ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

GIÁO TRÌNH SỐ HỌC

TS. PHAN ĐỨC TUẤN

(LƯU HÀNH NỘI BỘ)

Hồ Chí Minh - 2019

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG GIÁO TRÌNH

Kí hiệu	**Ý nghĩa**
$\mathbb{N}$	Tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	Tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	Trường số phức
$\mathbb{C}_p$	Trường số phức p-adic
$\mathbb{C}[x]$	Vành các đa thức hệ số phức
$f^{-1}(S)$	Tập ảnh ngược của S qua f
$a \mid b$	a là ước của b
$\gcd(a, b)$	Ước chung lớn nhất của a và b

LỜI MỞ ĐẦU

Số học là khoa học về số và là lĩnh vực cổ xưa nhất của Toán học. Trong Số học người ta nghiên cứu những tính chất và những quy tắc tính toán trên các tập hợp số. Số học là lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán, những giả thuyết chưa có câu trả lời. Trên con đường tìm kiếm câu trả lời cho những giả thuyết đó, nhiều lý thuyết lớn của toán học đã nẩy sinh.

Trên cơ sở theo dõi và tham khảo các tài liệu về số học có liên quan đã công bố hoặc xuất bản trong thời gian gần đây, chúng tôi biên soạn giáo trình này nhằm phục vụ đối tượng là sinh viên khoa Toán và những người quan tâm đến những vấn đề cơ sở của số học.

Trước hết, chúng tôi tập trung giới thiệu cách xây dựng các tập hợp số như số tự nhiên và các phương pháp mở rộng tập hợp số. Sau đó, chúng tôi giới thiệu lý thuyết trường định chuẩn (trường mêtric) và mô tả các mở rộng đầy đủ của trường các số hữu tỉ. Định lý Ostrowski mô tả hết tất cả các chuẩn trên trường các số hữu tỉ, khẳng định rằng trên trường hữu tỉ chỉ có hai kiểu chuẩn (sai khác nhau một tương đương) là: Chuẩn giá trị tuyệt đối và chuẩn p-adic. Do đó, chỉ có hai hướng mở rộng trường số hữu tỉ thành trường đầy đủ. Nếu xuất phát từ chuẩn giá trị tuyệt đối (chuẩn Acsimet) trên thì theo phương pháp mở rộng Cantor, ta sẽ thu được trường các số thực. Còn nếu xuất phát từ chuẩn p-adic (chuẩn không Acsimet) thì ta sẽ thu được trường các số p-adic. Do đó, trường các số thực và trường các số p-adic là bình đẳng với nhau với tư cách là các mở rộng đầy đủ của trường số hữu tỉ. Ngoài ra, giáo trình này còn giới thiệu các ứng dụng của trường đóng đại số (phức hoặc p-adic) trong việc nghiên cứu các tính chất số học trên trường hàm.

Chương 1
XÂY DỰNG CÁC TẬP HỢP SỐ

CÁC NỘI DUNG TRỌNG TÂM

1. Số tự nhiên.
2. Số nguyên, Số hữu tỉ.
3. Trường định chuẩn; trường định chuẩn đầy đủ.
4. Trường định chuẩn không Acsimet
5. Cấu trúc tôpô của trường định chuẩn Acsimet
6. Định lý Ostrowski và các kiểu chuẩn trên trường số hữu tỉ
7. Các xây dựng Trường số thực và Trường số p-adic.

1.1 Số tự nhiên

Số tự nhiên xuất hiện do nhu cầu nhận biết của con người khi quan sát các tương ứng $1-1$ giữa số lượng các sự vật. Do đó, người ta có thể xây dựng số tự nhiên chính là một lớp tương đương các tập hợp có cùng bản số, tức là các tập hợp giữa chúng tồn tại một song ánh. Số 0 được định nghĩa muộn hơn, được quy ước là lực lượng của tập rỗng. Cuối thế kỷ 19, Peano đã xây dựng tập hợp số tự nhiên một cách chặt chẽ bằng hệ tiên đề. Nói khác đi, một tập hợp thỏa mãn hệ tiên đề Peano được gọi là tập hợp các số tự nhiên. Người ta đã chỉ ra rằng thông qua các ví dụ của lý thuyết tập hợp, định nghĩa hình thức về số tự nhiên của Peano chắc chắn tồn tại.

Hệ tiên đề Peano. Tập hợp các số tự nhiên là một tập hợp $\mathbb{N}$ cùng với một ánh xạ $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gọi là ánh xạ kế tiếp có các tính chất sau:

1) $0 \in \mathbb{N}$.

2) σ là một đơn ánh, với mỗi $n \in \mathbb{N}, \sigma(n)$ được gọi là phần tử kế tiếp của n.

3) 0 không là phần tử kế tiếp của bất kỳ phần tử nào của n.

4) Với $U \subset \mathbb{N}$ có tính chất: $0 \in \mathbb{N}$ và nếu với mọi $n \in U$ kéo theo $\sigma(n) \in U$ thì ta có $U = \mathbb{N}$.

Chú ý 1. Như vậy, tập $\mathbb{N}$ gồm các phần tử được sinh ra bởi phần tử 0 và ánh xạ σ các phần tử kế tiếp nhau ký hiệu như sau:

$$0 \mapsto \sigma(0) = 1 \mapsto \sigma(1) = 2 \mapsto \sigma(2) = 3 \mapsto \sigma(3) = 4 \mapsto \cdots$$

Chú ý 2. Từ Tiên đề 4) ta suy ra Nguyên lý quy nạp được phát biểu như sau: Nếu có mệnh đề $P(n)$ xác định với mọi số tự nhiên n thỏa mãn $P(0)$ đúng và nếu với mọi n, $P(n)$ đúng suy ra $P(\sigma(n))$ cũng đúng thì ta khẳng định $P(n)$ luôn đúng với mọi số tự nhiên n.

Thật vậy, đặt $U = \{n \in \mathbb{N}/P(n)$ đúng$\}$. Ta có $P(0)$ đúng, do đó $0 \in U$. Nếu $n \in U$, có nghĩa là $P(n)$ đúng, theo giả thiết $P(\sigma(n))$ cũng đúng, do đó $\sigma(n) \in U$, suy ra U thỏa mãn hệ tiên đề Peano, nghĩa là $U = \mathbb{N}$. Do điều này nên tiên đề 4) còn được gọi là tiên đề quy nạp.

Định nghĩa 1.1.1. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa $n + 0 = n, n0 = 0$. Giả sử $m + n$ và mn đã xác định, ta định nghĩa

$$m + \sigma(n) = \sigma(m + n), m\sigma(n) = mn + m.$$

Mệnh đề 1.1.2. *Với mọi* $n \in \mathbb{N}$*, ta có*

$$0 + n = n, 0n = n.$$

Chứng minh. Ta chứng minh $0 + n = n$ bằng quy nạp. Vì $0 + 0 = 0$ nên khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử có $0 + n = n$, ta có $0 + \sigma(n) = \sigma(0 + n) = \sigma(n)$. Chứng minh tương tự cho khẳng định còn lại. $\square$

Mệnh đề 1.1.3. *Ta có các khẳng định sau*

1. *Ký hiệu* $1 = \sigma(0)$, *ta có* $\sigma(n) = n + 1$.
2. *Với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $n + 0 = 0 + n = n, m0 = 0m = 0$.
3. *Phép cộng và phép nhân có tính chất kết hợp, nghĩa là với mọi* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *ta có*
$$(m + n) + r = m + (n + r), (mn)r = m(nr).$$
4. *Phép cộng và phép nhân giao hoán, nghĩa là với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$, *ta có*
$$m + n = n + m, mn = nm.$$
5. *Phép nhân phân phối với phép cộng, nghĩa là với mọi* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *ta có*
$$m(n + r) = mn + mr.$$
6. *Nếu* $m + n = 0$ *thì* $m = 0, n = 0$ *và nếu* $mn = 0$ *thì* $m = 0$ *hoặc* $n = 0$.
7. *Phép cộng có tính giản ước, nghĩa là với mọi* $m, n, r \in \mathbb{N}$, *nếu* $m + r = n + r$ *thì* $m = n$.

Chứng minh. 1) Ta có $\sigma(n) = \sigma(n + 0) = \sigma(n) + \sigma(0) = n + 1$.

2) Ta chứng minh $n + 0 = n$ theo quy nạp. Vì $0 + 0 = 0$ nên mệnh đề dúng với n=0. Giả sử có $n + 0 = n$, ta có $\sigma(n) + 0 = \sigma(n + 0) = \sigma(n)$.

Các khẳng định còn lại chứng minh tương tự. □

Định nghĩa 1.1.4. Giả sử m, n là các số tự nhiên, ta nói $m \leq n$ nếu tồn tại số tự nhiên x sao cho $n = m + x$.

Mệnh đề 1.1.5. $\leq$ *là quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{N}$.

Chứng minh. Rõ ràng $\leq$ có tính chất phản xạ và bắc cầu. Nếu $m, n \in \mathbb{N}$ sao cho $n \leq m$ và $m \leq n$, nghĩa là tồn tại x, y sao cho $m = x + n$ và

$n = y+m$. Suy ra $m+n = x+y+m+n$. Do đó $x+y = 0$ nên $x = y = 0$ nên $m = n$. Hay $\leq$ có tính chất phản xứng. Vậy $\leq$ là một quan hệ thứ tự.

Giả sử m là một số tự nhiên tùy ý. Ta đặt

$$U = \{n \in \mathbb{N}/m \leq n \text{ hoặc } n < m\}.$$

Ta có $0 \leq m$ nên $0 \in U$. Giả sử có $n \in U$, nghĩa là $m \leq n$ hoặc $n < m$, ta xét 2 khả năng:

(a) Nếu $m \leq n$ thì tồn tại $x \in \mathbb{N}$ sao cho $n = m + x$ hay $n + 1 = m + (x + 1)$, dẫn đến $m < \sigma(n)$. Suy ra $\sigma(n) \in U$.

(b) Nếu $n < m$, hay tồn tại $y \neq 0, y \in \mathbb{N}$ sao cho $m = n + y$. Do $y \neq 0$ nên tồn tại z sao cho $y = \sigma(z) = z + 1$ dẫn đến $m = n + (z + 1) = (n + 1) + z = \sigma(n) + z$. Suy ra $\sigma(n) \leq m$ hay $\sigma(n) \in U$.

Từ điều này và tiên đề 4) ta có $U = \mathbb{N}$. Vì vậy m so sánh được với bất kỳ phần tử nào của $\mathbb{N}$, hay $\leq$ là quan hệ thứ tự toàn phần. □

Mệnh đề 1.1.6. *Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên có thứ tự tốt.*

Chứng minh. Giả sử $S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset$ và S không có phần tự nhỏ nhất. Đặt $U = \{a \in \mathbb{N}/a < x \forall x \in S\}$. Ta có $0 \in U$. Nếu $a \in U$ thì $\sigma(a) \leq x, \forall x \in S$. Nếu tồn tại $x_0 \in S$ sao cho $\sigma(a) = x_0$ thì S có phần tử nhỏ nhất, mâu thuẫn với giả thiết ở trên. Suy ra $\sigma(a) < x, \forall x \in S$ hay $\sigma(a) \in U$ và do đó $U = \mathbb{N}$ hay $S = \emptyset$. Vô lý. Vậy $\mathbb{N}$ sắp thứ tự tốt.

□

Mệnh đề 1.1.7. *Phép nhân có tính giản ước với phần tử khác 0. Nghĩa là với mọi $m, n, r \in \mathbb{N}, r \neq 0$, nếu $mr = mr$ thì $m = n$.*

Chứng minh. Giả sử $m \neq n$. Theo Mệnh đề 1.1.5 ta có tồn tại $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ sao cho $m = n + x$ hoặc $n = m + x$. Không mất tình tổng quát giả sử $m = n+x$. Từ giả thiết $mr = nr$ suy ra $xr = 0$, tuy nhiên $r \neq 0$ dẫn đến $x = 0$. Mâu thuẫn. □

1.2 Phép chứng minh quy nạp

Phương pháp chứng minh quy nạp là phương pháp chứng minh các mệnh đề xác định trên tập các số tự nhiên và được phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau sau đây.

Định lý 1.2.1. *Cho trước số tự nhiên n_0 và mệnh đề $P(n)$ xác định với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Giả sử $P(n_0)$ đúng và với mọi $n \geq n_0$, nếu $P(n)$ đúng suy ra $P(n+1)$ đúng, khi đó ta khẳng định $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.*

Chứng minh. Đặt $U = \{k \in \mathbb{N}/k < n_0\} \cup \{k \in \mathbb{N}/P(k)$ đúng $\}$. Khi đó theo tiên đề 4) ta có $U = \mathbb{N}$. Vì vậy mệnh đề được chứng minh. □

Ví dụ 1. Chứng minh $2^n \geq n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Định lý 1.2.2. *Cho trước số tự nhiên n_0 và mệnh đề $P(n)$ xác định với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Giả sử $P(n_0)$ đúng và với mọi $m \geq n_0$, nếu $P(k)$ đúng với mọi k mà $n_0 \leq k < m$ suy ra $P(m)$ đúng, khi đó ta khẳng định $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.*

Chứng minh. Tương tự Định lý 1.2.1. □

1.3 Số nguyên

Nhu cầu xây dựng số nguyên bắt nguồn từ nhu cầu giải phương trình $x + a = b, a, b \in \mathbb{N}$ không phải bao giờ cũng có nghiệm trong $\mathbb{N}$. Do đó, người ta mở rộng tập hợp số tự nhiên sao cho phương trình trên có nghiệm và gọi chúng là tập hợp các số nguyên.

Xét tập tích Đềcác $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{N}\}$. Trên tập hợp này ta xác định một quan hệ hai ngôi, kí hiệu là $\sim$, như sau:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Khi đó, $\sim$ là một quan hệ tương đương và phân hoạch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ thành các lớp tương đương và mỗi lớp được ký hiệu là $\overline{(a, b)}$, với $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ký hiệu $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$.

Phép cộng trên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa như sau:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}.$$

Phần tử không được định nghĩa là $0 = \overline{(a,a)}, \forall a \in \mathbb{N}$.

Phần tử đơn vị được định nghĩa là $1 = \overline{(1,0)}$

Phần tử đối của phần tử $x = \overline{(a,b)}$ được định nghĩa là $\overline{(b,a)}$ và ký hiệu là $-x$.

Phép nhân được định nghĩa bởi $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$

Khi đó, $\mathbb{Z}$ với phép toán $+$ và . như trên lập thành một vành giao hoán có đơn vị.

Bây giờ ta xét ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(a) = \overline{(a,0)}$. Dễ thấy f đơn cấu và do đó khi ta đồng nhất số tự nhiên a với phần tử $f(a)$ của tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ thì $\mathbb{N}$ là một bộ phận của $\mathbb{Z}$.

Khi đó, vành $\mathbb{Z}$ được gọi là vành các số nguyên

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

thỏa mãn luật giản ước và phương trình $x + a = b$ luôn có nghiệm duy nhất và nghiệm này được định nghĩa là *phép trừ* của hai số tự nhiên b và a, ký hiệu là $x = b - a$ và chính là tổng của b với số đối của a: $x = b + (-a)$.

Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa như sau $x \le y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$. Khi đó $\le$ là một quan hệ thứ tự toàn phần. Khi đó, ta nói x bé hơn hoặc bằng y hay y lớn hơn hoặc bằng x và ký hiệu $y \ge x$.

1.4 Số hữu tỉ

Xét tập tích Đềcác $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b)/a, b \in \mathbb{Z}, b \ne 0\}$, ở đây $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Trên tập hợp này ta xác định một quan hệ hai ngôi, kí hiệu là $\Re$, như sau:

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Khi đó, $\Re$ là một quan hệ tương đương và phân hoạch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ thành các lớp tương đương và mỗi lớp được ký hiệu là $\overline{(a,b)}$, với $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Ký hiệu $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \diagup \Re$.

Phép cộng trên $\mathbb{Q}$ được định nghĩa như sau:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc, bd)}.$$

Phép nhân được định nghĩa bởi

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ac, bd)}.$$

Phần tử không được định nghĩa là $0 = \overline{(0,n)}, \forall n \in \mathbb{Z}^*$.

Phần tử đơn vị được định nghĩa là $1 = \overline{(n,n)} \forall n \in \mathbb{Z}^*$

Phần tử đối của phần tử $x = \overline{(a,b)}$ được định nghĩa là $\overline{(-a,b)}$ và ký hiệu là $-x$.

Phần tử nghịch đảo của $\overline{(a,b)}, a, b \in \mathbb{Z}^*$ là $\overline{(b,a)}$ và ký hiệu là x^{-1}. Phép trừ được định nghĩa bởi $x - y = x + (-y)$.

Khi đó $\mathbb{Q}$ cùng với các phép toán như trên lập thành một trường.

Bây giờ ta xét ánh xạ $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ xác định bởi $f(a) = \overline{(a,1)}$. Dễ thấy f đơn cấu và do đó khi ta đồng nhất số tự nhiên a với phần tử $f(a)$ của tập hợp số nguyên $\mathbb{Q}$ thì $\mathbb{Z}$ là một bộ phận của $\mathbb{Q}$.

Khi đó, trường $\mathbb{Q}$ được gọi là trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ và có tính chất mỗi số hữu tỉ đều biểu diễn dưới dạng $x = a.b^{-1}$, hay ta có thể viết dưới dạng phân số $x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ và phương trình $bx = a, a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ luôn có nghiệm duy nhất.

Để định nghĩa quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Q}$ trước hết với $x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, ta định nghĩa $x \geq 0 \Leftrightarrow a.b \geq 0$. Bây giờ ta định nghĩa $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$. Khi đó $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{Q}$. Khi đó, ta nói x bé hơn hoặc bằng y hay y lớn hơn hoặc bằng x và ký hiệu $y \geq x$. Có một tính chất rất đặc trưng của số hữu tỉ đó là tính trù mật nói rằng giữa hai số hữu tỉ khác nhau bao giờ cũng tồn tại vô số số hữu tỉ khác, nghĩa là với mọi $x, y \in \mathbb{Q}, x < y$, luôn tồn tại $z \in \mathbb{Q}$ sao cho $x < z < y$.

Chú ý rằng trên trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ phương trình $x^2 - 2 = 0$ không có nghiệm. Vì vậy, để mở rộng trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ người ta đưa ra khái niệm trường định chuẩn và chỉ ra tất cả các cách mở rộng đầy đủ của trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Trước hết chúng ta tìm hiểu các khái niệm liên quan đến trường định chuẩn sau đây.

1.5 Trường định chuẩn

Định nghĩa 1.5.1. Trường K cùng với ánh xạ $\phi : K \to \mathbb{R}$, ký hiệu bởi (K, ϕ) , được gọi là một *trường định chuẩn* hay trường mêtric nếu các điều kiện sau đây thoả mãn:

1) $\phi(\alpha) \geq 0; \phi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \forall \alpha \in K$.

2) $\phi(\alpha + \beta) \leq \phi(\alpha) + \phi(\beta) \ \forall \alpha, \beta \in K$.

3) $\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta) \ \forall \alpha, \beta \in K$.

Nếu thay điều kiện 2) bởi điều kiện mạnh hơn sau đây:

$$\phi(\alpha + \beta) \leq \max\{\phi(\alpha), \phi(\beta)\} \ \forall \alpha, \beta \in K$$

thì trường định chuẩn (K, ϕ) được gọi là *trường định chuẩn không Acsimet.*

Hàm $\phi : K \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\phi(0) = 0, \phi(\alpha) = 1, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$ là một chuẩn trên trường K và được gọi là chuẩn tầm thường trên K.

Ví dụ. Hàm giá trị tuyệt đối thông thường là chuẩn trên $\mathbb{Q}$ hoặc trên $\mathbb{R}$.

1.6 Chuẩn p-adic trên trường số hữu tỉ

Cho p là một số nguyên tố cố định. Với mỗi số hữu tỉ $\alpha \neq 0$, ta viết được một cách duy nhất:

$$\alpha = \frac{a}{b} p^n, a, b, n \in \mathbb{Z}, a, b \text{ không chia hết cho } p.$$

Định nghĩa một hàm số $\phi_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ bởi $\phi_p(0) = |0|_p = 0, \phi_p(\alpha) = |\alpha|_p = p^{-n}$.

Bây giờ chúng ta kiểm tra hàm ϕ_p là một chuẩn không Acsimet trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Thật vậy, giả sử β là một số hữu tỉ, tương tự như đối với α ta viết được

$$\beta = \frac{c}{d}p^m, c, d, m \in \mathbb{Z}, c, d \text{ không chia hết cho } p.$$

Khi đó, do p là một số nguyên tố nên ta có thể viết:

$$\alpha\beta = \frac{ac}{bd}p^{m+n},$$

trong đó các số nguyên ac và bd không chia hết cho p. Từ đó, ta có

$$\phi_p(\alpha\beta) = p^{-n-m} = p^{-n}p^{-m} = \phi(\alpha)\phi(\beta).$$

Không mất tính tổng quát giả sử $n \geq m$, khi đó do p là một số nguyên tố nên có thể viết

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b}p^n + \frac{c}{d}p^m = \frac{adp^{n-m} + bc}{bd}p^m = \frac{x}{y}p^k, k \geq m,$$

trong đó trong đó các số nguyên x và y không chia hết cho p. Từ đó, ta có

$$\phi_p(\alpha + \beta) = p^{-k} \leq p^{-m} = \max\{\phi_p(\alpha), \phi_p(\beta)\}.$$

Ví dụ. Tính $|2015|_5, |2016|_2$.

1.7 Các tính chất của trường định chuẩn

Mệnh đề 1.7.1. *Giả sử (K, ϕ) là một trường định chuẩn. Khi đó, ta có*

1) $\phi(1) = \phi(-1) = 1$.

2) $\phi(a) = \phi(-a), \forall a \in K$.

3) $|\phi(a) - \phi(b)| \leq \phi(a - b)$.

4) $\phi(\sum_{i=1}^n a_i) \leq \sum_{i=1}^n \phi(a_i)$.

5) $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1} = \frac{1}{\phi(a)}, \forall a \in K, a \neq 0$.

6) $\phi(ab^{-1}) = \frac{\phi(a)}{\phi(b)}, \forall a, b \in K, b \neq 0$.

Chứng minh. Đặt $a = b + c$, ta có

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ \phi(a) = \phi(b+c) \leq \phi(b) + \phi(c) \\
&\Rightarrow \ \phi(a) - \phi(b) \leq \phi(c) \\
&\Rightarrow \ \phi(a) - \phi(b) \leq \phi(a-b) \\
&\Rightarrow \ \phi(b) - \phi(a) \leq \phi(b-a) = \phi(a-b).
\end{aligned}$$

Do đó $-\phi(a-n) \leq \phi(a)-\phi(b) \leq \phi(a-b)$ hay $|\phi(a)-\phi(b)| \leq \phi(a-b)$. Do đó ta có tính chất 3). Các tính chất còn lại bạn đọc tự chứng minh. $\square$

1.8 Trường định chuẩn đầy đủ

Giả sử (K, ϕ) là trường định chuẩn. Khi đó:

- Dãy α_n các phần tử của K, được gọi là hội tụ về phần tử $\alpha \in K$ (theo chuẩn ϕ), nếu với mỗi số thực ϵ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\phi(\alpha_n - \alpha) < \epsilon, \forall n > n_0$. Ta ký hiệu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

- Dãy α_n các phần tử của K được gọi là một dãy không (theo chuẩn ϕ) nếu $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

- Dãy α_n các phần tử của K, được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy (theo chuẩn ϕ) nếu với mỗi số thực ϵ tuỳ ý, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\phi(\alpha_n - \alpha_m) < \epsilon, \forall n, m > n_0$.

Trường định chuẩn (K, ϕ) được gọi là ***trường định chuẩn đầy đủ*** nếu trong nó mọi dãy cơ bản đều là dãy hội tụ (theo chuẩn ϕ).

Định lý 1.8.1. *Trong trường định chuẩn mọi dãy hội tụ là dãy cơ bản. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng.*

Chứng minh. Giả sử $\{\alpha_n\}, n \in \mathbb{N}$ là một dãy hội tụ trong trường định chuẩn (K, ϕ) về phần tử $\alpha \in K$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\phi(\alpha_m - \alpha_n) = \phi(\alpha_m - \alpha + \alpha - \alpha_n) \leq \phi(\alpha_m - \alpha) + \phi(\alpha_n - \alpha).$$

Từ bất đẳng thức này suy ra $\{\alpha_n\}$ là dãy cơ bản.

Bây giờ, trong trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ ta sẽ chỉ ra có một dãy cơ bản mà không hội tụ theo chuẩn giá trị tuyệt đối. Thật vậy, ta xét dãy số hữu tỉ sau:

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, n = 0, 1, 2, ...$$

Với $p < q$,ta có các bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} 0 < a_q - a_p &= \frac{1}{(p+1)!} + \cdots + \frac{1}{q!} \\ &< \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{(p+1)^{q-p-1}}\right) \\ &< \frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}}\right) = \frac{1}{p!p}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta có

$$0 < a_q - a_p < \frac{1}{p!p}. \qquad (1.8.1)$$

Từ bất đẳng thức (2.1.2) suy ra dãy $\{a_n\}$ là dãy cơ bản các số hữu tỉ theo chuẩn giá trị tuyệt đối. Giả sử rằng dãy này hội tụ trong $\mathbb{Q}$, tức tồn tại $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{Q}$. Khi đó, từ bất đẳng thức (2.1.2), cho $q \to \infty$, ta có:

$$0 < l - a_p \leq \frac{1}{p!p}. \qquad (1.8.2)$$

Trong bất đẳng thức (1.8.2), chọn $p = 2$, ta có

$$\frac{5}{2} < l \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}.$$

Như vậy, l không phải là số nguyên và do đó $l = \frac{m}{n}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$, m không chia hết cho n và do đó $n > 1$. Trong (1.8.2), tiếp tục chọn $p = n$, ta có:

$$0 < \frac{m}{n} - a_n < \frac{1}{n \times n!}.$$

Do đó

$$0 < \frac{m}{n} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n \times n!}.$$

Nhân hai vế các bất đẳng thức trên với $n!$ ta có:

$$0 < x \leq \frac{1}{n} < 1,$$

trong đó x là một số nguyên. Ta gặp phải một mâu thuẫn và phép chứng minh được kết thúc. $\square$

Hệ quả 1.8.2. *Trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là trường không đầy đủ theo chuẩn giá trị tuyệt đối.*

Định lý 1.8.3. *Chuẩn ϕ trên trường K là chuẩn không Acsimet khi và chỉ khi $\phi(n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Chứng minh. Ta kí hiệu 1 là đơn vị của K và $\phi(n) = \phi(1 + 1 + \cdots + 1)$

1) Giả sử ϕ là chuẩn không Acsimet, khi đó với mọi số tự nhiên n ta có

$$\phi(n) = \phi(1 + 1 + \cdots + 1) \leq \max\{\phi(1), \cdots, \phi(1)\} = 1.$$

2) Giả sử $\phi_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, ta chứng minh ϕ là một chuẩn không Acsimet. Thật vậy, từ giả thiết $\phi_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} [\phi(a+b)]^k &= \phi[(a+b)^k] = \phi[\sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} b^i] \leq \sum_{i=0}^{k} \phi(C_k^i)\phi(a^{k-i})\phi(b^i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} \phi(a)^{k-i}\phi(b)^i \leq (k+1)M^k, \forall k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Trong đó $M = \max\{\phi(a), \phi(b)\}$. Do đó

$$\left(\frac{\phi(a+b)}{M}\right)^k \leq k + 1.$$

Sử dụng bổ đề sau đây với $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \frac{\phi(a+b)}{M}$, ta suy ra $\gamma \leq 1$, ta suy ra $\gamma \leq 1$ hay $\phi(a+b) \leq \max\{\phi(a), \phi(b)\}$. □

Bổ đề 1.8.4. *Nếu các số thực dương α, β, γ thỏa mãn $\gamma^k \leq \alpha k + \beta, \forall k = 1, 2, ...$ thì $\gamma \leq 1$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề này bằng phép phản chứng như sau: Giả sử ngược lại $\gamma > 1$. Ta viết $\gamma = 1 + \delta, \delta > 0$. Khi đó, với $k \geq 1$, ta có:

$$\gamma^k = (1+\delta)^k = 1 + k\delta + \frac{1}{2}k(k-1)\delta^2 + \cdots + \delta^k > k\delta + \frac{1}{2}k(k-1)\delta^2.$$

Tuy nhiên với k đủ lớn ta có $k\delta > \beta, \frac{1}{2}(k-1)\delta^2 > \alpha$. Do đó $\gamma^k > \alpha k + \beta$. Điều này trái với giả thiết của bổ đề. □

1.9 Sự tương đương giữa các chuẩn

Định nghĩa 1.9.1. Các chuẩn ϕ và ψ trên cùng một trường được gọi là *tương đương* với nhau và ký hiệu bởi $\phi \sim \psi$ nếu chúng xác định trên cùng một tính hội tụ, nghĩa là $\phi(x_n - x) \to 0$ khi và chỉ khi $\psi(x_n - x) \to 0$ theo chuẩn giá trị tuyệt đối trong trường số thực $\mathbb{R}$.

Định lý 1.9.2. *Giả sử ϕ và ψ là hai chuẩn trên trường K. Khi đó ϕ và ψ là tương đương với nhau khi và chỉ khi $\forall x \in K(\phi(x) < 1 \Leftrightarrow \psi(x) < 1)$.*

Chứng minh. 1) Giả sử $\phi \sim \psi$ trên K. Khi đó ta có dãy các phép biến đổi tương đương sau đây:

$$\begin{aligned}
\phi(x) < 1 &\Leftrightarrow \phi(x^n) \to 0 \text{ theo chuẩn giá trị tuyệt đối trong } \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x^n \to 0 \text{ theo chuẩn } \phi \text{ trong } \mathbb{K} \\
&\Leftrightarrow x^n \to 0 \text{ theo chuẩn } \psi \text{ trong } \mathbb{K} \\
&\Leftrightarrow \psi(x^n) \to 0 \text{ theo chuẩn giá trị tuyệt đối trong } \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \psi(x) < 1.
\end{aligned}$$

2) Giả sử ϕ và ψ là các chuẩn thỏa mãn: $\forall x \in K(\phi(x) < 1 \Leftrightarrow \psi(x) < 1)$. Ta sẽ chứng minh rằng $\psi(a) = \phi(a)^\epsilon, \forall a \in K$ với ϵ là số thực dương nào đó. Trước hết ta có nhận xét: $\phi(a) < \phi(b) \Leftrightarrow \psi(a) < \psi(b)$ Thật vậy

$$\phi(a) < \phi(b) \Leftrightarrow \frac{\phi(a)}{\phi(b)} \Leftrightarrow \phi(\frac{a}{b}) < 1 \Leftrightarrow \psi(\frac{a}{b}) < 1 \Leftrightarrow \frac{\psi(a)}{\psi(b)} \Leftrightarrow \psi(a) < \psi(b).$$

Giả sử p là một phần tử tuỳ ý, cố định của K sao cho $\phi(p) > 1$ (phần tử p như vậy là tồn tại, vì nếu ngược lại thì $\phi(p^{-1}) = \frac{1}{\phi(p)} < 1$). Ta có $\psi(p) > 1$ (theo nhận xét trên). Ta đặt $\phi(a) = \phi(p)^\delta$ và $\psi(a) = \psi(p)^{\delta'}$. Ta sẽ chứng minh $\delta = \delta'$.

Giả sử n và k là các số nguyên sao cho $\frac{n}{k} < \delta, k > 0$. Khi đó, ta có:

$$\frac{n}{k} \leq \delta \Leftrightarrow \phi(p)^{\frac{n}{k}} < \phi(p)^{\delta} \Leftrightarrow \phi(p)^n < \phi(a)^k \Leftrightarrow \phi(p^n) < \phi(a^k)$$
$$\Leftrightarrow \psi(p^n) < \psi(a^k) \Leftrightarrow \psi(p)^n < \psi(a)^k \Leftrightarrow \psi(p)^{\frac{n}{k}} < \psi(a) = \psi(p)^{\delta'}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{k} < \delta'.$$

Vì cận trên đúng của các phân số $\frac{n}{k}$ là δ cho nên $\delta \leq \delta'$. Do tính bình đẳng của δ và δ' suy ra $\delta = \delta'$. Chọn $\epsilon = \frac{\ln \psi(p)}{\ln \phi(p)}$ là một số dương không phụ thuộc a. Ta có:

$$\begin{aligned} \ln \psi(a) &= \delta' \ln \psi(p) = \delta \ln \psi(p) \\ &= \delta\epsilon \ln \phi(p) = \epsilon \ln \phi(p)^{\delta} = \epsilon \ln \phi(a) \\ &= \ln \phi(a)^{\epsilon}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $\psi(a) = \phi(a)^{\epsilon} \forall a \in K$ hay $\psi = \phi^{\epsilon}$ và do đó $\phi \sim \psi$.

□

Định lý 1.9.3. *Trên trường hữu hạn chỉ có duy nhất một chuẩn tầm thường.*

Chứng minh. Giả sử K là một trường hữu hạn có q phần tử và ϕ là chuẩn trên K, ta chứng minh $\phi(\alpha) = 1, \forall \alpha \in K$. Thật vậy, do K là trường hữu hạn nên nhóm nhân K^* các phần tử khác 0 của trường K là nhóm xiclic cấp $q-1$, sinh bởi phần tử $x \in K*$. Vì $x^{q-1} = 1$ nên $\phi(x^{q-1}) = \phi(x)^{q-1} = 1$ và vì vậy $\phi(x) = 1$. Do đó, với mọi $\alpha \in K^*, \alpha = x^k, 0 \leq k \leq q-2$, nên $\phi(\alpha) = \phi(x)^k = 1$. □

Định lý 1.9.4. *Cho ϕ là chuẩn không Acsimet trên K. Nếu các giá trị thực $\phi(\alpha)$ và $\phi(\beta)$ khác nhau thì*

$$\phi(\alpha + \beta) = \max\{\phi(\alpha), \phi(\beta)\}.$$

Chứng minh. Giả sử $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$. Ta chứng minh $\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha)$. Thật vậy, ta có:

$$\phi(\alpha + \beta) \leq \max\{\phi(\alpha), \phi(\beta)\} = \phi(\alpha).$$

Nếu $\phi(\alpha+\beta) < \phi(\alpha)$, kết hợp với $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$. Điều đó sẽ dẫn đến mâu thuẫn sau đây

$$\phi(\alpha) = \phi(\alpha+\beta-\beta) \leq \max\{\phi(\alpha+\beta), \phi(\beta)\} < \phi(\alpha).$$

Vì vậy, ta có

$$\phi(\alpha+\beta) = \max\{\phi(\alpha), \phi(\beta)\}.$$

□

1.10 Chuẩn trên trường số hữu tỉ

Mệnh đề 1.10.1. *Hàm số $\phi(x) = |x|^\alpha$, với α là một số thực tuỳ ý thoả mãn điều kiện $0 < \alpha \leq 1$, là một chuẩn trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.*

Chứng minh. Ta kiểm tra rằng:

$$\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Thật vậy, với $x = 0$, bất đẳng thức trên đúng. Giả sử $x \neq 0$ và $|x| \geq |y|$, khi đó:

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= |x+y|^\alpha = |x|^\alpha \left|1+\frac{x}{y}\right|^\alpha \leq |x|^\alpha \left(1+|\frac{x}{y}|\right)^\alpha \leq |x|^\alpha \left(1+|\frac{x}{y}|\right) \\
&\leq |x|^\alpha \left(1+|\frac{x}{y}|^\alpha\right) = |x| + |y|^\alpha = \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}$$

□

Định lý 1.10.2 (**Định lý Ostrowski**). *Các chuẩn $\phi(x) = |x|^\alpha$ với $0 < \alpha \leq 1$ và các chuẩn p -adic với tất cả các số nguyên tố p nhận hết các chuẩn không tầm thường của trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Nói khác đi, một chuẩn không tầm thường trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là tương đương với một trong hai chuẩn sau:*

1. *Hoặc chuẩn giá trị tuyệt đối*
2. *Hoặc chuẩn p-adic $|.|_p$ với p là một số nguyên tố nào đó.*