

Chương 3

Lý thuyết đối ngẫu

Mục lục chương 3

3.1 Định nghĩa bài toán đối ngẫu	64
3.2 Các định lý về đối ngẫu	74
3.3 Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu	81
3.4 Bài tập chương 3	89

3.1 Định nghĩa bài toán đối ngẫu

Ví dụ 3.1. Có m loại nguyên liệu dự trữ dùng để sản xuất ra n loại sản phẩm. Để làm ra một sản phẩm j cần a_{ij} nguyên liệu i cho như bảng sau:

$\begin{matrix} SP \\ \backslash \\ NL \end{matrix}$	x_1 1	x_2 2	$\cdots$	x_n n	NL dự trữ
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Trong đó, lượng nguyên liệu dự trữ thứ i là b_i và giá bán mỗi sản phẩm j là c_j . Yêu cầu tìm số lượng sản phẩm $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho tổng doanh thu lớn nhất.



Giải. Tổng doanh thu lớn nhất

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Khi đó tổng lượng nguyên liệu loại 1 sử dụng phải nhỏ hơn hoặc bằng b_1 , nghĩa là

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

tương tự đối với nguyên liệu loại n

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Vậy ta có bài toán tìm $x_1, \dots, x_n$ sao cho:

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{b} \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$

Ví dụ 3.2. Với giả thiết giống như ví dụ 3.1, giả sử có một người muốn mua lại toàn bộ nguyên liệu trên.

$\begin{matrix} SP \\ \backslash \\ NL \end{matrix}$	x_1 1	x_2 2	$\cdots$ $\cdots$	x_n n	NL dự trữ
$y_1, 1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2, 2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m, m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
Giá bán	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

Tìm giá bán nguyên liệu i, y_i để:



- Tổng giá trị người mua phải trả là nhỏ nhất.
- Người bán không bị thiệt.

Giải. Tổng giá trị người mua phải trả nhỏ nhất được thể hiện:

$$z' = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \rightarrow \max$$

Khi sản xuất một sản phẩm 1, người ta cần a_{11} nguyên liệu 1, $\dots$, a_{m1} nguyên liệu m .

- Khi bán nguyên liệu thì chủ sở hữu nhận được $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m$,
- Mặc khác cùng lượng nguyên liệu trên khi sản xuất ra sản phẩm thì bán được với giá c_1 .

Vậy để người bán không bị thiệt khi bán nguyên liệu sản xuất sản phẩm 1 thì

$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

Tương tự đối với sản phẩm n

$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

Vậy bài toán tìm giá bán $y_1, \dots, y_n$ sao cho

$$z' = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \geq c_n \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Bài toán được viết dưới dạng ma trận

$$z' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.2}$$

trong đó $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$; $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$; $\mathbf{c} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$



Định nghĩa 3.1 (Bài toán đối ngẫu). Bài toán 3.1 và 3.2 được gọi là các bài toán đối ngẫu. Bài toán 3.1 gọi là bài toán gốc và bài toán 3.2 gọi là bài toán đối ngẫu. Nghĩa là:

$$\begin{aligned} &\textbf{Bài toán gốc} \\ &z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ &\text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textbf{Bài toán đối ngẫu} \\ &z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \\ &\text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Định lý 3.2. Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu 3.2 là bài toán gốc 3.1. Nghĩa là:

$$\begin{aligned} &\textbf{Bài toán gốc} \\ &z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \\ &\text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &\textbf{Bài toán đối ngẫu} \\ &z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ &\text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Chứng minh. Bài toán 3.3 tương đương

$$\begin{aligned} -z' &= -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \max \\ &\text{Với các ràng buộc} \\ &-\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq -\mathbf{c} \\ &\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Theo định nghĩa, đối ngẫu của 3.5:

$$\begin{aligned} -z &= -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \\ &\text{Với các ràng buộc} \\ &-(\mathbf{A}^T)^T \mathbf{y} \geq -\mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

tương đương với

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ &\text{Với các ràng buộc} \\ &\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

□



3.1.1 Đối ngẫu của bài toán max

Định lý 3.3. Cho bài toán gốc có dạng chính tắc, bài toán gốc và đối ngẫu tương ứng như sau.

$$\text{Bài toán gốc}$$

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{Bài toán đối ngẫu}$$

$$z = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \quad (3.8)$$

$\mathbf{y}$ tùy ý

Chứng minh. Bài toán gốc 3.7 tương đương

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$-\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

tương đương

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Bài toán đối ngẫu của 3.10

$$z' = (\mathbf{b}^T | -\mathbf{b}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$(\mathbf{A}^T | -\mathbf{A}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \geq \mathbf{c} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

tuong đương

$$z' = \mathbf{b}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc



$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Đặt $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ta được kết quả □

Định lý 3.4. Bài toán gốc

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ \text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\text{ tùy ý} \end{aligned} \tag{3.11}$$

có bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned} z' &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \\ \text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Chứng minh. Bài toán gốc 3.11 tương đương

$$\begin{aligned} -z &= -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \\ \text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{Ax} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\text{ tùy ý} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Theo định lý 3.3 và định lý 3.2, bài toán đối ngẫu của 3.13

$$\begin{aligned} -z' &= -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \max \\ \text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^T \mathbf{y} &= -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

tương đương

$$\begin{aligned} z' &= \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \\ \text{Với các ràng buộc} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{y} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Hai bài toán quy hoạch tuyến tính sau gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu**.

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$	$z' = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \rightarrow \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$
$x_j \leq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

Nhận xét. Quan sát cặp bài toán đối ngẫu trên ta có các nhận xét:

- Trong cặp bài toán đối ngẫu trên, hệ số của ràng buộc thứ i của bài toán gốc trở thành hệ số của biến y_i trong bài toán đối ngẫu. Ngược lại, hệ số của x_j trong bài toán gốc chính là hệ số của dòng j trong bài toán đối ngẫu.
- Hệ số của hàm mục tiêu của bài toán gốc trở thành hệ số về phải của ràng buộc và ngược lại. $\square$

Ví dụ 3.3. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
--------------	-------------------



$z = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \rightarrow \max$	$z' = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \rightarrow \min$
$7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$	$y_2 \in \mathbb{R}$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15$	$y_3 \leq 0$
$x_1 \geq 0$	$7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1$
$x_3 \in \mathbb{R}$	$2y_1 + 3y_2 - y_3 = -8$

Ví dụ 3.4. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$	$z' = 2y_1 + 5y_2 + y_3 \rightarrow \min$
$3x_1 + 2x_2 \leq 2$	$y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$	$y_2 \geq 0$
$4x_1 + x_2 \leq 1$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$3y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 2$
$x_2 \geq 0$	$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$

3.1.2 Đối ngẫu của bài toán min

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$	$z' = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m = c_j$



Hai bài toán quy hoạch tuyến tính này gọi là cặp bài toán đối ngẫu. Bài toán 1 gọi là bài toán gốc, bài toán 2 gọi là bài toán đối ngẫu. Một ràng buộc và điều kiện về biến trên cùng một dòng gọi là **cặp ràng buộc đối ngẫu**.

Ví dụ 3.5. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và cho biết các cặp ràng buộc đối ngẫu

$$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17 \end{cases}$$

$$x_1, x_3 \geq 0; x_2 \in \mathbb{R}; x_4, x_5 \leq 0$$

Giải. Bài toán gốc, đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$	$z' = 5y_1 - y_2 + y_3 + 17y_4 \rightarrow \min$
$12x_1 + 5x_2 - 3x_5 \leq 5$	$y_1 \leq 0$
$x_1 - x_3 - 4x_4 - 5x_5 \leq -2$	$y_2 \leq 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1$	$y_3 \geq 0$
$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 17$	$y_4 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$12y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 4$
$x_2 \in \mathbb{R}$	$5y_1 + y_3 + 4y_4 = 3$
$x_3 \geq 0$	$-y_2 + y_3 - 5y_4 \leq 1$
$x_4 \leq 0$	$-4y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 1$
$x_5 \leq 0$	$-y_1 - 5y_2 \geq -1$

Các cặp ràng buộc trên cùng một dòng gọi là cặp ràng buộc đối ngẫu.

Ví dụ 3.6. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán gốc sau và giải bài toán



đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình

$$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Bài toán gốc, bài toán đối ngẫu:

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 10x_1 + 8x_2 + 19x_3 \rightarrow \min$	$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \max$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$	$y_1 \geq 0$
$3x_1 + 2x_3 \geq 2$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 5$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 10$
$x_2 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 8$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 19$

Chuyển bài toán đối ngẫu sang dạng chính tắc

$$z' = 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 8 \\ y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_6 = 19 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Bảng đơn hình:

B	c^B	b^B	A_1^B	A_2^B	A_3^B	A_4^B	A_5^B	A_6^B
			6	2	5	0	0	0
A_4	0	10	1	3	1	1	0	0
A_5	0	8	1	2	2	0	1	0
A_6	0	19	1	2	5	0	0	1
			-6	-2	-5	0	0	0
A_4	0	2	0	1	-1	1	-1	0
A_1	6	8	1	2	2	0	1	0
A_6	0	11	0	0	3	0	-1	1
max		Δ	0	10	7	0	6	0



Mọi $\Delta_j \geq 0$ nên phương án hiện thời $\mathbf{y}^T = (8; 0; 0)$ là phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu $z' = 48$.

Nhận xét. Bài toán quy hoạch tuyến tính gốc dạng

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

trong đó $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ thì bài toán đối ngẫu có dạng chuẩn

$$z' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

giải trực tiếp bằng phương pháp đơn hình rất đơn giản. □

Chú ý. Các phần sau, ta chỉ xét bài toán gốc dạng min.

3.2 Các định lý về đối ngẫu

Cho cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau:

Bài toán gốc (1)	Bài toán đối ngẫu (2)
$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$	$z' = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m = c_j$

Định lý 3.5 (Đối ngẫu yếu). Nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ là phương án chấp nhận được của bài toán gốc và $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_m)$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu thì

$$b_1y_1 + \dots + b_my_m \leq c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (3.14)$$

(Nghĩa là với cặp bài toán đối ngẫu, giá trị hàm mục tiêu của bài toán min luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm mục tiêu của bài toán max.)



Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} u_i &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ v_j &= x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_i &= \sum_{i=1}^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n v_j &= \sum_{j=1}^n x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m)] \geq 0 \end{aligned}$$

và

$$0 \leq \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Ta đã có điều cần chứng minh. □

Hệ quả 3.6 (Dấu hiệu không có phương án chấp nhận được).

- i. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc không giới nội dưới, thì bài toán đối ngẫu không có phương án chấp nhận được.
- ii. Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu không giới nội trên, thì bài toán gốc không có phương án chấp nhận được.

Chứng minh. Do sự tương tự ta chỉ chứng minh i). Giả sử bài toán gốc không giới nội dưới tức tồn các phương án chấp nhận được $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ sao cho giá trị hàm mục tiêu

$$z = c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \rightarrow -\infty \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử bài toán đối ngẫu có phương án chấp nhận được $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_m)$, theo định lý đối ngẫu yếu

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq c_1x_1^k + \cdots + c_nx_n^k \text{ với mọi } \mathbf{x}^T = (x_1^k, \dots, x_n^k)$$

Cho $k \rightarrow \infty$ ta được điều vô lý

$$b_1y_1 + \cdots + b_my_m \leq -\infty$$

Vậy ta đã có điều cần chứng minh. □



Hệ quả 3.7 (Dấu hiệu cặp phương án tối ưu). Cho $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ và $\bar{\mathbf{y}}^T = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ là phương án chấp nhận được tương ứng của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Nếu giá trị hàm mục tiêu của hai bài toán này bằng nhau, nghĩa là

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n = b_1\bar{y}_1 + \dots + b_m\bar{y}_m \quad (3.15)$$

thì $\bar{\mathbf{x}}$ và $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án tối ưu tương ứng của hai bài toán.

Chứng minh. Gọi $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ là một phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc. Theo định lý đối ngẫu yếu 3.5 ta có

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n \leq b_1\bar{y}_1 + \dots + b_m\bar{y}_m \leq c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

suy ra $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Chứng minh tương tự ta có $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. $\square$

Định lý 3.8 (Đối ngẫu mạnh). Nếu một trong hai bài toán quy hoạch tuyến tính gốc hoặc đối ngẫu có phương án tối ưu thì:

- i. Bài toán quy hoạch kia cũng có phương án tối ưu.
- ii. Giá trị hàm mục tiêu tối ưu của hai bài toán bằng nhau.

Chứng minh. Bài toán quy hoạch tuyến tính có nhiều dạng tương đương, các bài toán đối ngẫu của dạng tương đương đó cũng là các dạng tương đương. Các bài toán tương đương cũng có cùng giá trị tối ưu. Do đó ta chỉ cần chứng minh định lý cho một trường hợp cụ thể

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Bài toán đối ngẫu có dạng

$$z' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}$$



Giả sử phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1; \dots; \bar{x}_n)$ của bài toán gốc có hệ vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \dots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Ta đặt

$$\mathbf{x}^B = (x_{k_1}; \dots; x_{k_m}); \mathbf{c}^B = (c_{k_1}; \dots; c_{k_m}); \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{k_1}; \dots; \mathbf{A}_{k_m})$$

Các ràng buộc của bài toán đối ngẫu có dạng $\langle \mathbf{A}_{k_j}; \mathbf{y} \rangle \geq c_{k_j}, j = 1, \dots, m$. Với phương án $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1}$ ta có

$$\langle \mathbf{A}_{k_j}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{k_j} = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{A}_{k_j}^B = \Delta_{k_j} + c_{k_j} \geq c_{k_j}, \quad j = 1, \dots, m$$

vì $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu nên $\Delta_{k_j} \geq 0, j = 1, \dots, m$. Do đó $\bar{\mathbf{y}}$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Ta lại có

$$z' = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{c}^B)^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

chú ý $\mathbf{x}^B$ là nghiệm của hệ $\mathbf{B}\mathbf{x}^B = \mathbf{b}$ hay $\mathbf{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}^B$. Suy ra

$$z' = \mathbf{c}^B \mathbf{x}^B = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = z$$

Theo hệ quả 3.7 ta có $\bar{\mathbf{y}}$ cũng là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. $\square$

Định lý 3.9 (Độ lệch bù). *Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tương ứng là phương án chấp nhận được của bài toán gốc, bài toán đối ngẫu. Khi đó $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là tối ưu khi và chỉ khi*

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i)y_i = 0 \quad \forall i \quad (3.16)$$

$$x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m - c_j) = 0 \quad \forall j \quad (3.17)$$

Chứng minh. Ta đặt

$$u_i = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0$$

$$v_j = x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m)] \geq 0$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{i=1}^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i)y_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n v_j = \sum_{j=1}^n x_j[c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m)] \geq 0$$



và

$$0 \leq \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) - (b_1y_1 + \cdots + b_my_m)$$

Theo định lý đối ngẫu mạnh, nếu $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ và $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_m)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Do đó $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j . Ngược lại nếu $u_i = v_j = 0$ với mọi i, j thì

$$(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = (b_1y_1 + \cdots + b_my_m).$$

Theo hệ quả 3.7 thì $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ cũng là phương án tối ưu. □

Ví dụ 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

có phương án tối ưu của bài toán gốc là $\mathbf{x}^T = (0; 1; 2)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Giải. Viết bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \rightarrow \min$	$z' = 2y_1 + 5y_2 \rightarrow \max$
$x_1 + x_3 = 2$	y_1 tùy ý
$x_2 + 2x_3 = 5$	y_2 tùy ý
$x_1 \geq 0$	$y_1 \leq 4$
$x_2 \geq 0$	$y_2 \leq 3$
$x_3 \geq 0$	$y_1 + 2y_2 \leq 8$



Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} (x_1 + x_3 - 2)y_1 = 0 \\ (x_2 + 2x_3 - 5)y_2 = 0 \\ x_1(y_1 - 4) = 0 \\ x_2(y_2 - 3) = 0 \\ x_3(y_1 + 2y_2 - 8) = 0 \end{cases}$$

thay $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$ vào hệ trên ta được

$$\begin{cases} y_2 - 3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $y_1 = 2, y_2 = 3$. Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\mathbf{y}^T = (2; 3)$.

Ví dụ 3.8. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 \geq -9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b. Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$.

Chú ý. Trong ví dụ này ta không dùng được dấu hiệu tối ưu trong chương 2 để kiểm tra tính tối ưu của phương án vì trong phương án có $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Giải.

a. Bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \rightarrow \min$	$z' = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \rightarrow \max$
$5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 5$	$y_1 \geq 0$
$-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 \geq -9$	$y_2 \geq 0$
$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$	$y_3 \in \mathbb{R}$
$x_1 \geq 0$	$5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4$



$x_2 \geq 0$	$4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9$
$x_3 \geq 0$	$-y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16$
$x_4 \in \mathbb{R}$	$3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8$
$x_5 \in \mathbb{R}$	$y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20$

Bài toán được viết lại:

$$z' = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4 \\ 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8 \\ y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

b. Kiểm tra tính tối ưu của $\mathbf{x}^T = (2; 0; 1; -2; 3)$. Sử dụng định lý độ lệch bù ta được

$$\begin{cases} (5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 - 5)y_1 = 0 \\ (-x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 + 9)y_2 = 0 \\ (-x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2)y_3 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4)x_1 = 0 \\ (4y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 9)x_2 = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16)x_3 = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8)x_4 = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20)x_5 = 0 \end{cases}$$

và thay $\mathbf{x}$ vào hệ ta được

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ (5y_1 - y_2 - y_3 + 4) = 0 \\ (-y_1 + 4y_2 - y_3 - 16) = 0 \\ (3y_1 - 2y_2 + 2y_3 + 8) = 0 \\ (y_1 - 5y_2 + 3y_3 + 20) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy có $\mathbf{y}^T = (0; 4; 0)$ thỏa định lý độ lệch bù. Nên $\mathbf{x}^T$ là phương án tối ưu và $\mathbf{y}^T$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.



3.3 Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

Định lý độ lệch bù 3.9 cho ta công cụ tổng quát để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (gốc) khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc (đối ngẫu) của nó. Từ định lý này, ta có hai hệ quả để tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu khi biết phương án tối ưu của bài toán gốc hoặc bảng đơn hình của phương án tối ưu của bài toán gốc.

3.3.1 Biết phương án tối ưu bài toán gốc

Hệ quả 3.10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu $\bar{\mathbf{x}}$ với hệ vector cơ sở liên kết là $B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \dots; \mathbf{A}_{k_m}\}$. Phương án tối ưu $\bar{\mathbf{y}}$ của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$.

Chứng minh. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max \\ \text{Với các ràng buộc} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cặp bài toán gốc, đối ngẫu như sau

Bài toán gốc	Bài toán đối ngẫu
$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$	$z' = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min$
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$

Theo định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 \\ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc cho nên $\bar{\mathbf{y}}^T (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0$ luôn đúng. Ta còn lại điều kiện

$$\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{c}) = 0 \quad (3.20)$$

Do $\bar{\mathbf{x}}$ có $x_{k_{m+1}} = \dots = x_{k_n} = 0$ và $x_{k_1}, \dots, x_{k_m} > 0$ nên khi thay $\bar{\mathbf{x}}$ vào (3.20) ta được hệ $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$. $\square$



Chú ý. Hệ phương trình $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ tương đương

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}_{k_1}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_1} \\ \dots \\ \langle \mathbf{A}_{k_m}; \bar{\mathbf{y}} \rangle = c_{k_m} \end{cases}$$

Ví dụ 3.9. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Giải. Chuyển bài toán sang dạng chính tắc

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 16 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Giải bằng phương pháp đơn hình

B	$\mathbf{c}^B$	$\mathbf{b}^B$	$\mathbf{A}_1^B$	$\mathbf{A}_2^B$	$\mathbf{A}_3^B$	$\mathbf{A}_4^B$	$\mathbf{A}_5^B$	$\mathbf{A}_6^B$
			2	-3	4	1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	10	0	-1	1	1	1	0
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_6$	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
$\mathbf{A}_5$	0	34/5	0	-7/5	4/5	0	1	-1/5
$\mathbf{A}_1$	2	25	1	1	3	0	0	0
$\mathbf{A}_4$	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
max		Δ	0	27/5	11/5	0	0	1/5

Phương án tối ưu của bài toán gốc $\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$ có hệ



vector cơ sở liên kết $B = \{\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5\}$. Ta đặt:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_4; \mathbf{A}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } (\mathbf{c}^B)^T = (c_1; c_4; c_5) = (2; 1; 0)$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là nghiệm của hệ phương trình $\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^B$ hay

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu ở ví dụ 3.9 ở trên có thể làm như sau: Từ phương án tối ưu của bài toán gốc

$$\mathbf{x}^T = (25; 0; 0; 16/5; 34/5; 0)$$

ta xác định được $x_1, x_4, x_5 > 0$. Ta đánh dấu cột 1, 4, 5 của bài toán gốc:

$z =$	$0x_1$	$-$	$5x_2$	$-$	$2x_3$	$+x_4$	$+x_5$		
ràng		$-$	x_2	$+$	x_3	$+x_4$	$+x_5$		$= 10$
buộc	x_1	$+$	x_2	$+$	$3x_3$				$= 25$
			$2x_2$	$+$	x_3	$+5x_4$		$+ x_6$	$= 16$

Lập hệ phương trình ba ẩn với hệ số các phương trình là các cột ở trên:

$$\begin{cases} 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 0 \rightarrow \text{cột 1} \\ y_1 + 0y_2 + 5y_3 = 1 \rightarrow \text{cột 4} \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1 \rightarrow \text{cột 5} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\mathbf{y}^T = (0; 2; 1/5)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. $\square$

Ví dụ 3.10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 50 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 \leq 23 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

có phương án tối ưu $\mathbf{x}^T = (0; 14; 6; 5)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

