

BỘ GIAO THÔNG VẬN TẢI
TRƯỜNG CAO ĐẲNG GIAO THÔNG VẬN TẢI TRUNG ƯƠNG I

GIÁO TRÌNH

Môn học: Toán kinh tế

NGHỀ: KẾ TOÁN DOANH NGHIỆP

TRÌNH ĐỘ: CAO ĐẲNG

MỤC LỤC

Lời nói đầu.....	4
Chương 1: Đại số tuyến tính.....	7
1. Vectơ n chiều và các phép tính.....	7
1.1. Định nghĩa	7
1.2. Các phép toán vectơ	7
1.3. Độc lập và phụ thuộc tuyến tính.....	7
2. Ma trận	7
2.1. Các khái niệm cơ bản.....	8
2.2. Các phép tính ma trận	9
2.3 Các phép biến đổi ma trận.....	11
3. Định thức	11
3.1. Cách xác định giá trị định thức.....	11
3.2. Tính chất của định thức	13
4. Ma trận nghịch đảo	14
4.1. Định nghĩa	14
4.2. Cách tìm ma trận nghịch đảo.....	14
5. Hệ phương trình tuyến tính	15
5.1. Khái niệm	15
5.2. Phương pháp giải	16
6. Bài tập	19
Chương 2: Phương pháp đơn hình và Bài toán đối ngẫu	19
1. Các khái niệm, tính chất chung của bài toán quy hoạch tuyến tính.....	21
1.1. Một số ví dụ thực tế dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính	21
1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính và các dạng đặc biệt	25
1.3. Phương án cực biên.....	30
1.4. Các tính chất chung của bài toán quy hoạch tuyến tính	31
2. Phương pháp đơn hình	31
2.1. Nội dung và cơ sở của phương pháp	31
2.2. Thuật toán của phương pháp đơn hình	33
2.3. Thuật toán mở rộng.....	38
3. Bài toán đối ngẫu	40
3.1. Định nghĩa	40
3.2. Sơ đồ viết bài toán đối ngẫu	41
4. Bài tập	45

Chương 3: Toán xác suất.....	50
1. Giải tích tổ hợp	50
1.1. Tính giai thừa, hoán vị	50
1.2. Tổ hợp, chỉnh hợp	51
2. Phép thử, các loại biến cố và xác suất của biến cố.....	53
2.1. Phép thử, biến cố.....	53
2.2. Các loại biến cố.....	53
2.3. Xác suất của biến cố.....	54
3. Định lý cộng xác suất.....	55
4. Định lý nhân xác suất.....	55
5. Công thức Bernoulli.....	56
5.1. Định nghĩa	56
5.2. Công thức Bernoulli.....	57
6. Công thức xác suất đầy đủ và Bayes	59
7. Biến ngẫu nhiên và quy luật phân phối xác suất.....	61
7.1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên và quy luật phân phối xác suất	61
7.2. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân phối xác suất	61
7.3. Hàm phân bố xác suất	61
7.4. Hàm mật độ xác suất	62
8. Các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên	63
8.1. Vọng toán (kỳ vọng toán).....	63
8.2. Phương sai	63
8.3 Độ lệch chuẩn	64
9. Một số quy luật phân phối xác suất thông dụng	65
9.1. Quy luật không - một	65
9.2. Quy luật nhị thức- $B(n,p)$	65
9.3. Quy luật phân phối đều – $U(a,b)$	67
9.4. Quy luật phân phối chuẩn- $N(\mu,\sigma^2)$	68
9.5. Quy luật khi bình phương	70
9.6. Quy luật Student T_n	70
10. Các định lý giới hạn	71
10.1 Bất đẳng thức Trêbusep	71
10.2 Định lý Trêbusep	71
11. Bài tập.....	71
Chương 4: Thống kê toán.....	75

1. Tổng thể nghiên cứu	75
1.1. Khái niệm	75
1.2. Các phương pháp mô tả tổng thể	75
1.3. Các tham số đặc trưng của mẫu ngẫu nhiên	76
2. Quy luật phân phối xác suất của một số thống kê đặc trưng mẫu	77
2.1. Biến ngẫu nhiên X phân phối theo quy luật chuẩn	77
2.2. Biến ngẫu nhiên X phân phối theo quy luật không - một	78
3. Ước lượng tham số	78
3.1. Ước lượng điểm cho kỳ vọng, phương sai và xác suất	78
3.2. Ước lượng khoảng tin cậy cho tham số P của biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật 0 - 1	81
3.3. Ước lượng kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn	81
3.4. Ước lượng phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn	82
4. Kiểm định giả thuyết thống kê	84
4.1. Khái niệm	84
4.2. Kiểm định về tham số P của biến ngẫu nhiên phân phối không - một	85
4.3. Kiểm định giả thuyết về kỳ vọng toán của biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn	87
4.4. Kiểm định giả thuyết về phương sai của biến ngẫu nhiên phân phối theo quy luật chuẩn	90
Tài liệu tham khảo	93

Lời nói đầu

Toán kinh tế là môn khoa học nhằm vận dụng toán học trong phân tích các mô hình kinh tế để từ đó hiểu rõ hơn các nguyên tắc và các quy luật kinh tế của nền kinh tế thị trường. Toán kinh tế cung cấp cho các nhà quản lý các kiến thức để họ có thể vận dụng vào việc ra các quyết định sản xuất.

Toán kinh tế (tiếng Anh là Mathematical Economics) là một lĩnh vực của Kinh tế, sử dụng các công cụ và phương pháp toán học để phân tích, đánh giá các vấn đề kinh tế, kinh doanh. Công cụ toán học cho phép các nhà kinh tế phân tích suy luận định lượng và xây dựng các mô hình đánh giá, dự báo về kinh tế, kinh doanh trong tương lai.

Ngành Toán kinh tế là ngành đào tạo cao đẳng, cử nhân đại học ngành Toán kinh tế có phẩm chất chính trị, đạo đức và sức khỏe tốt; có kiến thức cơ bản về kinh tế - xã hội, quản lý và quản trị kinh doanh; có kiến thức chuyên sâu về Toán ứng dụng trong kinh tế, quản lý và quản trị kinh doanh; có tư duy nghiên cứu độc lập; có năng lực tự học tập bổ sung kiến thức, nâng cao trình độ chuyên môn thích nghi với sự thay đổi của môi trường làm việc.

Chương 1: Đại số tuyến tính

1. Vector n chiều và các phép tính

1.1. Định nghĩa

Ta gọi một tập hợp bao gồm n số thực từ $x_1, x_2, \dots, x_n$ hoặc $y_1, y_2, \dots, y_n$ được sắp xếp theo một thứ tự nhất định (theo hàng hoặc theo cột) gọi là véc tơ n chiều và được ký hiệu là $X, Y, Z \dots$

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$$

.....

Ví dụ: $X_1 = [1, 2, 3, -1]$

$$X_2 = [-1, 4, 4, 0]$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Nếu sắp xếp theo chiều ngang gọi là véc tơ hàng (ví dụ X_1, X_2)

- Nếu sắp xếp theo chiều dọc gọi là véc tơ cột (ví dụ X_3)

Chú ý: $x_1, x_2, \dots, x_n$ gọi là các thành phần của véc tơ X

Các x_i gọi là các thành phần thứ i của véc tơ X

Nếu $X = Y$ tức là véc tơ $X =$ véc tơ Y

1.2. Các phép toán véc tơ

a. Phép nhân véc tơ với một số

Cho véc tơ $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ và một số k ($k \in \mathbb{R}$) vậy tích của k . X là

$$k.X = [k.x_1, k.x_2, \dots, k.x_n]$$

Ví dụ: cho véc tơ $X = [1, 2, 3, -1]$ và $k = 2$ hãy tính tích của $k.X$

$$k.X = [2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times -1]$$

$$= [2, 4, 6, -2]$$

Chú ý: Nếu $k = -1 \Rightarrow k.X = -X$ (là véc tơ đối của X)

$$\text{Nếu } k = 0 \Rightarrow 0.X = 0$$

b. Tổng hiệu hai véc tơ

Cho véc tơ $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ có n chiều, véc tơ $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ có n chiều điều kiện để hai véc tơ có thể cộng hoặc trừ cho nhau là chúng phải cùng chiều (hay cùng hướng)

$$X \pm Y = [x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n]$$

Ví dụ: Cho véc tơ $X = [1, 2, 3, -1]$ và véc tơ $Y = [2, 2, 6, -2]$ hãy tính $X + Y$

$$\begin{aligned} X + Y &= [1 + 2, 2 + 2, 3 + 6, -1 + -2] \\ &= [3, 4, 9, -3] \end{aligned}$$

Các tính chất:

- 1, $X + Y = Y + X$
- 2, $X - Y = Y - X$ khi $(X - Y) \cdot X$
- 3, $X - Y \neq Y - X$ khi $(X + Y)$

1.3. Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

a. Định nghĩa: Cho V là không gian véc tơ; $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$.

Xét điều kiện: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ (*)

Nếu điều kiện (*) chỉ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ thì S gọi là hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

S không độc lập tuyến tính thì S gọi là phụ thuộc tuyến tính, tức là $\exists \alpha_i \neq 0$ mà điều kiện (*) vẫn xảy ra.

b. Tính chất

- Hệ có duy nhất một véc tơ và véc tơ đó $\neq \theta$ thì độc lập tuyến tính.
- Mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính thì độc lập tuyến tính.
- Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính thì phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ véc tơ chứa một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại thì phụ thuộc tuyến tính.

2. Ma trận

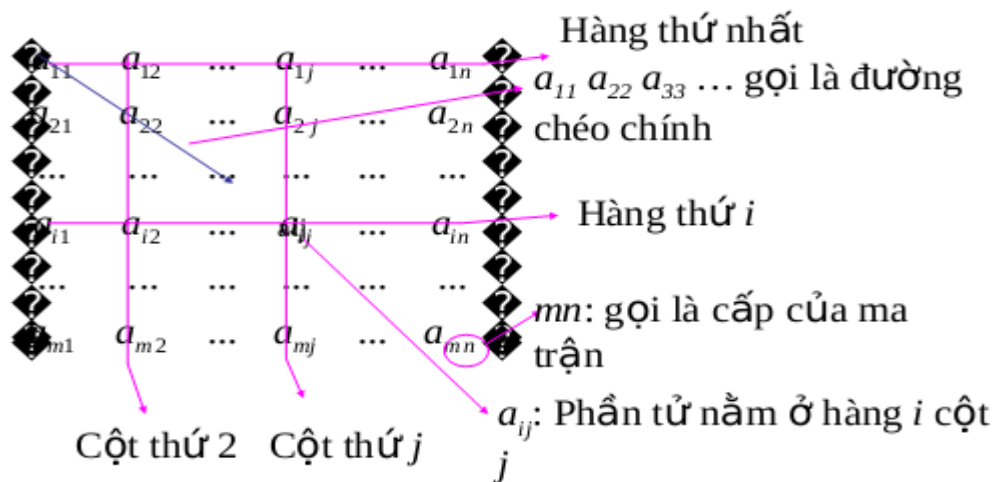
2.1. Các khái niệm cơ bản

- Khái niệm ma trận: Người ta gọi một bảng gồm $m \times n$ số thực được sắp xếp thành m hàng và n cột gọi là ma trận cấp $m \times n$

$$\text{Ký hiệu: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong đó:

- Mỗi số nằm trong ma trận được gọi là các phần tử, phần tử nằm trong ô hàng i , cột j được ký hiệu là a_{ij} .
- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ được gọi là đường chéo chính của ma trận
- mn : Được gọi là cấp của ma trận
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ được gọi là hàng thứ nhất của ma trận



Ma trận trên có thể viết dưới dạng tổng quát là: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- **Khái niệm ma trận vuông:** Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột ($m = n$)
- **Ma trận có tất cả các phần tử bằng 0** gọi là ma trận không, ký hiệu là 0
- **Ma trận đối:** Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ thì ma trận $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ gọi là ma trận đối của ma trận A
- **Ma trận chuyển vị:** Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ma trận chuyển vị của ma trận A là $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ (nghĩa là ta đổi hàng thành cột hoặc cột thành hàng thì ta được ma trận chuyển vị A^t)

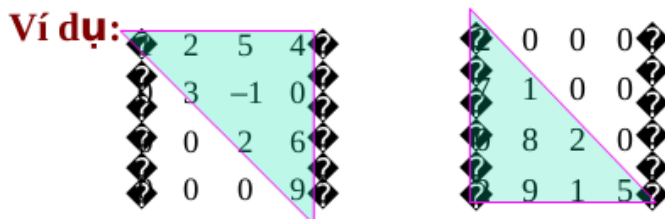
Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

- **Ma trận bằng nhau:** Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$; $B = (b_{ij})_{m \times n}$, ma trận $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$

- **Ma trận tam giác:** Là ma trận vuông có

$$a_{ij} = 0, \forall i > j. \text{ (tam giác trên)}$$

$$a_{ij} = 0, \forall i < j. \text{ (tam giác dưới)}$$



2.2. Các phép tính ma trận

a. Phép nhân ma trận với một số.

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $k \in \mathbb{R}$; tích $k.A$ là một ma trận cấp $m \times n$ xác định bởi:

$$k.A = (k.a_{ij})_{m \times n}$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ và $k = 2$. Hãy tính $k.A$

$$k.A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.2 & 5.2 \\ 4.2 & -1.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

* Các tính chất

$$k(A + B) = k.A + k.B$$

$$(k + h).A = kA + hA$$

$$k(h.A) = (k.h)A$$

$$1.A = A$$

$$0.A = 0$$

b. Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{p \times n}$ (số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B). Tích của A và B là ma trận $C = A.B$ cấp $m \times n$, mỗi phần tử C_{ij} của C được xác định như sau:

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Như vậy muốn tìm phần tử ở dòng i, cột j của ma trận tích, ta nhân các phần tử ở dòng i của ma trận đứng trước với các phần tử tương ứng ở cột j của ma trận đứng sau rồi cộng các tích lại với nhau.

Ví dụ: cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ hãy tính tích của A.B

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.1+2.(-1)+3.3 & 1.1+2.2+3.0 \\ 3.1+2.(-1)+1.3 & 3.1+2.2+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Chú ý: - Phép nhân ma trận A, B chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B do vậy khi A.B thực hiện được thì B.A chưa chắc đã thực hiện được. Trong trường hợp A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, hoặc A là ma trận cấp $m \times n$, B là ma trận cấp $n \times m$ thì A.B và B.A cũng thực hiện được nhưng nói chung $A.B \neq B.A$

$$- A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ hoặc } B = 0$$

* Tính chất

$$1, A(B+C) = AB + AC$$

$$2, (B + C)A = BA + CA$$

$$3, k(B.C) = (kB).C = B(kC)$$

c. Tổng hoặc hiệu của hai ma trận

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$ là hai ma trận cùng cấp $m \times n$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \text{ tức là } (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Như vậy muốn cộng 2 ma trận cùng cấp, ta cộng các phần tử ở cùng vị trí của hai ma trận thành phần

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 3+2 \\ 2+1 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

* Tính chất:

$$1, A + B = B + A$$

$$2, A + 0 = 0 + A = A$$

$$3, A + (-A) = 0$$

$$4, (A+B) + C = A + (B + C)$$

2.3 Các phép biến đổi ma trận.

- Đổi chỗ hai dòng hoặc cột
- Nhân tất cả các phần tử của một dòng (hoặc cột) với cùng một số khác không
- Cộng vào các phần tử của một dòng (cột) các phần tử tương ứng của một dòng (cột) khác sau khi đã nhân với cùng một số nào đó

Mỗi ma trận cấp $m \times n$ có thể được xem là một hệ gồm m vec tơ dòng hoặc n vec tơ cột, do đó các phép biến đổi sơ cấp đối với ma trận thực chất là các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vec tơ dòng và hệ vec tơ cột của ma trận đó.

3. Định thức

3.1. Cách xác định giá trị định thức

3.1.1 Ma trận con

Cho A là ma trận vuông cấp n :
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nếu ta bỏ đi dòng và cột chứa phần tử a_{ij} , tức là bỏ dòng i và cột j của ma trận A thì ta thu được ma trận vuông cấp $n - 1$ ký hiệu là M_{ij} gọi là ma trận con tương ứng với a_{ij}

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$