

LÊ DŨNG MƯU và NGUYỄN VĂN HIỀN

NHẬP MÔN
GIẢI TÍCH LỖI ỨNG DỤNG

Nhà xuất bản
Khoa học tự nhiên và Công nghệ

Hà Nội 2009

Tailieu.vn

Mục lục

Mục lục	2
Mở đầu	7
Chương 1. Các khái niệm cơ bản	11
1.1. Tổ hợp lồi	11
1.2. Tập a -phần, tập lồi đa diện	14
1.3. Nón lồi	19
1.4. Bài tập	22
Chương 2. Điểm trong tương đối và phiếm hàm Minkowski . 25	
2.1. Điểm trong tương đối	26
2.2. Phiếm hàm Minkowski	30
2.3. Bài tập	32
Chương 3. Bao lồi và định lý Carathéodory	35
3.1. Bao lồi, bao a -phần, bao nón lồi	35
3.2. Định lý Carathéodory	38
3.3. Một ứng dụng trong quy hoạch toán học	44
3.4. Bài tập	47

Chương 4. Cấu trúc biên và biểu diễn tập lồi.....	49
4.1. Diện, điểm và hướng cực biên, siêu phẳng tựa	49
4.2. Trường hợp tập lồi đa diện.....	53
4.3. Định lý biểu diễn	61
4.4. Bài tập.....	63
Chương 5. Phép chiếu vuông góc và xấp xỉ tuyến tính của tập lồi.....	67
5.1. Toán tử chiếu và bất đẳng thức biến phân.....	68
5.2. Xấp xỉ tập lồi	76
5.3. Bài tập.....	78
Chương 6. Định lý tách các tập lồi.....	81
6.1. Các định lý tách và bổ đề Farkas	82
6.2. Mở rộng và ứng dụng	88
6.3. Bài tập.....	91
Chương 7. Đối cực của tập lồi.....	95
7.1. Định nghĩa và tính chất cơ bản.....	96
7.2. Trường hợp tập lồi đa diện.....	99
7.3. Bài tập	101
Chương 8. Định nghĩa và các tính chất cơ bản của hàm lồi....	103
8.1. Định nghĩa và ví dụ	103
8.2. Tính liên tục.....	109
8.3. Các phép toán bảo toàn tính lồi	116
8.4. Bài tập	124

Chương 9. Tính chất cực trị, bất đẳng thức lồi và Định lý Helley.....	127
9.1. Cực đại và cực tiểu của hàm lồi.....	128
9.2. Hạng của hàm lồi.....	135
9.3. Bất đẳng thức lồi.....	139
9.4. Định lý Helley.....	143
9.5. Bài tập.....	148
Chương 10. Hàm liên hợp và xấp xỉ tuyến tính.....	153
10.1. Định nghĩa và minh họa hàm liên hợp.....	154
10.2. Các tính chất và phép tính cơ bản.....	156
10.3. Xấp xỉ tuyến tính của hàm lồi.....	159
10.4. Bài tập.....	163
Chương 11. Đạo hàm theo hướng và dưới vi phân.....	167
11.1. Đạo hàm theo hướng.....	168
11.2. Dưới vi phân.....	173
11.3. Tính khả vi của hàm lồi.....	180
11.4. Tính đơn điệu và liên tục của dưới vi phân.....	184
11.5. Phép tính với dưới đạo hàm.....	190
11.6. Dưới vi phân xấp xỉ.....	198
11.7. Bài tập.....	202
Chương 12. Minimax và cân bằng.....	205
12.1. Hàm yên ngựa.....	206
12.2. Định lý minimax.....	210
12.3. Bài tập.....	225

Tài liệu tham khảo	227
Danh mục từ khóa	229

TaiLieu.vn

Mở đầu

Giải tích lồi là một bộ môn cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi cùng với những vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hoá, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng v.v... Có thể nói, giải tích lồi là một trong những bộ môn quan trọng nhất làm cơ sở toán học của tối ưu hoá và một số lĩnh vực khác.

Do phạm vi ứng dụng rộng rãi của giải tích lồi, nên hiện nay nhu cầu học tập, giảng dạy, nghiên cứu và ứng dụng bộ môn này ngày càng nhiều ở Việt Nam. Hiện đã có một số sách về giải tích lồi bằng tiếng nước ngoài, trong đó cuốn "Giải tích lồi" (Convex Analysis) của R. T. Rockafellar là một sách chuyên khảo tiếng Anh khá hoàn chỉnh về giải tích lồi trong không gian hữu hạn chiều. Tuy nhiên sách đã được viết từ năm 1970 và là một tài liệu khó đọc đối với những người mới bắt đầu làm quen lĩnh vực này. Về sách tiếng Việt, hiện mới chỉ có một quyển giải tích lồi viết trong không gian vô hạn chiều và do đó không đi sâu được vào những đặc tính riêng, cũng như những khía cạnh về mặt tính toán và những ứng dụng vốn rất phong phú của tập lồi và hàm lồi trong các không gian hữu hạn chiều.

Cuốn sách "Nhập môn giải tích lồi ứng dụng" này sẽ giới thiệu những vấn đề cơ bản nhất, nhưng khá đầy đủ về tập lồi và hàm

lỗi trong không gian hữu hạn chiều. Trong cuốn sách, các kết quả của giải tích lỗi được trình bày theo quan điểm nhấn mạnh vào các khía cạnh tính toán cũng như ứng dụng của tập lỗi và hàm lỗi trong tối ưu hoá, bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng.

Đối tượng của cuốn sách có thể là các sinh viên năm cuối, học viên cao học, nghiên cứu sinh các ngành toán ứng dụng. Sách cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho các thầy cô giáo giảng dạy môn giải tích lỗi. Những người làm trong các lĩnh vực khác như kinh tế, tài chính, quản lý và kỹ sư các ngành khoa học kỹ thuật muốn tìm hiểu về giải tích lỗi để áp dụng vào ngành chuyên môn của mình cũng có thể dùng sách như một tài liệu tham khảo. Cuốn sách được biên soạn dựa theo bài giảng của các tác giả cho sinh viên các năm cuối bậc đại học, học viên cao học, nghiên cứu sinh tại Viện Toán học Hà Nội, các trường đại học tại Hà Nội, Huế, Quy Nhơn, thành phố Hồ Chí Minh và các đại học ở CHLB Đức, Cộng hoà Pháp, Vương quốc Bỉ, Canada, v.v...

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Viện Toán học Hà Nội và Đại học Namur, FUNDP, Vương Quốc Bỉ đã tạo mọi điều kiện cho chúng tôi hoàn thành quyển sách này. Lời cảm ơn cũng xin gửi đến Giáo sư Jean-Jacques. Strodiot đã có những ý kiến quý báu cho nội dung và bố cục của cuốn sách. Xin cảm ơn TS. Vũ Văn Đạt và anh Trần Văn Thành đã giúp đỡ rất nhiều trong quá trình soạn thảo cuốn sách này.

Chúng tôi rất mong nhận được và chân thành cảm ơn mọi sự góp ý của độc giả.

Namur, Vương Quốc Bỉ, tháng 8-2008

Các tác giả

Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n -chiều trên trường số thực;
$\mathbb{R}_+^n$	góc không âm của $\mathbb{R}^n$ (tập các véc-tơ không âm);
$\mathbb{R}$	trục số thực ($\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$);
$\overline{\mathbb{R}}$	trục số thực mở rộng ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$);
$\mathbb{N}$	tập hợp số nguyên dương;
x_i	toạ độ thứ i của x ;
x^T	véc-tơ hàng (chuyển vị của x)
$\langle x, y \rangle = x^T y =$	tích vô hướng của hai véc-tơ x và y ;
$xy := \sum_{j=1}^n x_j y_j$	
$\ x\ $	= chuẩn Euclide của x ;
$\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$	
$\ x\ _1$	= chuẩn max của x
$\max\{ x_j \mid j = 1, \dots, n\}$	
$x \geq y$	có nghĩa là $x_j \geq y_j$ với mọi j ;
$[x, y]$	đoạn thẳng đóng nối x và y ;
(x, y)	đoạn thẳng mở nối x và y ;
$\overline{A}$	bao đóng của A ;
$\text{co}A$	bao lồi của A ;
$\text{cone}A$:	bao nón lồi của A ;
$\text{aff}(A)$	bao affine của tập A ;

$\text{ri}(A)$	tập điểm trong tương đối của tập A ;
$V(A)$	tập các điểm cực biên (đỉnh) của A ;
$\overline{\text{co}}A$:	bao lồi đóng của A ;
$\overline{\text{cone}}A$:	bao nón lồi đóng của A ;
$\text{re}A$:	nón lồi xa (nón các hướng vô hạn) của A ;
$\text{int}A$:	tập hợp các điểm trong của A ;
$\text{ri}A$:	tập hợp các điểm trong tương đối của A ;
A^* :	đối cực của A ;
$\dim A$:	thứ nguyên (số chiều) của tập A ;
$\text{lineality} A$:	độ phẳng của tập A ;
$\text{lin}A$:	không gian thẳng của A ;
$\bar{f}$:	hàm bao đóng của f ;
$L(f)$:	không gian thẳng của f ;
$\text{lin}f$:	thứ nguyên của $L(f)$;
$\text{rank}f$:	hạng của f ;
$\text{dom}f$:	tập hữu dụng của f ;
$\dim f$:	thứ nguyên của $\text{dom}f$;
f^* :	hàm liên hợp của f ;
$\text{epi}f$:	trên đồ thị của f ;
$\partial f(x)$:	dưới vi phân của f tại x ;
$\partial_\epsilon f(x)$:	ϵ -dưới vi phân của f tại x ;
$\nabla f(x)$	hoặc đạo hàm của f tại x ;
$f'(x)$:	
$f'(x, d)$:	đạo hàm theo hướng d của f tại x ;
KKT:	Karush-Kuhn-Tucker;
KT:	Kuhn-Tucker;
QHTT:	quy hoạch tuyến tính;
QHTP:	quy hoạch toàn phương.

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Tổ hợp lồi.....	11
1.2. Tập a-phin, tập lồi đa diện.....	14
1.3. Nón lồi.....	19
1.4. Bài tập	22

Trong giáo trình này, chúng ta sẽ làm việc với không gian Euclidean n -chiều trên trường số thực $\mathbb{R}$. Không gian này sẽ được ký hiệu là $\mathbb{R}^n$. Như vậy mỗi véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$ sẽ gồm n tọa độ là các số thực. Thông thường khi viết một véc-tơ x , nếu không có qui định gì thêm, ta luôn hiểu đó là véc-tơ cột. Phần này nhằm giới thiệu những khái niệm cơ bản nhất của tập lồi cùng với những tính chất đặc trưng của nó.

1.1. Tổ hợp lồi

Một đường thẳng nối hai điểm (hai véc-tơ) a, b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Đoạn thẳng nối hai điểm a và b trong $\mathbf{R}^n$ là tập hợp các véc-tơ x có dạng

$$\{x \in \mathbf{R}^n | x = \alpha a + \beta b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Tập lồi là một khái niệm cơ bản nhất của giải tích lồi, nó được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1. Một tập $C \subseteq \mathbf{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm (véc-tơ) $x^1, \dots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \forall j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Tương tự, x là *tổ hợp a-phin* của các điểm (véc-tơ) $x^1, \dots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Tập hợp của các tổ hợp a-phin của $x^1, \dots, x^k$ thường được gọi là *bao a-phin* của các điểm này.

Mệnh đề 1.1. Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \forall x^1, \dots, x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \in C.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều

cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, \dots, x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \forall j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$ và

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k \\ &= \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1$$

và $\frac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, \dots, k - 1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \xi y + \lambda_k x^k.$$

Do $\xi > 0, \lambda_k > 0$ và

$$\xi + \lambda_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1,$$

nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C . Vậy $x \in C$. $\square$

Lớp các tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng đại số và phép nhân tích Descartes. Cụ thể, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2. Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbf{R}^n$, C là lồi trong $\mathbf{R}^m$, thì các tập sau là lồi :

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\},$$

$$\lambda A + \beta B := \{x \mid x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\},$$

$$A \times C := \{x \in \mathbf{R}^{n+m} \mid x = (a, c) : a \in A, c \in C\}.$$

Chứng minh. Dễ dàng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa. $\square$

1.2. Tập a-phìn, tập lồi đa diện

Trong giải tích cổ điển, ta đã làm quen với các không gian con, các siêu phẳng v.v... Đó là các trường hợp riêng của tập a-phìn (đa tập a-phìn) được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.2. Một tập C được gọi là *tập a-phìn* nếu nó chứa đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó, tức là

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Vậy tập a-phìn là một trường hợp riêng của tập lồi. Như đã nêu, một ví dụ điển hình của tập a-phìn là các không gian con. Một ví dụ khác về tập a-phìn là siêu phẳng được định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.3. Siêu phẳng trong không gian $\mathbf{R}^n$ là một tập hợp các điểm có dạng

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid a^T x = \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbf{R}^n$ là một véc-tơ khác 0 và $\alpha \in \mathbf{R}$.

Véc-tơ a thường được gọi là véc-tơ pháp tuyến của siêu phẳng. Một siêu phẳng sẽ chia không gian ra hai nửa không gian. Nửa không gian được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.4. *Nửa không gian* là một tập hợp có dạng

$$\{x \mid a^T x \geq \alpha\},$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbf{R}$.

Đây là nửa không gian đóng. Tập

$$\{x \mid a^T x > \alpha\}.$$

là nửa không gian mở.

Như vậy một siêu phẳng chia không gian ra làm hai nửa không gian, mỗi nửa không gian ở về một phía của siêu phẳng. Nếu hai nửa không gian này là đóng thì phần chung của chúng chính là siêu phẳng đó.

Mệnh đề dưới đây cho thấy tập a -phin chính là ảnh tịnh tiến của một không gian con.

Mệnh đề 1.3. $M \neq \emptyset$ là tập a -phin khi và chỉ khi nó có dạng $M = L + a$ với L là một không gian con và $a \in M$, Không gian con L này được xác định duy nhất.

Chứng minh. Giả sử M là tập a -phin và $a \in M$. Khi đó $L = M - a$ là một không gian con. Vậy $M = L + a$. Ngược lại, nếu $M = L + a$ với L là không gian con, thì với mọi $x, y \in M, \lambda \in \mathbf{R}$ ta có

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = a + (1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a).$$

Do $x - a$ và $y - a$ đều thuộc L và do L là không gian con, nên

$$(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a) \in L.$$

Vậy

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in M.$$

Suy ra M là tập a -phân.

Không gian con L ở trên là duy nhất. Thật vậy, nếu $M = a + L$ và $M = a' + L'$, thì

$$L' = M - a' = a + L - a' = L + (a - a').$$

Do $a' \in M = a + L$, nên $a' - a \in L$. Suy ra $L' = L + a - a' = L$. $\square$

Không gian L trong mệnh đề trên được gọi là *không gian con song song* với M , hoặc nói ngắn gọn hơn là *không gian con* của M . *Thứ nguyên* (hay *chiều*) của một tập a -phân M được định nghĩa bởi thứ nguyên của không gian song song với M và được ký hiệu là $\dim M$.

Mệnh đề 1.4. Bất kỳ một tập a -phân $M \subset \mathbb{R}^n$ có số chiều r đều có dạng

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}, \quad (1.2)$$

trong đó A là ma trận cấp $(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$ và $\text{rank} A = n - r$. Ngược lại, mọi tập hợp có dạng (1.2) với $\text{rank} A = n - r$ đều là tập a -phân có số chiều là r .

Chứng minh. Giả sử M là tập a -phân có số chiều là r và $M = L + a$ với $a \in M$. Vậy $L = M - a$ là một không gian con có số chiều là r . Theo đại số tuyến tính, không gian con r chiều này có dạng

$$L = \{x \mid Ax = 0\}$$

với A là một ma trận cấp $m \times n$ và $\text{rank} A = n - r$. Từ $M = L + a$, suy ra

$$M = \{x \mid A(x - a) = 0\} = \{x \mid Ax = Aa = b\}.$$

Ngược lại, giả sử M được cho bởi (1.2). Để kiểm tra được rằng M là một tập a-phin và không gian con của M là tập $\{x | Ax = 0\}$. Do $\text{rank} A = n - r$, nên $\dim L = r$. Vậy $\dim M = r$. $\square$

Để tiện việc theo dõi, ta nhắc lại khái niệm độc lập a-phin đã quen biết trong đại số tuyến tính.

Định nghĩa 1.5. Các điểm $x^0, x^1, \dots, x^k$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *độc lập a-phin*, nếu bao a-phin của chúng có thứ nguyên là k .

Mệnh đề dưới đây cho một tính chất đặc trưng của các điểm độc lập a-phin.

Mệnh đề 1.5. Các điều sau đây là tương đương:

- (i) Các điểm $x^0, x^1, \dots, x^k$ độc lập a-phin,
- (ii) Với mỗi i , các điểm $x^j - x^i$ ($j = 0, 1, \dots, k, j \neq i$) độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Các điểm $(x^j, 1)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^{n+1}$.

Chứng minh. Gọi S là tập hợp gồm các điểm $x^0, x^1, \dots, x^k$ và L là không gian con của S . Không giảm tổng quát, cho $i = 0$. Đặt $y^j = x^j - x^0$ ($j = 1, \dots, k$). Hiển nhiên $y^j \in L$ với mọi j . Cho $x = \sum_{j=0}^k \mu_j x^j$ là một tổ hợp a-phin bất kỳ của các điểm $x^0, x^1, \dots, x^k$. Do $\sum_{j=0}^k \mu_j = 1$, nên $\mu_0 = 1 - \sum_{j=1}^k \mu_j$. Vậy $x = x^0 + \sum_{j=1}^k \mu_j y^j$. Suy ra $\text{aff} S = x^0 + \text{span}\{y^1, \dots, y^k\}$, trong đó $\text{span}\{y^1, \dots, y^k\}$ ký hiệu không gian con căng bởi các điểm $\{y^1, \dots, y^k\}$. Theo mệnh đề 1.3 ta có $L = \text{span}\{y^1, \dots, y^k\}$. Vậy $\dim L = k$ khi và chỉ khi các điểm $y^1, \dots, y^k$ độc lập tuyến tính. Chứng tỏ (i) và (ii) là tương đương.

Sự tương đương giữa (ii) và (iii) dễ dàng được chứng minh, dựa trực tiếp vào định nghĩa về sự độc lập tuyến tính. $\square$

Nhắc lại rằng một tập hợp $S \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là một *đơn hình* có thứ nguyên bằng k (hoặc nói ngắn gọn là k -đơn hình), nếu S là tổ hợp lồi của $k + 1$ véc-tơ độc lập a-phin. Các véc-tơ này được gọi là đỉnh của đơn hình. Ví dụ, một tam giác trong không gian 3 chiều là 2-đơn hình. Tập hợp

$$S_k := \{x \in \mathbf{R}^k \mid x \geq 0, \sum_{j=1}^k x_j \leq 1\}$$

được gọi là *đơn hình chuẩn tắc* trong $\mathbf{R}^k$.

Đơn hình là một trường hợp riêng của tập lồi đa diện, được định nghĩa ngay dưới đây.

Định nghĩa 1.6. Một tập được gọi là tập lồi đa diện, nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.

Như vậy, theo định nghĩa, tập lồi đa diện là tập hợp nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của một tập lồi đa diện được cho như sau:

$$D := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a^j, x \rangle \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Hoặc nếu ta ký hiệu A là ma trận có m hàng là các véc-tơ a^j ($j = 1, \dots, m$) và véc-tơ $b^T = (b_1, \dots, b_m)$, thì hệ trên viết được là:

$$D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Chú ý rằng do một phương trình

$$\langle a, x \rangle = b$$

có thể viết một cách tương đương dưới dạng hai bất phương trình

$$\langle a, x \rangle \leq b, \quad \langle -a, x \rangle \leq b,$$

nên tập nghiệm của một hệ hữu hạn các phương trình và bất phương trình cũng là một tập lồi đa diện.

Một số các tính chất cơ bản của tập lồi đa diện sẽ được trình bày trong các phần tiếp theo.

1.3. Nón lồi

Trong tối ưu hoá, bất đẳng thức biến phân, lý thuyết trò chơi và nhiều bộ môn toán ứng dụng khác, khái niệm về nón có một vai trò quan trọng.

Định nghĩa 1.7. Một tập C được gọi là nón nếu

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Theo định nghĩa, ta thấy rằng gốc tọa độ có thể thuộc nón hoặc không thuộc nón. Dĩ nhiên một nón không nhất thiết là một tập lồi. Ví dụ

$$C := \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$$

là một nón, nhưng không lồi. Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó đồng thời là một tập lồi. Một nón lồi được gọi là *nón nhọn* nếu nó không chứa đường thẳng. Khi đó ta nói 0 là đỉnh của nón. Nếu nón lồi này lại là một tập lồi đa diện thì ta nói nó là *nón lồi đa diện*. Một ví dụ điển hình của nón lồi đa diện, thường được sử dụng, là tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính có dạng

$$\{x \mid Ax \geq 0\},$$

với A là một ma trận thực cấp hữu hạn (số dòng và số cột là hữu hạn).

Mệnh đề 1.6. Một tập C là nón lồi khi và chỉ khi nó có các tính chất sau:

$$(i) \lambda C \subseteq C \quad \forall \lambda > 0,$$

$$(ii) C + C \subseteq C.$$

Chứng minh. Giả sử C là một nón lồi. Do C là một nón, nên ta có (i). Do C là một tập lồi, nên với mọi $x, y \in C$, thì $\frac{1}{2}(x + y) \in C$. Vậy theo (i) ta có $x + y \in C$.

Ngược lại, giả sử có (i) và (ii). Từ (i) suy ra ngay C là một nón. Giả sử $x, y \in C$ và $\lambda \in [0, 1]$. Từ (i) suy ra $\lambda x \in C$, và $(1 - \lambda)y \in C$. Theo (ii) có $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Vậy C là một nón lồi. $\square$

Một số nón điển hình. Dưới đây ta sẽ xét một số nón lồi điển hình thường được sử dụng trong giải tích lồi.

Tập lồi có một đặc trưng là: một tia xuất phát từ một điểm thuộc nó, thì hoặc nằm hẳn trong tập này hoặc một khi đã ra khỏi tập này thì sẽ không "trở lại".

Định nghĩa 1.8. Cho C là một tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. Một véc-tơ $y \neq 0$ được gọi là *hướng lùi xa* của C , nếu mọi tia xuất phát từ một điểm bất kỳ của C theo hướng y đều nằm trọn trong C , tức là: y là hướng lùi xa khi và chỉ khi

$$x + \lambda y \in C \quad \forall x \in C, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Một hướng lùi xa còn được gọi là *hướng vô hạn*. Ta sẽ ký hiệu tập hợp của tất cả các hướng lùi xa của C cùng với điểm gốc là $\text{re}C$. Tập hợp này được gọi là *nón lùi xa* của C . Hiển nhiên nếu C là một tập bị chặn, thì $\text{re}C$ chỉ gồm duy nhất điểm gốc. Chú ý rằng, nếu C là một tập lồi đóng, thì trong định nghĩa trên, thay vì đòi hỏi với mọi $x \in C$, chỉ cần đòi hỏi cho một điểm $x \in C$. Cụ thể ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.7. Giả sử C là một tập lồi đóng. Khi đó y là một hướng lùi xa của C khi và chỉ khi

$$x + \lambda y \in C \quad \forall \lambda \geq 0,$$

với một điểm x nào đó thuộc C .