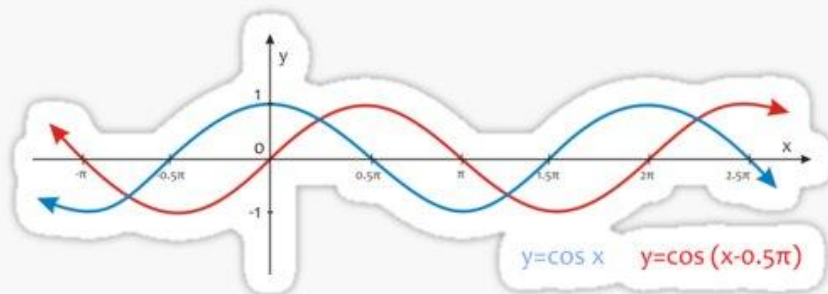


# GIÁO TRÌNH

## XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ



## Chương 3. BIẾN ĐỔI $z$

Chương trước, ta đã tìm hiểu việc phân tích tín hiệu và hệ thống trong miền thời gian, tuy nhiên kỹ thuật này có một số điểm hạn chế do chưa thể hiện được các đặc tính khác của tín hiệu và hệ thống. Trong chương này, chúng ta tìm hiểu thêm một kỹ thuật phân tích khác, đó là biến đổi  $z$ . Đây là công cụ quan trọng trong phân tích và mô tả đặc tính hệ thống tuyến tính bất biến.

### 3.1. BIẾN ĐỔI $z$

#### 3.1.1. Định nghĩa biến đổi $z$

Biến đổi  $z$  của tín hiệu rời rạc  $x(n)$  được định nghĩa như sau:

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (3.1)$$

trong đó,  $z$  là một biến số phức. Biến đổi  $z$  được ký hiệu như sau:

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\} \quad (3.2)$$

Hoặc chúng ta có thể mô tả mối quan hệ giữa  $x(n)$  và  $X(z)$  như sau:

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (3.3)$$

Biến đổi  $z$  đã chuyển dạng biểu diễn của tín hiệu: từ dạng biểu diễn trên miền thời gian,  $x(n)$  sang dạng biểu diễn trên miền  $z$ ,  $X(z)$ . Với  $z$  là một biến phức,  $X(z)$  là một hàm số phức. Theo công thức (3.1), nếu tín hiệu  $x(n)$  là dãy vô hạn thì  $X(z)$  cũng là chuỗi lũy thừa vô hạn.

Trong trường hợp  $X(z)$  là một chuỗi lũy thừa vô hạn, sẽ tồn tại một tập các giá trị của  $z$  làm cho  $X(z)$  hội tụ. Vậy ta có khái niệm **Miền hội tụ (MHT)** của  $X(z)$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $z$  làm cho  $X(z)$  có giá trị hữu hạn. Do đó, khi thực hiện một biến đổi  $z$ , ta luôn phải chỉ ra MHT của nó. Chúng ta sẽ minh họa điều này qua một số ví dụ đơn giản.

#### VÍ DỤ 3.1

Xác định biến đổi  $z$  của các tín hiệu hữu hạn sau:

a.  $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4\}$

b.  $x_2(n) = \{1, 2, 3, 4\}$

c.  $x_3(n) = \{0, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d.  $x_4(n) = \delta(n)$

e.  $x_5(n) = u(n)$

f.  $x_6(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

**Lời giải.**

Từ công thức định nghĩa (3.1) ta có:

a.  $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$ , MHT: toàn bộ mặt phẳng  $z$  trừ điểm  $z = 0$ .

b.  $X_2(z) = z + 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}$ , MHT: toàn bộ mặt phẳng  $z$  trừ điểm  $z = 0$  và  $z = \infty$ .

c.  $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5}$ , MHT: toàn bộ mặt phẳng  $z$  trừ điểm  $z = 0$ .

d.  $X_4(z) = 1$ , MHT: toàn bộ mặt phẳng  $z$ .

e. Ta có  $x_5(n) = u(n)$  là dãy vô hạn và  $x_5(n) = 1$  với  $n \geq 0$ . Áp dụng công thức (3.1), ta được:

$$\begin{aligned} X_5(z) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

$X_5(z)$  là một chuỗi lũy thừa vô hạn hay nói cách khác  $X_5(z)$  là tổng một cấp số nhân có công bội  $z^{-1}$ . Do đó,  $X_5(z)$  hội tụ tại giá trị:

$$X_5(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

với điều kiện  $|z^{-1}| < 1$  hay  $|z| > 1$ . Vậy miền hội tụ của biến đổi  $z$  trên là:  $|z| > 1$

f. Tín hiệu  $x_6(n)$  gồm một dãy vô hạn các giá trị khác không như sau:

$$x_6(n) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots \right\}$$

Áp dụng công thức (3.1), ta có biến đổi  $z$  của  $x(n)$  như sau:

$$\begin{aligned} X_6(z) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n \end{aligned}$$

Đây là một chuỗi vô hạn và hội tụ tại:

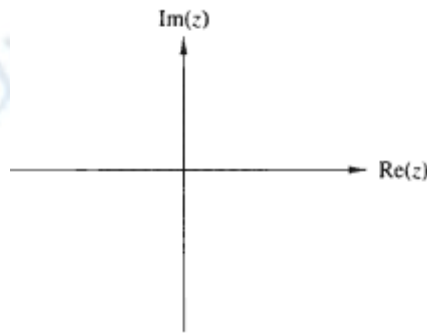
$$X_6(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

với điều kiện  $\left| \frac{1}{2} z^{-1} \right| < 1$ . Vậy biến đổi  $z$  của  $x_6(n)$  là  $X_6(z)$  với MHT:  $|z| > \frac{1}{2}$

Từ ví dụ này ta dễ dàng thấy rằng MHT của *tín hiệu hữu hạn* là toàn bộ mặt phẳng  $z$ , có thể loại trừ điểm  $z = 0$  và/hoặc  $z = \infty$ . Nhìn theo quan điểm toán học, biến đổi  $z$  chỉ đơn giản là một cách biểu diễn khác của tín hiệu  $x(n)$ . Như trong Ví dụ 3.1 ta có thể thấy các hệ số của  $z^{-n}$  chính là giá trị của tín hiệu tại thời điểm  $n$ , số mũ của  $z$  chính là các giá trị thời gian tương ứng của các mẫu của tín hiệu.

### Miền hội tụ của biến đổi $z$

$z$  là một biến số phức, các giá trị của nó được biểu diễn trên mặt phẳng phức  $z$  với hai trục là: trục thực  $Re[z]$  và trục ảo  $Im[z]$ . Như đã nói ở trên, miền hội tụ của biến đổi  $z$  là tập hợp tất cả các giá trị của  $z$  làm cho  $X(z)$  có giá trị hữu hạn. Do đó, MHT của biến đổi  $z$  là một miền biểu diễn trên mặt phẳng phức  $z$



**Hình 3-1 Mặt phẳng  $z$**

Biến số phức  $z$  được biểu diễn trong tọa độ cực là:

$$z = r e^{j\theta} \quad (3.4)$$

Trong đó,  $r = |z|$  và  $\theta = \angle z$ ,  $X(z)$  có thể được biểu diễn dưới dạng sau:

$$X(z)|_{z=r e^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

Để  $X(z)$  hữu hạn

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \leq \infty$$

tương đương với

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| \leq \infty \quad (3.5)$$

Do vậy,  $|X(z)|$  là hữu hạn nếu dãy  $x(n)r^{-n}$  khả tổng tuyệt đối. Như vậy, miền MHT của  $X(z)$  sẽ phụ thuộc vào khoảng giá trị của  $r$  để cho dãy  $x(n)r^{-n}$  là khả tổng tuyệt đối. Ta biến đổi thêm (3.5) như sau:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| \quad (3.6)$$

Nếu  $X(z)$  hội tụ trong một miền nào đó thì hai tổng chuỗi trong công thức (3.6) cũng phải có giá trị hữu hạn trong miền này.

Để

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| \leq \infty$$

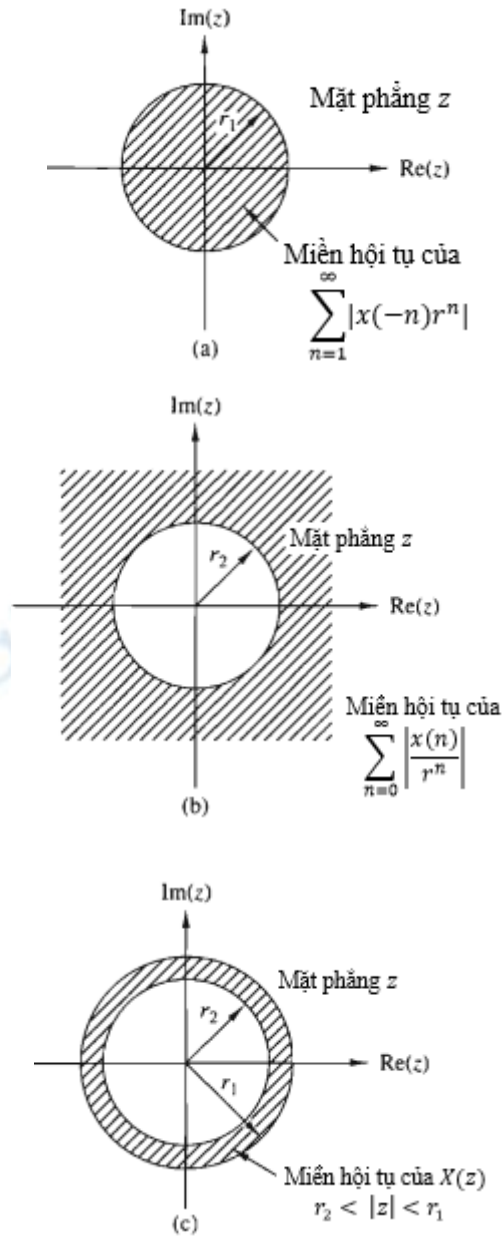
phải tồn tại một giá trị  $r$  đủ nhỏ để dãy  $x(-n)r^n$  với  $1 \leq n < \infty$  là dãy khả tổng tuyệt đối. Gọi giá trị là  $r_1$ , miền được bao quanh bởi đường tròn có bán kính  $r_1$  này sẽ là MHT của tổng chuỗi này. Hay nói cách khác, miền này là miền  $|z| < r_1$  và được minh họa là phần gạch chéo trong Hình 3-2(a).

Mặt khác để cho tổng chuỗi thứ hai của (3.6) có giá trị hữu hạn, nghĩa là:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| < \infty$$

phải tồn tại một giá trị  $r_2$  đủ lớn để cho dãy  $\frac{x(n)}{r^n}$ ,  $0 \leq n < \infty$  là khả tổng tuyệt đối, nghĩa là  $|z| > r_2$ . Do vậy, MHT của tổng này sẽ gồm tất cả các điểm nằm ngoài đường tròn bán kính  $r_2$  như trong Hình 3-2(b).

Do đó, miền hội tụ của  $X(z)$  là giao của hai miền hội tụ trên. Vậy nếu  $r_2 \geq r_1$ , hai miền hội tụ không giao nhau,  $X(z) = \infty, \forall z$ , như vậy không tồn tại  $X(z)$ . Nếu  $r_2 < r_1$ , MHT của  $X(z)$  sẽ là miền vành khuyên như trong Hình 3-2(c).



**Hình 3-2 Miền hội tụ của  $X(z)$  và các thành phần nhân quả, phi nhân quả tương ứng**

Như vậy, miền hội tụ trong Ví dụ 3.1f là miền nằm ngoài đường tròn bán kính  $\frac{1}{2}$  trong mặt phẳng phức  $z$ . Ta xét thêm ví dụ sau:

### VÍ DỤ 3.2

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu:

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \leq -1 \end{cases}$$

**Lời giải.** Từ định nghĩa (3.1) ta có:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] z^{-n} = - \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} z \right]^l = - \sum_{l=1}^{\infty} (2z)^l$$

Trong đó  $l = -n$ . Áp dụng công thức:

$$A + A^2 + A^3 + \dots = A(1 + A + A^2 + \dots) = \frac{A}{1-A}, \text{ với } |A| < 1$$

ta có:

$$X(z) = - \frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ với } |2z| < 1 \text{ hay } |z| < \frac{1}{2}$$

Vậy, kết luận lại ta có:

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ với MHT: } |z| < \frac{1}{2}$$

Như vậy MHT của biến đổi  $z$  trên là miền nằm trong đường tròn bán kính  $\frac{1}{2}$ .

Từ các Ví dụ 3.1f và Ví dụ 3.2 ta thấy dãy  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  và dãy  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$  có biến đổi  $z$  giống nhau:

$$Z\{a^n u(n)\} = Z\{-a^n u(-n-1)\} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Điều này có nghĩa là một biểu thức biến đổi  $z$  không ứng với một dãy tín hiệu miền thời gian duy nhất. Tuy nhiên, MHT của hai tín hiệu này lại khác nhau. *Như vậy, tín hiệu rời rạc  $x(n)$  được xác định duy nhất một biểu thức biến đổi  $z$ , là  $X(z)$  và miền hội tụ của nó.* Do đó, khái niệm "biến đổi  $z$ " của một tín hiệu bao gồm cả biểu thức toán và miền hội tụ của nó. Từ Ví dụ 3.1f ta thấy rằng  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$  là dãy nhân quả và có MHT là miền bên ngoài đường tròn bán kính  $\frac{1}{2}$ , trong khi MHT của dãy phản nhân quả  $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$  nằm bên trong đường tròn bán kính  $\frac{1}{2}$ . Tiếp theo, chúng ta xét một dãy vô hạn hai phía trong ví dụ dưới đây:

### VÍ DỤ 3.3

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu sau:

$$x(n) = a_1^n u(n) + a_2^n u(-n-1)$$

**Lời giải.**

Tín hiệu  $x(n)$  có thể viết lại như sau:

$$x(n) = \begin{cases} a_1^n & \text{với } n \geq 0 \\ a_2^n & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

Từ định nghĩa (3.1), biến đổi  $z$  của  $x(n)$ :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_1^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_2^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_1 z^{-1})^n + \sum_{l=1}^{+\infty} (a_2^{-1} z)^l \end{aligned}$$

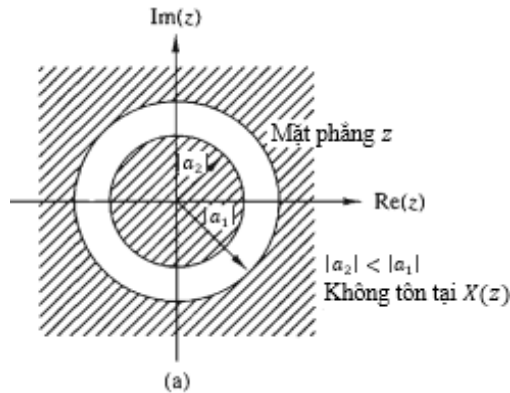
Ta có, tổng chuỗi lũy thừa thứ nhất sẽ có giá trị hữu hạn nếu  $|a_1 z^{-1}| < 1$  hay  $|z| > |a_1|$ . MHT của tổng chuỗi lũy thừa thứ hai là  $|a_2^{-1} z| < 1$  hay  $|z| < |a_2|$ . Vậy, MHT của  $X(z)$  sẽ là giao của hai miền trên. Tùy thuộc vào các giá trị của  $a_1$  và  $a_2$  ta có các trường hợp như sau:

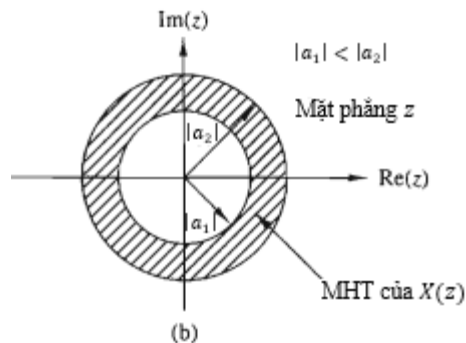
**Trường hợp 1:**  $|a_2| \leq |a_1|$  Trong trường hợp này hai miền hội tụ không chồng lên nhau, Hình 3-3(a). Do đó không có giá trị của  $z$  cho cả hai chuỗi lũy thừa cùng hội tụ. Vậy trong trường hợp này  $X(z)$  không tồn tại.

**Trường hợp 2:**  $|a_2| > |a_1|$  Trong trường hợp này, miền hội tụ là miền vành khăn giao của hai miền hội tụ như trong Hình 3-3(b). Ta có:

$$x(n) = a_1^n u(n) + a_2^n u(-n-1) \xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} - \frac{1}{1 - a_2 z^{-1}}$$

với MHT là  $|a_1| < |z| < |a_2|$



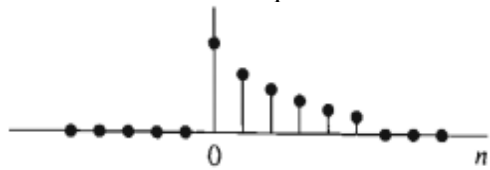
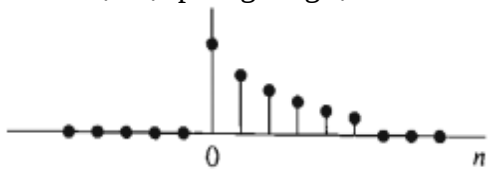
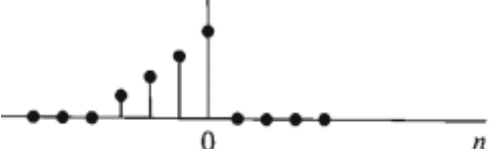
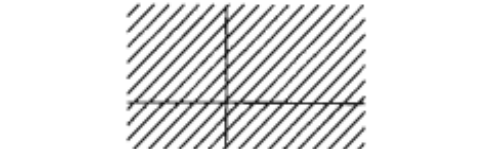
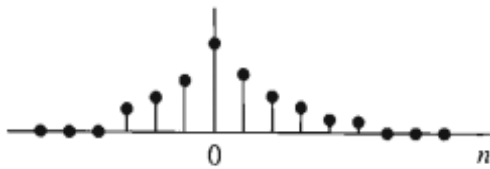
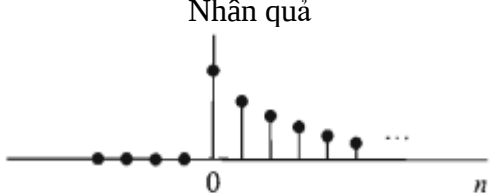
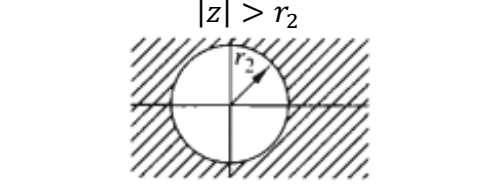


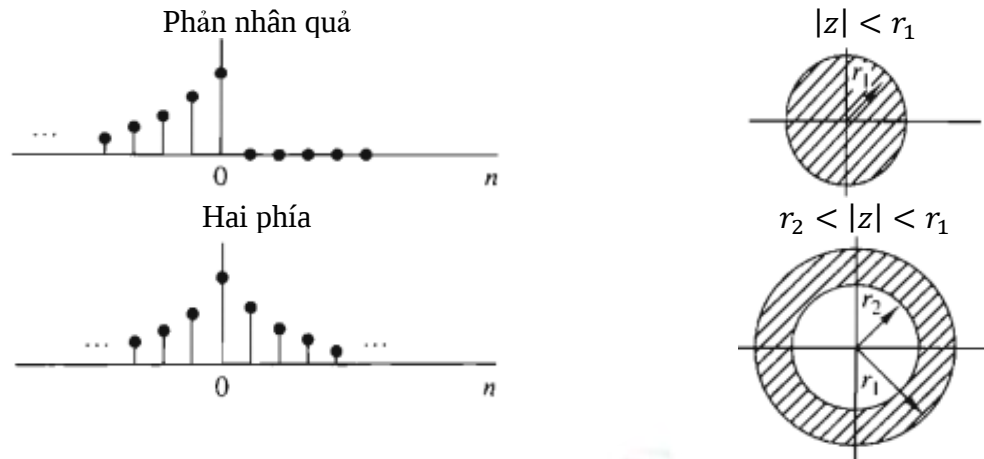
**Hình 3-3 MHT của biến đổi  $z$  trong Ví dụ 3.3**

Ta thấy MHT của tín hiệu vô hạn hai phía là một hình vành khuyên trên mặt phẳng  $z$ .

Từ các ví dụ trên, ta thấy rằng MHT của tín hiệu phụ thuộc vào dạng của nó (tín hiệu hữu hạn hay vô hạn) và cả tính chất của tín hiệu (tín hiệu nhân quả, phản nhân quả, tín hiệu vô hạn cả hai phía). Chúng tôi tổng kết MHT của các dạng tín hiệu trên trong Bảng 3-1.

**Bảng 3-1 Họ các tín hiệu và MHT tương ứng của chúng**

| Tín hiệu                                                                                                                          | MHT                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Tín hiệu hữu hạn</b></p> <p>Nhân quả</p>  | <p>Toàn bộ mặt phẳng <math>z</math> ngoại trừ <math>z = 0</math></p>                              |
| <p>Phản nhân quả</p>                           | <p>Toàn bộ mặt phẳng <math>z</math> ngoại trừ <math>z = \infty</math></p>                        |
| <p>Hai phía</p>                                | <p>Toàn bộ mặt phẳng <math>z</math> ngoại trừ <math>z = 0</math> và <math>z = \infty</math></p>  |
| <p><b>Tín hiệu vô hạn</b></p> <p>Nhân quả</p>  | <p><math> z  &gt; r_2</math></p>                                                                 |



Biến đổi  $z$  được định nghĩa trong (3.1) được gọi là biến đổi  $z$  hai phía. Chúng ta có công thức **biến đổi  $z$  một phía** được định nghĩa như sau:

$$X(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (3.7)$$

Trong trường hợp nếu  $x(n)$  là dãy nhân quả [nghĩa là  $x(n) = 0$  với  $n < 0$ ], biến đổi  $z$  một phía hay hai phía là như nhau.

### 3.1.2. Biến đổi $z$ ngược

Ngược lại, với phép biến đổi  $z$  của tín hiệu, ta có **phép biến đổi  $z$  ngược**. Nếu chúng ta có dạng biểu diễn trên miền  $z$  của tín hiệu là  $X(z)$ , cần xác định tín hiệu biểu diễn miền thời gian  $x(n)$ . Công thức biến đổi  $z$  ngược được được xây dựng theo định lý Cauchy, công thức quan trọng trong lý thuyết số phức, như sau:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 0 \\ 0 & \text{với } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Trong đó  $C$  là đường cong kín, bao quanh gốc tọa độ trên mặt phẳng số phức  $z$  theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Đầu tiên, với công thức biến đổi  $z$  (3.1), ta đổi biến  $n$  thành  $k$ :

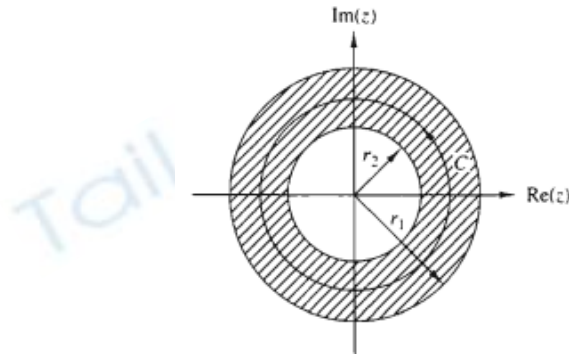
$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (3.9)$$

Nhân cả hai vế của (3.9) với  $z^{n-1}$ , sau đó lấy tích phân hai vế trên đường kín nằm trong MHT của  $X(z)$  chứa gốc tọa độ như Hình 3-4. Ta có

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz \equiv \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{n-1-k} dz \quad (3.10)$$

với  $C$  là ký hiệu đường kín nằm trong miền hội tụ của  $X(z)$ , chiều ngược chiều kim đồng hồ. Đổi chỗ phép lấy tích phân và tổng chuỗi, công thức (3.10) trở thành:

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{n-1-k} dz \quad (3.11)$$



**Hình 3-4 Đường cong kín của tích phân trong (3.10)**

Áp dụng định lý Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 1 & \text{với } n = k \\ 0 & \text{với } n \neq k \end{cases} \quad (3.12)$$

với  $C$  là đường cong kín bất kỳ chứa gốc tọa độ. Thế vào (3.11) ta được

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz \equiv 2\pi j x(n) \quad (3.13)$$

vậy

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (3.14)$$

Mặc dù công thức (3.14) là công thức định nghĩa để xác định tín hiệu  $x(n)$  từ  $X(z)$ , tuy nhiên ta thường không sử dụng công thức này để tìm biến đổi  $z$  ngược của tín hiệu. Phần sau, chúng ta sẽ tìm hiểu một số phương pháp tìm biến đổi  $z$  ngược hiệu quả và đơn giản hơn.

### 3.2. TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI $Z$

Biến đổi  $z$  là một công cụ rất mạnh trong nghiên cứu tín hiệu và hệ thống rời rạc. Điều này xuất phát từ nhiều tính chất rất quan trọng mà biến đổi này có được. Trong phần này, ta sẽ tìm hiểu các tính chất đó

**Tính tuyến tính.** Nếu

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \quad \text{với MHT1}$$

và

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z) \quad \text{với MHT2}$$

thì

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \quad (3.15)$$

với  $a_1$  và  $a_2$  là các hằng số bất kỳ. MHT của biến đổi  $z$  (3.15) là giao của hai MHT thành phần. Việc chứng minh tính chất này từ công thức định nghĩa tương đối đơn giản người đọc hoàn toàn có thể thực hiện được

Tính chất tuyến tính này có thể tổng quát hóa trong trường hợp có nhiều tín hiệu. Nghĩa là, biến đổi  $z$  của một tổ hợp tuyến tính các tín hiệu miền thời gian được xác định bằng tổ hợp tuyến tính biến đổi  $z$  của các tín hiệu thành phần.

#### VÍ DỤ 3.4

Xác định biến đổi  $z$  và miền hội tụ của tín hiệu

$$x(n) = [3(2^n) - (3^n)]u(n)$$

**Lời giải.** Đặt

$$x_1(n) = 2^n u(n)$$

và

$$x_2(n) = 3^n u(n)$$

vậy  $x(n)$  có thể được viết lại như sau

$$x(n) = 3x_1(n) - x_2(n)$$

Theo (3.15), biến đổi  $z$  của tín hiệu  $x(n)$  là:

$$X(z) = 3X_1(z) - X_2(z)$$

Ta xác định  $X_1(z)$  và  $X_2(z)$  sử dụng công thức định nghĩa (3.1):

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n}$$

Mà

$$x_1(n) = 2^n u(n) = \begin{cases} 2^n & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

ta có:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad \text{với MHT: } |z| > 2$$

Tương tự ta cũng có

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \quad \text{với MHT: } |z| > 3$$

Phần giao nhau của miền hội tụ của  $X_1(z)$  và  $X_2(z)$  là MHT của  $X(z)$ . Do đó ta có biến đổi  $z$  của  $x(n)$ ,  $X(z)$  là:

$$X(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \quad \text{với MHT: } |z| > 3$$

### VI DỤ 3.5

Xác định biến đổi  $z$  của các tín hiệu:

a)  $x_1(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$

b)  $x_2(n) = (\sin \omega_0 n)u(n)$

**Lời giải.**

(a) Sử dụng công thức Euler, tín hiệu  $x_1(n)$  được biểu diễn như sau:

$$x_1(n) = (\cos \omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$$

Đặt  $a_1 = e^{j\omega_0}$ ,  $a_2 = e^{-j\omega_0}$

ta có:

$$x_1(n) = \frac{1}{2}a_1^n u(n) + \frac{1}{2}a_2^n u(n)$$

Áp dụng công thức biến đổi  $z$  ta có:

$$Z\{a_1^n u(n)\} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad MHT: |z| > |a_1| = |e^{j\omega_0}| = 1$$

tương tự:

$$Z\{a_2^n u(n)\} = \frac{1}{1 - a_2 z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad MHT: |z| > |a_2| = |e^{-j\omega_0}| = 1$$

vậy

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad MHT: |z| > 1$$

Thực hiện thêm một số bước biến đổi đơn giản, ta có kết quả cuối cùng:

$$(\cos \omega_0 n) u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad MHT: |z| > 1 \quad (3.16)$$

(b) Áp dụng định lý Euler ta có:

$$x(n) = (\sin \omega_0 n) u(n) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 n} u(n) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 n} u(n)$$

Thực hiện tương tự ví dụ trên ta có:

$$(\sin \omega_0 n) u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad MHT: |z| > 1 \quad (3.17)$$

### Dịch chuyển thời gian.

Nếu:

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

thì

$$x(n - k) \xleftrightarrow{z} z^{-k} X(z) \quad (3.18)$$

MHT của  $z^{-k} X(z)$  giống như của  $X(z)$  và trừ  $z = 0$  nếu  $k > 0$  và  $z = \infty$  nếu  $k < 0$ . Chứng minh tính chất này ta có thể sử dụng trực tiếp công thức định nghĩa của biến đổi  $z$  (3.1).

### VÍ DỤ 3.6

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu sau:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2)$$

**Lời giải.**

Nếu ta đặt:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Ta thấy  $x(n)$  là tín hiệu trễ của tín hiệu  $x_1(n)$  hai đơn vị thời gian:

$$x(n) = x_1(n - 2)$$

Theo Ví dụ 3.1f, ta có:

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{MHT: } |z| > \frac{1}{2}$$

Áp dụng tính chất dịch chuyển thời gian, ta có

$$x(n) = x_1(n - 2) \xleftrightarrow{z} X(z) = z^{-2}X_1(z) = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{MHT: } |z| > \frac{1}{2}$$

So với  $X_1(z)$ ,  $X(z)$  có thêm thành phần  $z^{-2}$ , thành phần này không xác định tại  $z = 0$ , tuy nhiên điểm này không nằm trong miền hội tụ  $|z| > \frac{1}{2}$  nên ta không cần phải thêm trường hợp này.

### Nhân với một dãy lũy thừa.

Nếu

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z), \quad \text{MHT: } r_1 < |z| < r_2$$

Thì

$$a^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(a^{-1}z), \quad \text{MHT: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2 \quad (3.19)$$

với  $a$  là hằng số bất kỳ,  $a$  có thể là số thực hoặc số phức.

*Chứng minh.* Từ định nghĩa (3.1) ta có:

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

Với MHT của  $X(z)$  là  $r_1 < |z| < r_2$ , vậy MHT của  $X(a^{-1}z)$  là:

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2$$

hoặc

$$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

### VÍ DỤ 3.7

Tìm biến đổi  $z$  của các tín hiệu sau

- a)  $x(n) = u(n)$   
b)  $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

**Lời giải**

- a) Từ Ví dụ 3.1e, ta có:

$$x(n) = u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{MHT: } |z| > 1$$

- b) Tín hiệu  $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n)$ . Vậy, áp dụng tính chất nhân với một dãy lũy thừa, ta có

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n x(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = X(2z) = \frac{1}{1 - (2z)^{-1}}, \quad \text{MHT: } |z| > \frac{1}{2}$$

Vậy

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{MHT: } |z| > \frac{1}{2}$$

Đáp án này trùng với kết quả của Ví dụ 3.1f

**Miền thời gian ngược.**

Nếu

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \quad \text{MHT: } r_1 < |z| < r_2$$

thì

$$x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}), \quad \text{MHT: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \quad (3.20)$$

*Chứng minh* Từ định nghĩa (3.1) ta có:

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

ở đây ta đã đổi biến  $l = -n$ . MHT của  $X(z^{-1})$  là:

$$r_1 < |z^{-1}| < r_2, \text{ hay tương đương } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

chú ý rằng MHT của  $x(n)$  là nghịch đảo so với  $x(-n)$ . Có nghĩa là nếu  $z_0$  thuộc MHT của  $x(n)$  thì  $1/z_0$  nằm trong MHT của  $x(-n)$ .

### VI DỤ 3.8

Xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu  $x(n) = u(-n)$

**Lời giải.** Từ Ví dụ 3.7 ta có:

$$u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad MHT: |z| > 1$$

Áp dụng tính chất (3.20), ta được:

$$u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z}, \quad MHT: |z| < 1 \quad (3.21)$$

#### Vi phân trong miền $z$

Nếu

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

thì

$$nx(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (3.22)$$

**Chứng minh** Lấy vi phân cả hai vế của công thức định nghĩa (3.1), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n} \\ &= -z^{-1} Z\{nx(n)\} \end{aligned}$$

Biến đổi  $z$  trong tính chất này có cùng MHT với MHT của  $X(z)$ .

### VÍ DỤ 3.9

Xác định biến đổi của tín hiệu

$$x(n) = n2^n u(n)$$

**Lời giải.** Đặt  $x_1(n) = 2^n u(n)$ , như vậy  $x(n) = nx_1(n)$ , với  $x_1(n) = 2^n u(n)$ .

Đầu tiên, ta xác định biến đổi  $z$  của tín hiệu  $x_1(n)$

$$x_1(n) = 2^n u(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad MHT: |z| > 2$$

Vậy, áp dụng tính chất (3.22), ta được

$$x(n) = nx_1(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = -z \frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{2z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2} \quad MHT: |z| > |2| \quad (3.23)$$

**Tích chập của hai chuỗi.**

Nếu

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

thì

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (3.24)$$

MHT của  $X(z)$  là miền giao MHT của  $X_1(z)$  và  $X_2(z)$

*Chứng minh* Tích chập của hai tín hiệu  $x_1(n)$  và  $x_2(n)$  được xác định như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Biến đổi  $z$  của  $x(n)$  là

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n}$$

Đổi vị trí của hai tổng chuỗi và áp dụng tính chất dịch chuyển thời gian (3.18), ta được

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} \right] \\ &= X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z) \end{aligned}$$

### VÍ DỤ 3.10

Tính tích chập  $x(n)$  của những tín hiệu sau:

$$x_1(n) = \{1, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

**Lời giải:** Thực hiện biến đổi  $z$  ta được:

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

Áp dụng tính chất (3.24), ta có biến đổi  $z$  của  $x(n)$  là:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$


---

Tính chất này là một trong những tính chất quan trọng của biến đổi  $z$ . Với tính chất này, thay vì phải thực hiện tích chập ở miền thời gian, ta có thể chuyển hai tín hiệu sang dạng biểu diễn trên miền số phức  $z$ , thực hiện phép nhân hai biểu thức và cuối cùng thông qua phép biến đổi  $z$  ngược để tìm tín hiệu kết quả trên miền thời gian.

### Phép tương quan của hai tín hiệu.

Nếu

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

thì phép tương quan hai tín hiệu trong miền  $z$  như sau

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \xleftrightarrow{z} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1}) \quad (3.25)$$

*Chứng minh* Chúng ta nhớ lại công thức:

$$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

Sử dụng tính chất tích chập và tính chất miền thời gian ngược ta có:

$$R_{x_1x_2}(z) = Z\{x_1(l)\}.Z\{x_2(-l)\} = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

MHT của  $R_{x_1x_2}(z)$  là miền giao nhau của MHT của  $X_1(z)$  và  $X_2(z^{-1})$ .

Cũng như trường hợp của tính chất tích chập, với tính chất này ta có thể dễ dàng tính tương quan chéo hai tín hiệu bằng cách nhân hai biểu thức biến đổi  $z$  của hai tín hiệu tương ứng trong công thức (3.25) sau đó thực hiện biến đổi  $z$  ngược để thu được kết quả.

### VÍ DỤ 3.11

Tính tự tương quan tín hiệu sau

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

**Lời giải.** Từ tính chất tương quan (3.25), ta có:

$$R_{xx}(z) = Z\{r_{xx}(l)\} = X(z)X(z^{-1})$$

Từ ví dụ trên ta đã có:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad MHT: |z| > \frac{1}{2}$$

Vậy

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}, \quad MHT: |z| < 2$$

Tự tương quan của  $x(n)$  trong miền  $z$  là:

$$R_{xx}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}, \quad MHT: \frac{1}{2} < |z| < 2$$

MHT của  $R_{xx}(z)$  là một hình vành khuyên nên  $r_{xx}(l)$  là tín hiệu hai phía.

---

### Phép nhân hai dãy.

Nếu ta có hai tín hiệu và biến đổi  $z$  của chúng như sau

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

Phép nhân hai tín hiệu chuyển sang miền số phức  $z$  như sau:

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \quad (3.26)$$

trong đó  $C$  là một đường cong kín quanh gốc tọa độ và nằm trong miền hội tụ của  $X_1(v)$  và  $X_2(1/v)$ .

*Chứng minh* Biến đổi  $z$  của tín hiệu  $x(n)$  như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(n) z^{-n}$$

Với công thức biến đổi  $z$  ngược, ta có:

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) v^{n-1} dv$$

Thế vào phương trình  $X(z)$  ở trên và đổi thứ tự của hai phép tổng chuỗi. Ta có: