



Bài giảng đang được chỉnh sửa

Quy hoạch tuyến tính

Nguyễn Đức Phương

Bài giảng

TP. HCM, Ngày 4 tháng 1 năm 2016

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbf{A}$	Mã trận hệ số về phải của các ràng buộc
$\mathbf{b}$	Vector hệ số về phải
$\mathbf{c}$	Vector hệ số hàm mục tiêu
$\mathbf{x}$	Phương án chấp nhận được
$\bar{\mathbf{x}}$	Phương án tối ưu
$\mathbf{x}^T$	Phép chuyển vị
$ \mathbf{A} $	Định thức mã trận $\mathbf{A}$
$[\mathbf{x}]_T$	Tọa độ của vector theo $\mathbf{x}$ theo cơ sở T
$\mathbf{A}_j$	Cột j của mã trận hệ số $\mathbf{A}$
$\mathbf{e}_j$	Vector đơn vị thứ j
Δ_j	Là ước lượng của vector cột $\mathbf{A}_j$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	Tích vô hướng của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$
$B = \{\mathbf{A}_{k_1}; \dots; \mathbf{A}_{k_m}\}$	Hệ vector liên kết
$\mathbf{c}^B = \{c_{k_1}; \dots; c_{k_m}\}$	Hệ số hàm mục tiêu có chỉ số $k_1, \dots, k_m$
$\mathbf{B}$	Mã trận có các cột là các vector của B
$\mathbf{A}_j^B$	Biểu diễn cột $\mathbf{A}_j$ theo cơ sở B



Mục lục

Mục lục	ii
1 Giới thiệu quy hoạch tuyến tính	1
1.1 Một số ví dụ	1
1.2 Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính	5
1.2.1 Dạng tổng quát	5
1.2.2 Dạng chuẩn	5
1.2.3 Dạng chính tắc	6
1.3 Chuyển bài toán quy hoạch sang dạng chính tắc	8
1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc	8
1.3.2 Biến không ràng buộc	9
1.3.3 Chuyển dạng chuẩn sang chính tắc	10
1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch	13
1.5 Phương án chấp nhận được	14
1.6 Ý nghĩa hình học	16
1.6.1 Phương pháp đồ thị	16
1.6.2 Tính chất của tập phương án chấp nhận được	19
1.7 Phương án cực biên	21
1.7.1 Thành lập phương án cơ bản chấp nhận	23
1.7.2 Thành lập phương án cực biên	27
1.7.3 Tìm phương án tối ưu từ phương án cực biên	30
1.8 Bài tập chương 1	32
2 Phương pháp đơn hình	34
2.1 Phương pháp đơn hình cho bài toán chính tắc	34
2.1.1 Phương pháp đơn hình	34
2.1.2 Dấu hiệu tối ưu	36
2.1.3 Thành lập phương án cực biên mới	38
2.2 Bảng đơn hình	41
2.3 Thuật toán đơn hình cho bài toán min	52
2.4 Bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị	53



2.5	Bài tập chương 2	59
3	Lý thuyết đối ngẫu	64
3.1	Định nghĩa bài toán đối ngẫu	64
3.1.1	Đối ngẫu của bài toán max	68
3.1.2	Đối ngẫu của bài toán min	71
3.2	Các định lý về đối ngẫu	74
3.3	Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu	81
3.3.1	Biết phương án tối ưu bài toán gốc	81
3.3.2	Có bảng đơn hình của phương án tối ưu	85
3.4	Bài tập chương 3	89
4	Bài toán vận tải	93
4.1	Bài toán vận tải cân bằng thu phát	93
4.2	Phương án cực biên	95
4.3	Thành lập phương án cực biên	98
4.3.1	Phương pháp cước phí thấp nhất	98
4.3.2	Phương pháp góc Tây - Bắc	100
4.3.3	Phương pháp Vogel (Fogel)	102
4.4	Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải	104
4.4.1	Thuật toán quy không cước phí ô chọn	104
4.4.2	Xây dựng phương án cực biên mới	109
4.5	Một số trường hợp đặc biệt	114
4.5.1	Bài toán vận tải không cân bằng thu phát	114
4.5.2	Bài toán vận tải có ô cấm	116
4.6	Bài toán vận tải cực đại cước phí	117
4.7	Bài tập chương 4	118
A	Đề thi mẫu	121
A.1	Đề học kì III năm 2010-2011	121
A.2	Đề học kì I năm 2011-2012	122
A.3	Đề thi học kì II năm 2011-2012	123
A.4	Đề học kì III năm 2011-2012	124
B	Bài giải đề mẫu	126
B.1	Bài giải học kì III năm học 2010-2011	126
B.2	Bài giải học kì I năm học 2011-2012	129
B.3	Bài giải học kì II năm học 2011-2012	132
B.4	Bài giải học kì III năm học 2011-2012	135
	Tài liệu tham khảo	137



Chương 1

Giới thiệu quy hoạch tuyến tính

Mục lục chương 1

1.1 Một số ví dụ	1
1.2 Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính	5
1.3 Chuyển bài toán quy hoạch sang dạng chính tắc	8
1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch	13
1.5 Phương án chấp nhận được	14
1.6 Ý nghĩa hình học	16
1.7 Phương án cực biên	21
1.8 Bài tập chương 1	32

1.1 Một số ví dụ dẫn đến bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.1 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất). Một trại cưa cưa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

- Ván thành phẩm cần 2 giờ để cưa và 5 giờ để bào 10m ván.
- Ván dùng trong xây dựng cần 3 giờ để cưa và 3 giờ để bào 10m ván.



Máy cưa làm việc tối đa 8 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 15 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 120 (ngàn đồng), và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 100 (ngàn đồng). Trong ngày, trại cưa phải cưa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Giải. Gọi $x_1, x_2 \geq 0$ là lượng ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng.

Loại \ Thời gian	Thành phẩm - x_1	Xây dựng - x_2	
Cưa	2	3	≤ 8
Bào	5	3	≤ 15
Lợi nhuận	120	100	

Tổng lợi nhuận

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

khi đó x_1, x_2 thỏa điều kiện thời gian làm việc máy cưa

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

và điều kiện về thời gian làm việc máy bào

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

Tóm lại cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1.2 (Bài toán khẩu phần ăn). Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B. Cứ một (trăm gram):

- Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.
- Thực phẩm B chứa 3 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 3 đơn vị protein.



Nếu một (trăm gram) thực phẩm A giá 20 (ngàn đồng) và một (trăm gram) thực phẩm B giá 25 (ngàn đồng). Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp ít nhất 18 đơn vị chất béo, 12 đơn vị carbohydrate và 24 đơn vị protein. Bao nhiêu (trăm gram) thực phẩm mỗi loại để có giá nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Giải. Gọi x_1, x_2 lần lượt là lượng thực phẩm A và B.

Loại Thành phần	TP* A - x_1	TP B - x_2	
Chất béo	2	3	≥ 18
Carbohydrate	1	3	≥ 12
Protein	4	3	≥ 24
Giá mua	20	25	

tổng số tiền mua x_1, x_2 thực phẩm A và B là

$$z = 20x_1 + 25x_2 \rightarrow \min$$

Yêu cầu lượng thực phẩm phải đảm bảo nhu cầu chất béo

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$

nhu cầu Carbohydrate

$$x_1 + 3x_2 \geq 12$$

nhu cầu Protein

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

Vậy ta cần tìm x_1, x_2 sao cho

$$z = 20x_1 + 25x_2 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Ví dụ 1.3 (Bài toán vận tải). Một nhà sản xuất có 2 nhà máy: Một nhà máy ở Vĩnh Phúc và một nhà máy ở Bình Dương. Có 3 kho hàng phân phối sản phẩm đặt ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ. Nhà máy ở Vĩnh

*TP: Thực phẩm



phúc; Bình Dương, có khả năng cung cấp tối đa 100; 140 tấn mỗi tuần. Lượng cầu của các kho ở Hà Nội, TP. HCM và Cần Thơ lần lượt từ 100; 60 và 80 tấn trở lên. Chi phí vận chuyển (trăm ngàn) mỗi tấn cho như bảng bên dưới. Hỏi cần vận chuyển bao nhiêu tấn hàng hóa từ nhà sản xuất đến các kho hàng ở Hà Nội, TP. HCM và ở cần thơ để chi phí nhỏ nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ nhu cầu?

Trạm thu \ Trạm phát	Hà Nội $W_1:100$	TP. HCM $W_2:60$	Cần Thơ $W_3:80$
Vĩnh Phúc- $Q_1: 100$	5	7	9
Bình Dương- $Q_2:140$	8	7	10

Giải. Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát thứ i ; $i = 1, 2$ đến trạm thu thứ j ; $j = 1, 2, 3$. Tổng chi phí vận chuyển

$$z = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{23} \rightarrow \min$$

Trạm phát thì phát hết hàng và trạm thu thì nhận đủ hàng:

$$\begin{array}{l|l} \text{Trạm phát 1 phát hết hàng} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ \text{Trạm phát 2 phát hết hàng} & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140 \\ \text{Trạm thu 1 thu đủ hàng} & x_{11} + x_{21} = 100 \\ \text{Trạm thu 2 thu đủ hàng} & x_{12} + x_{22} = 60 \\ \text{Trạm thu 3 thu đủ hàng} & x_{13} + x_{23} = 80 \end{array}$$

Vậy ta cần tìm x_{ij} sao cho

$$z = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{23} \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 140 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 60 \\ x_{13} + x_{23} = 80 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$



1.2 Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1 Dạng tổng quát

Từ các ví dụ mục 1.1, bài toán quy hoạch tuyến tính dạng *tổng quát* được phát biểu như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max \text{ (hay min)} \quad (1.1)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\geq)(=) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\geq)(=) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\geq)(=) b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

- Hàm tuyến tính (1.1) gọi là hàm mục tiêu.
- Hệ bất phương trình, bất phương trình tuyến tính (1.2) gọi là các ràng buộc. Vế trái của các ràng buộc là các hàm tuyến tính với $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến số.

1.2.2 Dạng chuẩn

Ta nói bài toán quy hoạch tuyến tính có *dạng chuẩn* nếu nó có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max, \text{ (hay min)} \quad (1.3)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$



d. $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Có dạng chính tắc.

e. $z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

Có dạng tổng quát.

f. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Có dạng tổng quát

Chú ý. Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu có thể viết thành bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu và ngược lại bằng quan hệ:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\min \left(-\sum_{j=1}^n c_j x_j \right) \quad (1.9)$$

tương đương

$$\max z = -\min(-z) \quad (1.10)$$

Do đó, không mất tính tổng quát trong phần lý thuyết ta chỉ phát biểu bài toán tìm giá trị lớn nhất hàm mục tiêu ($\max z$). Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất hàm mục tiêu ($\min z$) thì có thể sử dụng (1.10) để chuyển sang bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu.

Ví dụ 1.5. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính tìm max hàm mục tiêu thành tìm min hàm mục tiêu hay ngược lại

a. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc



$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b. $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải.

a. Bài toán trong câu a tương đương với

$$-z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b. Bài toán trong câu b tương đương với

$$-z = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Chuyển bài toán quy hoạch sang dạng chính tắc

1.3.1 Đổi chiều bất đẳng thức của các ràng buộc

Nếu ta nhân hai vế của bất phương trình

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \geq b$$

với -1 ta được bất phương trình

$$-k_1x_1 - k_2x_2 - \cdots - k_nx_n \leq -b$$



Ví dụ 1.6. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Ta nhân ràng buộc thứ ba

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8$$

với -1 , ta có bài toán quy hoạch dạng chuẩn tương đương:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 13x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.3.2 Biến không ràng buộc

Ta biết, một số bất kỳ chính là hiệu của hai số không âm. Giả sử x_j không có ràng buộc không âm, ta có thể thay x_j bằng hai biến $x_j^+ \geq 0$ và $x_j^- \geq 0$ sao cho

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

Với cách này, ta có thể chuyển bài toán không có ràng buộc không âm thành bài toán có ràng buộc không âm.[§]

Ví dụ 1.7. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chuẩn

$$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

[§]Ở đây dấu $+$, $-$ trong x_j^+ , x_j^- không thể hiện số lớn, số bé mà chỉ là x_j^+ là số trừ và x_j^- là số bị trừ.



Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Đặt $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, ($x_2^+, x_2^- \geq 0$) bài toán quy hoạch trở thành:

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0 \end{cases}$$

1.3.3 Chuyển dạng chuẩn sang dạng chính tắc

Xét ràng buộc thứ i trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1.11)$$

Ta có thể chuyển ràng buộc (1.11) dạng bất phương trình thành phương trình bằng cách thêm vào biến phụ $x_{n+i} \geq 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (1.12)$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn chuyển thành dạng chính tắc có dạng như sau:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

Ví dụ 1.8. Chuyển bài toán sau sang dạng chính tắc

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Giải. Ta thêm hai biến phụ $x_3 \geq 0$ và $x_4 \geq 0$ vào ràng buộc thứ nhất và thứ hai thì được bài toán quy hoạch dạng chính tắc như sau:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 & + x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Ví dụ 1.9. Chuyển các bài toán quy hoạch tuyến tính sau sang dạng chính tắc

a. $z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Ta thêm vào hai ẩn phụ x_3 và x_4 . Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 & + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

b. $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Cộng hai ẩn phụ x_4, x_5 vào ràng buộc 1 và 2, riêng ràng buộc



thứ 3 trừ ẩn phụ x_6 . Bài toán có dạng chính tắc

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & + x_5 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & - x_6 = -8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6$$

c. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Giải. Thêm ẩn phụ x_5 vào ràng buộc thứ 3

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 & = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = 8 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 & = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

d. $z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán quy hoạch trở thành:

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$$



Thêm hai ẩn phụ x_3, x_4

$$z = 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- + x_4 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

e. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Biến x_2 không có ràng buộc không âm. Thay $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ bài toán tương đương với

$$z = 2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2^+ + x_2^- = 6 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0 \end{cases}$$

1.4 Dạng ma trận của bài toán quy hoạch

Xét bài toán quy hoạch dạng chuẩn:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$



Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ta có thể viết bài toán quy hoạch trên thành dạng ma trận:

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ví dụ 1.10. Viết bài toán quy hoạch tuyến tính sau dưới dạng ma trận.

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Giải. Đặt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bài toán bây giờ là tìm $\mathbf{x}$ sao cho

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

1.5 Phương án chấp nhận được

Định nghĩa 1.1 (Phương án chấp nhận được). Vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ thỏa tất cả các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là phương án chấp nhận được.



Ví dụ 1.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$z = 120x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

và các phương án:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Phương án nào là phương án chấp nhận được?

Giải. Ràng buộc được viết lại

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Ta xét lần lượt các phương án $\mathbf{x}_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$.

- Với phương án $\mathbf{x}_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Vậy $\mathbf{x}_1$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Vậy $\mathbf{x}_2$ là phương án chấp nhận được.

- Với phương án $\mathbf{x}_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Vậy $\mathbf{x}_3$ không là phương án chấp nhận được.



- Với phương án $\mathbf{x}_4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Vậy $\mathbf{x}_4$ không là phương án chấp nhận được.

Định nghĩa 1.2 (Phương án tối ưu). *Phương án chấp nhận được làm cho hàm mục tiêu có giá trị lớn nhất (nếu là bài toán max) hay nhỏ nhất (nếu là bài toán min) thì được gọi là phương án tối ưu.*

1.6 Ý nghĩa hình học của bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong phần này ta xét đến phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng hình học. Phương pháp hình học chỉ giải những bài toán quy hoạch tuyến tính hai hoặc ba biến. Tuy nhiên, ý nghĩa của phương pháp này cho ta ý tưởng để xây dựng thuật toán có thể giải được bài toán nhiều biến hơn sẽ được trình bày trong chương 2.

1.6.1 Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Ví dụ 1.12. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$z = 4x + 3y \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Giải. Tập các phương án chấp nhận được như hình 1.1b. Hàm mục tiêu được viết lại

$$y = -4/3x + z/3 \quad (d)$$

trong đó (d) là một đường thẳng **song song** với $y = -4/3x$ và cắt **trục tung** tại $z/3$.

Ta nhận thấy $z \rightarrow \max$ khi và chỉ khi $z/3 \rightarrow \max$. Như hình 1.2a, để tăng giá trị $z/3$ ta tịnh tiến đường (d) theo phương của đường thẳng $y = -4/3x$ sao cho đường (d) vẫn cắt tập chấp nhận được OABC.

