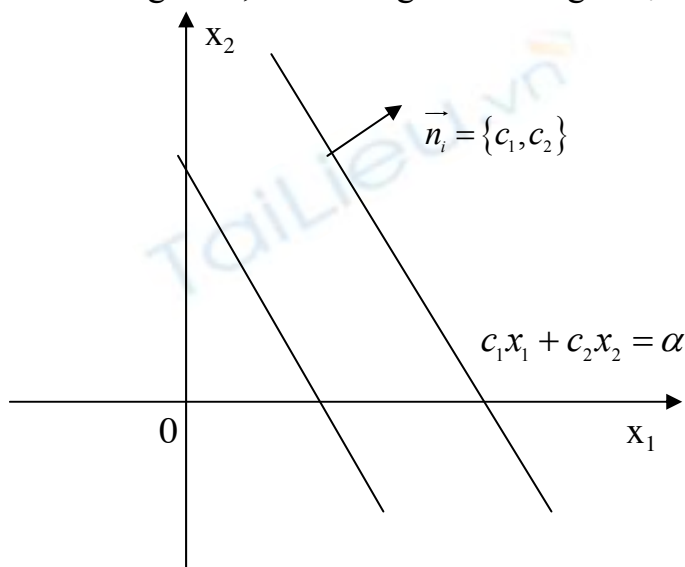


- Từ ý nghĩa hình học, đối với hàm mục tiêu  $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$  ta xét phương trình đường thẳng:  $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$  với  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  (1.19)

Ta thấy: Khi  $\alpha$  thay đổi, (1.19) sẽ xác định trên mặt phẳng tọa độ  $Ox_1x_2$  các đường thẳng song song với nhau (vì cùng vuông góc với vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$ ), gọi là các đường mức (mức giá trị  $\alpha$ ). Mỗi điểm  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in D$ , sẽ nằm trên đường mức với giá trị:  $\bar{\varepsilon} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$

Vậy theo ngôn ngữ hình học, có thể phát biểu bài toán QHTTCT như sau;

Trong số các đường mức, tìm đường mức với giá trị nhỏ nhất có thể:



Hình 1.2

$$\alpha_{\min} = c_1x_1^* + c_2x_2^* \text{ với } x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$$

Khi đó  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  là phương án tối ưu với  $f_{\min} = \alpha_{\min}$ .

### 1.3.2. Nhận xét

Hàm mục tiêu:  $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2$  có thể biểu diễn dưới dạng véc tơ, nhờ khái niệm của tích vô hướng:

$$f(X) = \langle cx \rangle \text{ với } c = (c_1, c_2), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Ta thấy } f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$$

Khi dịch chuyển song song các đường mức theo hướng véc tơ pháp tuyến thì giá trị đường mức sẽ tăng. Ngược lại, khi dịch chuyển theo hướng ngược lại thì giá trị đường mức sẽ giảm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán QHTT theo phương pháp hình học sau:

### 1.3.3. Thuật toán đồ thị

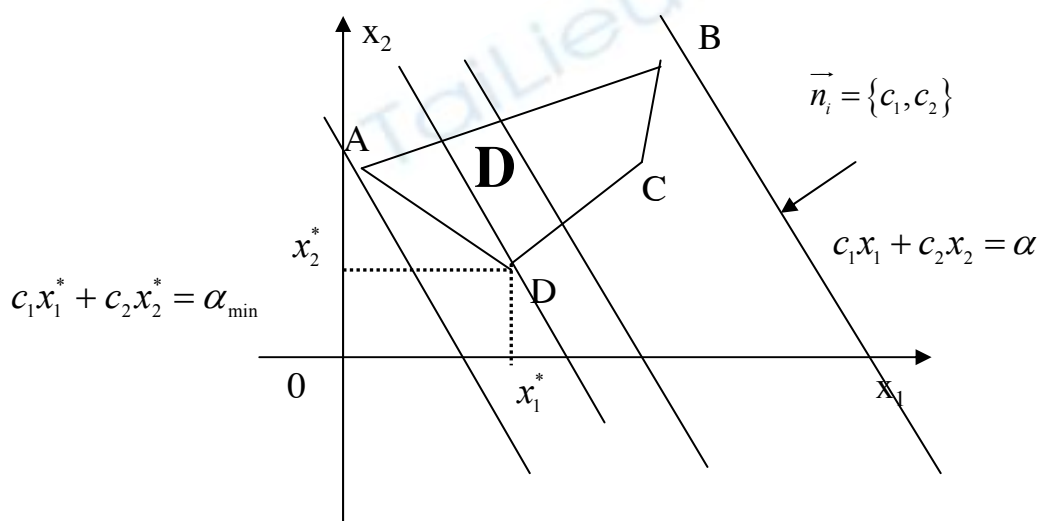
#### a) Thuật toán

**Bước 1.** Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng tọa độ vuông góc  $x_1Ox_2$ . Xác định miền ràng buộc D.

**Bước 2.** Vẽ đồ thị đường mức (\*)  $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$  với một giá trị  $\alpha$

**Bước 3.** Xác định véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$  và dịch chuyển song song các đường mức theo hướng của véc tơ  $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$ , cho tới vị trí tới hạn (vị trí tới hạn là vị trí mà đường mức vẫn còn cắt miền D, nhưng nếu tiếp tục dịch chuyển sẽ không cắt miền D nữa).

**Bước 4:** Điểm (hoặc nhiều điểm) của D nằm trên giao điểm của đường mức ở vị trí tới hạn với miền D, là lời giải của bài toán.



Hình 1.2

#### b) Ví dụ

##### \* Ví dụ 1

Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

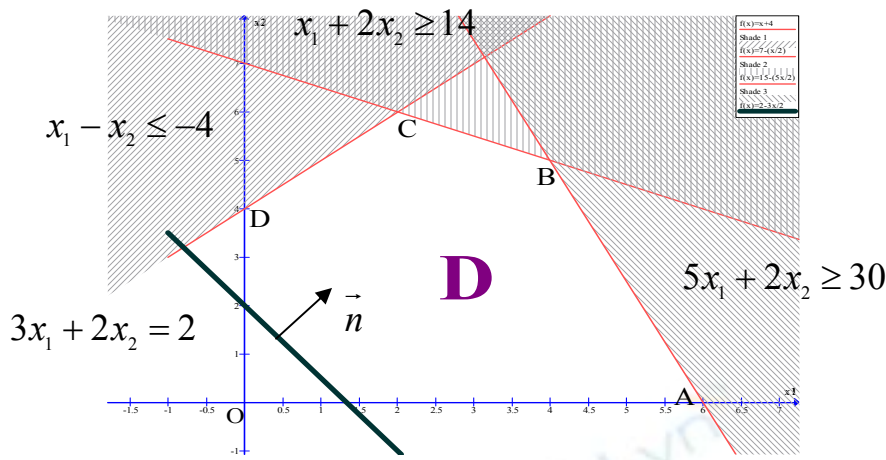
#### Giải

Biểu diễn các ràng buộc của bài toán lên mặt phẳng tọa độ  $x_1Ox_2$ , ta được miền ràng buộc D là đa giác lồi OABCD (hình 1.3).

Xét đường mức  $3x_1 + 2x_2 = 2$

Dịch chuyển đường mức theo hướng  $\vec{n}(3;2)$ , đỉnh  $B(4;5) \in D$  ở trên đường mức cuối cùng là điểm cực biên tối ưu:

$$X^* = (4,5) \Leftrightarrow \alpha_{\max} = f(X)_{\max} = 3.4 + 2.5 = 22$$



Hình 1.3

### \* Ví dụ 2

Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

$$\text{với điều kiện } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

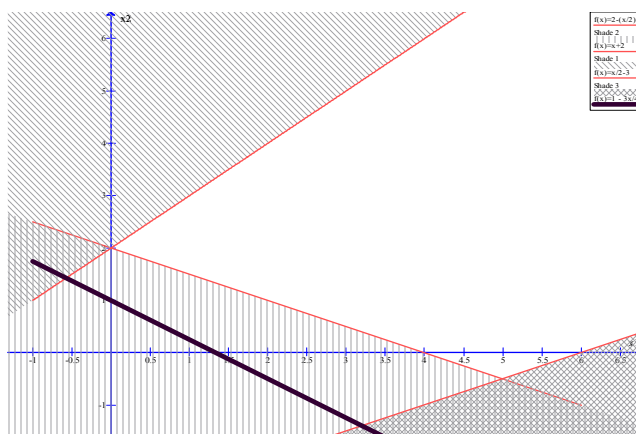
### Giải

Xác định miền ràng buộc D của bài toán là khúc lồi (hình 1.5)

Xét đường mức  $3x_1 + 4x_2 = 4$

Dịch chuyển song song các đường mức theo hướng ngược với  $\vec{n}(3;4)$  cắt D tại điểm A(0; 2) là duy nhất. Vậy A(0;2) là điểm cực biên tối ưu.

$$X^* = (0;2) \Leftrightarrow \alpha_{\min} = f(X)_{\min} = 3.0 + 4.2 = 8$$



Hình 1.5

**c) Chú ý**

- Với bài toán QHTT bất kỳ ta cũng có thể giải được bằng phương pháp hình học. Có thể xảy ra các trường hợp:
  - + Miền  $D = \emptyset$  tức là các nửa mặt phẳng xác định bởi hệ ràng buộc  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$  (hoặc  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ ) không có điểm chung và do đó bài toán vô nghiệm.
  - + miền D là đa giác lồi, thì có duy nhất một điểm cực biên là phương án tối ưu; hoặc có vô số phương án tối ưu, khi đó hai điểm cực biên là phương án tối ưu.
  - + Nếu D là khúc lồi (đa giác lồi không giới nội), thì bài toán có một phương án cực biên tối ưu, nếu D nằm về một phía đường mức cắt đường mức tại một điểm, hoặc bài toán có phương án tối ưu, nếu có 2 điểm cực biên là các phương án tối ưu, hoặc bài toán không có lời giải ( $f(x)$  không bị chặn).

## Bài tập

**1. Lập bài toán QHTT****\* Phương pháp:**

- Căn cứ vào yêu cầu của bài toán, phân tích các số liệu, đặt ẩn và xác định hàm mục tiêu
- Xác định các ràng buộc của bài toán
- Thiết lập bài toán

**\* Bài tập luyện tập**

**Bài 1.** Xí nghiệp sản xuất giấy có 3 phân xưởng. Do trang bị kỹ thuật khác nhau nên mức hao phí tre gỗ, axit để sản xuất một tấn giấy thành phẩm cũng khác nhau. Mức hao phí được cho trong bảng dưới đây:

|               | Mức hao phí nguyên liệu cho một tấn giấy |             |             |
|---------------|------------------------------------------|-------------|-------------|
| Nguyên liệu   | P.Xưởng I                                | P.Xưởng II  | P.Xưởng III |
| <b>Tre gỗ</b> | <b>1,4 tấn</b>                           | <b>1,3</b>  | <b>1,2</b>  |
| <b>Axit</b>   | <b>0,1</b>                               | <b>0,12</b> | <b>0,15</b> |

Số lượng tre gỗ có trong năm là 1.500.000 tấn, Axit là 100.000 tấn.

Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng số giấy sản xuất trong năm của xí nghiệp là nhiều nhất?

**Bài 2.** Một xí nghiệp có thể sản xuất bốn loại mặt hàng xuất khẩu H1, H2, H3, H4. Để sản xuất 4 loại mặt hàng này, xí nghiệp sử dụng hai loại nguyên liệu N1, N2. Số nguyên liệu tối đa mà xí nghiệp huy động được tương ứng là 600 kg và 800 kg. Mức tiêu hao mỗi loại nguyên liệu để sản xuất một mặt hàng và lợi nhuận thu được cho trong bảng sau:

| Định mức tiêu hao | H1 | H2 | H3 | <b>H4</b> |
|-------------------|----|----|----|-----------|
|-------------------|----|----|----|-----------|

| nguyên liệu và lợi nhuận |            |            |            |            |
|--------------------------|------------|------------|------------|------------|
| N1                       | 0,5        | 0,2        | 0,3        | <b>0,4</b> |
| N2                       | 0,1        | 0,4        | 0,2        | <b>0,5</b> |
| <b>Lợi nhuận</b>         | <b>0,8</b> | <b>0,3</b> | <b>0,5</b> | <b>0,4</b> |

Lập mô hình sao cho xí nghiệp sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất?

**Bài 3.** Xí nghiệp cơ khí Hùng Vương có 32 công nhân nam và 20 công nhân nữ. Xí nghiệp có hai loại máy: cắt và tiện. Năng suất trung bình của các công nhân đối với mỗi loại máy được cho trong bảng dưới đây:

| Năng suất công việc | Công nhân nam           | Công nhân nữ             |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|
| Máy cắt             | 30 chi tiết / giờ       | <b>22 chi tiết / giờ</b> |
| <b>Máy tiện</b>     | <b>25 chi tiết/ giờ</b> | <b>20 chi tiết / giờ</b> |

Biết rằng trong ngày cắt được bao nhiêu chi tiết thì tiện hết bấy nhiêu chi tiết. Hãy lập mô hình để xí nghiệp sản xuất được nhiều sản phẩm nhất?

**Bài 4.** Một công ty chuyên sản xuất 3 loại sản phẩm A, B, C. Trong đó, nguyên liệu để sản xuất ra 3 loại sản phẩm trên được nhập về từ hai nguồn N1, N2. Chi phí cho mỗi đơn vị nguyên liệu nhập từ N1 là 100000 USD và nguồn N2 LÀ 90000 USD.

Các loại sản phẩm sản xuất cần các đơn vị nguyên liệu của từng nguồn được cho trong bảng sau:

| Nguồn nguyên liệu | Loại sản phẩm |             |             |
|-------------------|---------------|-------------|-------------|
|                   | A             | B           | C           |
| N1                | 1000          | 2000        | <b>3000</b> |
| <b>N2</b>         | <b>2000</b>   | <b>1000</b> | <b>2000</b> |

Số lượng tối thiểu sản phẩm loại A cần sản xuất trong thời gian tới là 20000, sản phẩm loại B là 18000, sản phẩm loại C là 15000.

Hãy lập bài toán để tổng chi phí sản xuất mà công ty bỏ ra là nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo yêu cầu về sản phẩm?

**Bài 5.** Một cơ sở dự định sản xuất tối đa trong một ngày 500 ổ bánh mì dài và 500 ổ bánh mì tròn, muốn đạt lợi nhuận nhiều nhất, với những điều kiện như sau:

- Giá bán một ổ bánh mì dài làm từ 400g bột là 325 đồng, một ổ bánh mì tròn làm từ 250g bột là 220 đồng.
- Số lượng bột được cung cấp tối đa trong ngày là 225 kg với giá mỗi kg là 300 đồng.
- Lò nướng bánh cho phép nướng 75 ổ bánh mì dài hay 100 ổ bánh mì tròn trong một giờ nhưng không thể nướng hai loại cùng một lúc. Lò nướng hoạt động tối đa 8 giờ trong một ngày.

Hãy lập mô hình cho bài toán nêu trên?

**Bài 6.** Ba xí nghiệp A, B, C cùng có thể sản xuất áo vét và quần. Khả năng sản xuất của mỗi xí nghiệp như sau: Khi đầu tư 1000 USD vào xí nghiệp A thì thu được 35 áo vét và 45 quần; vào xí nghiệp B thì thu được 40 áo vét và 42 quần; vào xí nghiệp C thì thu được 43 áo vét và 30 quần. Lượng vải và giờ công sản xuất được cho trong bảng sau:

| Xí nghiệp | A       |       | B       |       | C       |       |
|-----------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
|           | vải/giờ |       | vải/giờ |       | vải/giờ |       |
| 1 áo vét  | 3,5m    | 20giờ | 4m      | 16giờ | 3,8m    | 18giờ |
| 1 quần    | 2,8m    | 10giờ | 2,6m    | 12giờ | 2,5m    | 15giờ |

Tổng số vải huy động được là 10000m

Tổng số giờ công huy động được là 52000 giờ.

Theo hợp đồng thì tối thiểu phải có 1500 bộ quần áo, nếu lẻ bộ thì quần là để bán

Hãy lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp bao nhiêu vốn để:

- Hoàn thành hợp đồng.
- Không khó khăn về tiêu thụ.
- Không bị đông giá về vải và giờ công.
- Tổng số vốn đầu tư là nhỏ nhất.

**Bài 7.** Một nhà máy cán thép có thể sản xuất hai loại sản phẩm: thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ. Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25 USD, một tấn thép cuộn là 30 USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn.

Nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để lợi nhuận thu được là cao nhất?

**Bài 8.** Có 3 người cùng phải đi một quãng đường dài 10km mà chỉ có một chiếc xe đạp một chỗ ngồi. Tốc độ đi của người thứ nhất là 4km/h, người thứ hai là 2km/h, người thứ ba là 2km/h. Tốc độ đi xe đạp của người thứ nhất là 16km/h, người thứ hai là 12km/h, người thứ ba là 12km/h.

Lập bài toán sao cho thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất?

**Bài 9.** Một nhà máy sản xuất ba loại thịt: bò, lợn và cừu với lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt cho trong bảng sau:

|     | Tươi | Nấu chín trong giờ | Nấu chín ngoài giờ |
|-----|------|--------------------|--------------------|
| Bò  | 8    | 14                 | 11                 |
| Lợn | 4    | 12                 | 7                  |
| Cừu | 4    | 13                 | 9                  |

Hãy lập bài toán sản xuất sao cho nhà máy đạt lợi nhuận cao nhất?

- Nếu có bất đẳng thức  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  hoặc  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  thì ta đưa thêm ẩn phụ

$x_{n+i} \geq 0$ , với hệ số hàm mục tiêu  $c_{n+i} = 0$  để có:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \quad \text{hoặc} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i ;$$

- Nếu có ẩn  $x_k$  chưa ràng buộc về dấu, thì ta có thể thay nó bởi hai biến mới  $x_k^+$  và  $x_k^-$  không âm, theo công thức:

$$x_k = x_k^+ - x_k^-.$$

### \* Bài tập luyện tập

Đưa các bài toán sau về dạng chính tắc:

**Bài 1.**  $-5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 2.**  $2x_1 - x_2 \rightarrow \max$

với điều kiện 
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 3.**  $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$

với điều kiện 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 4.**  $x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$

với điều kiện 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 5.**  $-5x_1 - 2x_2 - 10x_3/3 \rightarrow \min$

với điều kiện 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 46 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_5 \leq 38 \\ 3x_1 + x_3 \leq 21 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

## 2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp đồ thị

### \* Phương pháp:

**Bước 1.** Biểu diễn các điều kiện buộc của bài toán lên mặt phẳng tọa độ vuông góc  $x_1Ox_2$ . Xác định miền ràng buộc D.

**Bước 2.** Vẽ đồ thị đường mức (\*)  $C_1x_1 + C_2x_2 = \alpha$  với một giá trị  $\alpha$



**Bước 3.** Xác định véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$  và dịch chuyển song song các đường mức theo hướng của véc tơ  $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$ , cho tới vị trí tới hạn (vị trí tới hạn là vị trí mà đường mức vẫn còn cắt miền D, nhưng nếu tiếp tục dịch chuyển sẽ không cắt miền D nữa).

**Bước 4:** Điểm (hoặc nhiều điểm) của D nằm trên giao điểm của đường mức ở vị trí tới hạn với miền D, là lời giải của bài toán.

\* **Bài tập luyện tập:** Giải các bài toán sau đây bằng phương pháp đồ thị:

**Bài 1.**  $x_2 - x_1 \rightarrow \min$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 2.**  $x_2 - x_1 \rightarrow \max$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Bài 4.**  $x_1 - x_2 \rightarrow \max$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \leq 5 \end{cases}$$

**Bài 5.**  $-x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

**Bài 6.**  $5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

với điều kiện  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \end{cases}$

**Bài 7.**  $3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$

với điều kiện  $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Tailieu.vn

## Chương 2. TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

### 2.1. Một số kết quả cơ bản của giải tích lồi

#### 2.1.1. Tập hợp lồi

##### a) Định nghĩa

##### \* Định nghĩa 2.1

##### • Tổ hợp lồi

- Tập hợp  $M \subset R^n$  được gọi là tập hợp lồi nếu với bất kì  $X, Y \in M$  và  $\lambda \in [0, 1]$  ta có:  
 $Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y \in M$ ,

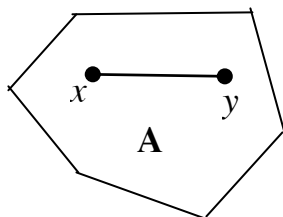
- Cho hệ hữu hạn điểm  $X_1, X_2, \dots, X_k \in R^n$ . Khi đó,  $X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  là tổ hợp lồi của hệ điểm đã cho.

##### • Đoạn thẳng

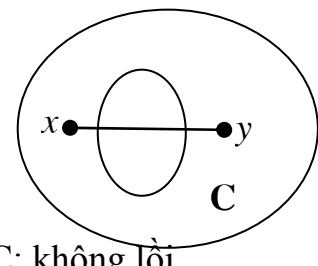
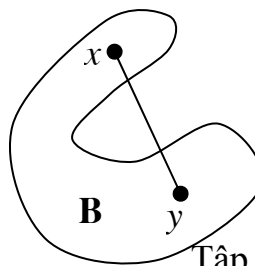
- Khi  $k = 2$ , ta có 2 điểm  $X_1, X_2$ . Khi đó,  
 $X_1 X_2 = \{X \in R^n : X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ,  $X_1 X_2$  được gọi là đoạn thẳng nối hai điểm  $X_1, X_2$ .

##### • Tập hợp lồi

Tập  $M$  là lồi khi và chỉ khi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trọn trong tập hợp.



Tập A: lồi



Tập B và C: không lồi

Hình 2.1

##### • Đa tập tuyến tính

Tập  $M \subset R^n$  được gọi là đa tập tuyến tính nếu:

$$Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y \in M, \forall X, Y \in M, \lambda \in R$$

##### • Điểm cực biên

Cho tập lồi  $M \subset R^n$ , điểm  $X \in M$  được gọi là điểm cực biên của  $M$  nếu  $X$  không thể biểu diễn thành tổ hợp lồi thực sự của hai điểm khác nhau thuộc  $M$ . Nghĩa là không thể tồn tại  $X_1, X_2$  thuộc  $M$  ( $X_1 \neq X_2$ ) sao cho:

$$Z = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, 0 \leq \lambda \leq 1$$

### b) Tính chất

1. Giao của các tập lồi là tập lồi
2. Hiệu và tổng của hai tập lồi là tập lồi
3. Tập đóng nhỏ nhất chứa tập lồi  $M$  được gọi là **bao đóng** của tập  $M$ , kí hiệu là  $\overline{M}$ .
  - Bao đóng của tập lồi là tập lồi.
4. Tập tất cả các điểm là tổ hợp lồi của các điểm thuộc  $M$  được gọi là bao lồi của  $M$ , kí hiệu là  $\text{co}(M)$ .
  - $\text{co}(M)$  là tập lồi bé nhất chứa  $M$  và là giao của tất cả các tập lồi chứa  $M$ .
5. Tổ hợp lồi của các tập lồi là tập lồi.
6. Tập  $M$  lồi khi và chỉ khi tổ hợp lồi của hữu hạn điểm thuộc  $M$  cũng thuộc  $M$ .
7. Cho  $C \in R^n, \lambda \in R$ , tập các điểm  $X \in R^n$  thỏa mãn điều kiện  $\langle C, X \rangle = \lambda$  gọi là **siêu phẳng** thuộc không gian  $R^n$ .
  - Cho  $M$  và  $Q$  là các tập lồi thuộc  $R^n, M \cap Q = \emptyset$ , khi đó tồn tại siêu phẳng  $\langle C, X \rangle = \lambda$  tách  $M$  và  $Q$ , nghĩa là tồn tại  $C \in R^n, \lambda \in R$  sao cho:

$$\langle C, X \rangle \leq \lambda, \forall X \in M \quad \text{và} \quad \langle C, Y \rangle \geq \lambda, \forall Y \in Q$$

8. Tập  $M = \left\{ X \in R^n : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i=1,2,\dots,m \right\}$  là tập lồi.  $M$  là tập lồi đa diện thuộc  $R^n$ .
  - **Tập phương án  $M$**  của bài toán quy hoạch tuyến tính là một **tập lồi đa diện**.
  - Điểm cực biên của tập lồi các phương án gọi là **phương án cực biên**.
9. Tập tất cả các phương án của bài toán QHTT khác rỗng là đa diện lồi.
10. Đa diện lồi  $M$  có hữu hạn điểm cực biên  $X_1, X_2, \dots, X_k$  và mọi điểm thuộc đa diện lồi là tổ hợp lồi của các điểm cực biên, nghĩa là mọi  $X \in M$  thì

$$X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

## 2.1.2. Hàm lồi

### a) Định nghĩa