

TS. NGUYỄN DUY THUẬN (Chủ biên)

ThS. PHI MẠNH BAN – TS. NÔNG QUỐC CHINH

ĐẠI SỐ TUYỂN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Tailieu.vn

Mã số: 01.01.90/92. ĐH- 2003

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	11
CÁC KÍ HIỆU	15
 Chương I: ĐỊNH THỨC.....	18
MỞ ĐẦU	18
§1. PHÉP THỂ.....	20
1.1. Định nghĩa phép thể.....	20
1.2. Nghịch thể.....	21
1.3. Dấu của phép thể.....	21
§2. KHÁI NIỆM MA TRẬN.....	24
§3. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC	26
3.1. Định nghĩa.....	26
3.2. Tính chất của định thức	27
§4. KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC.....	33
4.1. Định thức con - Phần bù đại số	33
4.2. Khai triển định thức theo một dòng.....	34
4.3. Khai triển định thức theo r dòng	38
§5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC	42
5.1. Tính định thức cấp 3.....	42
5.2. Áp dụng phép khai triển định thức theo một dòng hoặc một cột.....	43
5.3. Đưa định thức về dạng tam giác.....	44
5.4. Áp dụng các tính chất của định thức	47
5.5. Phương pháp quy nạp và phương pháp truy hồi	49
5.6. Tính định thức bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử	51
§6. ỨNG DỤNG - HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER.....	55
6.1. Định nghĩa.....	55
6.2. Cách giải	55
6.3. Giải hệ Cramer bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử.....	58
TÓM TẮT.....	60
BÀI TẬP.....	62
VÀI NÉT LỊCH SỬ	67

Chương II: KHÔNG GIAN VECTƠ	69
MỞ ĐẦU	69
§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN	71
1.1. Định nghĩa.....	71
1.2. Một số tính chất đơn giản	72
1.3. Hiệu của hai vectơ	73
§2. KHÔNG GIAN CON	74
2.1. Định nghĩa.....	74
2.2. Tính chất đặc trưng.....	74
2.3. Tổng của những không gian con	76
2.4. Giao của những không gian con.....	76
2.5. Không gian sinh bởi một hệ vectơ	77
§3. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH.....	80
3.1. Định nghĩa.....	80
3.2. Các tính chất.....	81
§4. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ	85
4.1. Định nghĩa.....	85
4.2. Sự tồn tại của cơ sở	86
§5. SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ.....	89
5.1. Định nghĩa.....	89
5.2. Số chiều của không gian con	89
§6. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ.....	92
6.1. Định nghĩa.....	92
6.2. Ma trận chuyển.....	93
6.3. Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau	95
§7. HẠNG CỦA HỆ VECTƠ- HẠNG CỦA MA TRẬN.....	97
7.1. Hạng của hệ vectơ	97
7.2. Hạng của ma trận.....	98
7.3. Cách tìm hạng của ma trận	103
7.5. Tìm cơ sở, số chiều của không gian sinh bởi một hệ vectơ bằng máy tính điện tử.....	107
TÓM TẮT.....	111

BÀI TẬP.....	113
VÀI NÉT LỊCH SỬ	121
 Chương III: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH	123
MỞ ĐẦU	123
§1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - SỰ XÁC ĐỊNH MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH	124
1.1. Các định nghĩa.....	124
1.2. Sự xác định một ánh xạ tuyến tính	128
§2. ẢNH VÀ HẠT NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH.....	129
2.1. Định nghĩa và tính chất.....	129
2.2. Liên hệ giữa số chiều của ảnh, hạt nhân và không gian nguồn.....	133
2.3. Sự đẳng cấu giữa hai không gian cùng số chiều	135
§3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP CÁC ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - HOMK(V, W).....	136
3.1. Phép cộng hai ánh xạ tuyến tính	136
3.2. Phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số.....	137
3.3. Không gian vectơ $\text{Hom}_K(V, W)$	138
3.4. Tích hai ánh xạ tuyến tính.....	139
TÓM TẮT.....	141
BÀI TẬP.....	143
VÀI NÉT LỊCH SỬ	147
 Chương IV: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.....	148
Mở đầu.....	148
§1. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH - PHƯƠNG PHÁP GAUSS.....	149
1.1. Định nghĩa.....	149
1.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss (khử dần ẩn số).....	150
1.3. Thực hiện phương pháp Gauss trên máy tính điện tử	156
§2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CÓ NGHIỆM	159
2.1. Điều kiện có nghiệm.....	159
2.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng định thức	160

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT	165
3.1. Định nghĩa.....	165
3.2. Không gian nghiệm của hệ thuần nhất	166
3.3. Liên hệ giữa nghiệm của hệ phương trình tuyến tính và nghiệm của hệ thuần nhất liên kết	170
3.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng máy tính điện tử	171
TÓM TẮT.....	174
BÀI TẬP.....	175
VÀI NÉT LỊCH SỬ	181
 Chương V: MA TRẬN.....	183
MỞ ĐẦU	183
§1. MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH	184
1.1. Định nghĩa.....	184
1.2. Liên hệ giữa $\text{Hom}_K(V, W)$ với $\text{Mat}_{(m,n)}(K)$	186
§2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP MA TRẬN	188
2.1. Phép cộng.....	188
2.2. Phép nhân một ma trận với một số.....	189
2.3. Phép trừ.....	190
2.4. Không gian vectơ $\text{Mat}_{(m,n)}(K)$	190
2.5. Tích của hai ma trận	191
2.6. Thực hiện các phép toán ma trận bằng máy tính bỏ túi và máy tính điện tử	196
§3. ĐẠI SỐ $\text{MATN}(K)$ CÁC MA TRẬN VUÔNG CẤP N.....	200
3.1. Định thức của tích hai ma trận.....	200
3.2. Ma trận nghịch đảo.....	202
3.3. Tìm ma trận nghịch đảo	204
3.4. Một vài ứng dụng đầu tiên của ma trận nghịch đảo	210
3.5. Ma trận của một đẳng cấu.....	211
§4. SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN CỦA MỘT ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI THAY ĐỔI CƠ SỞ - MA TRẬN ĐỒNG DẠNG	212
4.1. Sự thay đổi của ma trận của một ánh xạ tuyến tính khi thay đổi cơ sở.....	212
4.2. Ma trận đồng dạng.....	213

§5. VECTƠ RIÊNG-GIÁ TRỊ RIÊNG	215
5.1. Vectơ riêng- Giá trị riêng.....	215
5.2. Đa thức đặc trưng - Cách tìm vectơ riêng.....	217
5.3. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng bằng máy tính điện tử.....	222
§6. CHÉO HOÁ MA TRẬN	224
6.1. Định nghĩa.....	224
6.2. Điều kiện để một ma trận chéo hoá được	224
6.3. Định lí.....	227
TÓM TẮT.....	228
BÀI TẬP.....	230
VÀI NÉT LỊCH SỬ	240
 Chương VI: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH DẠNG TOÀN PHƯƠNG ...	241
MỞ ĐẦU	241
§1. DẠNG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG SONG TUYẾN TÍNH	242
1.1. Định nghĩa, ví dụ	242
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG.....	249
2.1. Định nghĩa.....	249
2.2. Ma trận của dạng toàn phương.....	250
2.3. Dạng toàn phương xác định	251
§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC	252
3.1. Định nghĩa.....	252
3.2. Định lý	252
3.3. Dưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng máy tính điện tử.....	257
3.4. Định lý quán tính.....	259
§4. KHÔNG GIAN VECTƠ ƠCLIT	262
4.1. Định nghĩa không gian vectơ Ơclit	262
4.2. Cơ sở trực chuẩn	263
4.3. Không gian con bù trực giao.....	268
4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con.....	269
4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao	270
4.6. Phép biến đổi đối xứng	271
4.7. Ứng dụng	272

TÓM TẮT.....	280
§1. DẠNG TUYẾN TÍNH, DẠNG SONG TUYẾN TÍNH.....	280
1.1. Định nghĩa.....	280
1.2. Ma trận của dạng song tuyến tính	281
1.3. Liên hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng song tuyến tính đối với hai cơ sở khác nhau.....	281
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG.....	282
2.1. Dạng toàn phương	282
2.2. Ma trận của dạng toàn phương.....	282
2.3. Dạng toàn phương xác định	282
§3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC	283
3.1. Định nghĩa.....	283
3.2. Định lý.	283
3.3. Dùng phần mềm Maple để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc	283
3.4. Định lý quán tính.....	284
§4. KHÔNG GIAN VECTƠ OCLIT	285
4.1. Định nghĩa.....	285
4.2. Cơ sở trực chuẩn	285
4.3. Không gian con bù trực giao.....	286
4.4. Hình chiếu của một vectơ lên không gian con.....	286
4.5. Phép biến đổi trực giao - Ma trận trực giao	286
4.6. Phép biến đổi đối xứng	287
4.7. Ứng dụng	287
BÀI TẬP.....	288
§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH.....	288
§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG.....	289
VÀI NÉT LỊCH SỬ	293
 Chương VII: QUY HOẠCH TUYẾN ANH.....	294
MỞ ĐẦU	294
§1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	295
1.1. Một vài bài toán thực tế.....	295
1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính.....	297

1.3. Ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị.....	302
§2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ	306
2.1. Một số tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc ...	306
2.2. Phương pháp đơn hình.....	313
2.3. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính bằng máy tính điện tử (Theo lập trình tính toán với Mathematica 4.0).....	335
TÓM TẮT.....	339
BÀI TẬP.....	340
VÀI NÉT LỊCH SỬ	346
LỜI GIẢI -HƯỚNG DẪN -TRẢ LỜI	347
TÀI LIỆU THAM KHẢO	385

Tailieu.vn

LỜI NÓI ĐẦU

Ở thời đại của chúng ta, khoa học và kĩ thuật phát triển như vũ bão. Chúng đòi hỏi ngành giáo dục phải luôn luôn đổi mới kịp thời để đáp ứng mọi nhu cầu về tri thức khoa học của thanh thiếu niên, giúp họ có khả năng lao động và sáng tạo trong cuộc sống sôi động. Hiện nay chương trình và sách giáo khoa bậc phổ thông ở nước ta đã bắt đầu và đang thay đổi để phù hợp với đòi hỏi ấy. Trường Cao đẳng Sư phạm, cái nôi đào tạo giáo viên THCS, cần phải có những đổi mới tương ứng về chương trình và sách giáo khoa. Vì mục đích đó, bộ sách giáo khoa mới ra đời, thay thế cho bộ sách giáo khoa cũ.

Cuốn sách Đại số tuyến tính biên soạn lần này, nằm trong khuôn khổ của cuộc đổi mới ấy. Nó nhằm làm một giáo trình tiêu chuẩn chung cho các trường Cao đẳng Sư phạm trong cả nước theo chương trình mới (chương trình 2002), đòi hỏi không những phải đổi mới những nội dung kiến thức (nếu cần) và cả phương pháp giảng dạy của giảng viên cũng như phương pháp học tập của sinh viên. Mặt khác, qua một thời gian dài thực hiện chương trình và sách giáo khoa cũ, đến nay đã có thể đánh giá những ưu, khuyết điểm của nó, sự phù hợp của nó với trình độ đầu vào của sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm. Do đó cuốn sách biên soạn lần này cũng thừa hưởng những ưu điểm và khắc phục những thiếu sót của những cuốn sách cũ.

Đối tượng sử dụng cuốn sách này là sinh viên và giảng viên các trường Cao đẳng Sư phạm trong cả nước, các giáo viên THCS cần được bồi dưỡng để đạt trình độ chuẩn hoá. Cuốn sách cũng có thể được dùng cho các trường Đại học và Cao đẳng khác và cho tất cả những ai muốn tự học môn học này.

Cơ sở để lựa chọn nội dung của giáo trình này là yêu cầu đầu ra và trình độ đầu vào của sinh viên Cao đẳng Sư phạm hiện nay, đồng thời cũng cần tính đến vai trò của môn học đối với các môn khoa học khác như Giải tích, Hình học, Vật lý, Hoá học, v.v., và tạo điều kiện cho người học có thể học lên cao hơn. Cụ thể, giáo trình này phải trang bị được cho người giáo viên toán tương lai ở trường THCS những kiến thức cần thiết, đầy đủ, vững vàng về Đại số tuyến tính để giảng dạy tốt những phần liên quan trong chương trình toán THCS. Tuy nhiên, nội dung và phương pháp trình bày những nội dung ấy lại phải phù hợp với trình độ

nhận thức và khả năng tiếp nhận sinh viên. Mặt khác, giáo trình này cũng phải cung cấp đầy đủ kiến thức giúp người đọc có thể học được những môn khoa học khác như đã nói trên; đồng thời đáp ứng mong muốn của những sinh viên có hoài bão nâng cao hơn nữa trình độ của mình. Vì thế, nội dung cuốn sách chứa đựng những điều rất cơ bản mà mọi sinh viên cần nắm vững, nhưng cũng có những phần không đòi hỏi mọi sinh viên đều phải hiểu.

Môn quy hoạch tuyến tính có sử dụng nhiều kiến thức đại số tuyến tính. Nhiều sách Đại số tuyến tính trên thế giới xếp nó như một chương của mình dưới đề mục "Bất phương trình tuyến tính". Trong chương trình Cao đẳng Sư phạm mới của hệ đào tạo giáo viên dạy hai môn, nội dung của môn Quy hoạch tuyến tính có giảm bớt. Nó cũng được xếp vào một chương trong giáo trình Đại số tuyến tính này.

Cuốn sách này gồm bảy chương:

Chương I. Trình bày định nghĩa, các tính chất của định thức và các phương pháp cơ bản tính định thức. Đó là một phương tiện để nghiên cứu không gian vector và lý thuyết hệ phương trình tuyến tính.

Chương II và chương III. Nghiên cứu không gian vector và các ánh xạ giữa các không gian ấy - ánh xạ tuyến tính. Nó là cơ sở của Đại số tuyến tính. Nó giúp cho việc hoàn thiện lý thuyết hệ phương trình tuyến tính.

Chương IV. Hệ phương trình tuyến tính. Đó là một trong những hướng mở rộng của phương trình được học ở trường phổ thông. Với chương này, lý thuyết hệ phương trình tuyến tính được coi là hoàn thiện.

Chương V. Nghiên cứu ma trận và mối liên hệ giữa ma trận với không gian vector. Nhờ nó mà các ánh xạ tuyến tính được nghiên cứu sâu sắc hơn.

Chương VI. Nghiên cứu dạng song tuyến tính và dạng toàn phương, một phần của lý thuyết dạng trong Đại số tuyến tính nhưng lại có ảnh hưởng sâu sắc đến Hình học, Phương trình vi phân và Phương trình đạo hàm riêng.

Chương VII: Nghiên cứu một số bài toán của Quy hoạch tuyến tính.

Phần Đại số tuyến tính của cuốn sách này được dùng chung cho cả hai hệ đào tạo giáo viên toán (hệ đào tạo giáo viên dạy môn Toán cùng với môn thứ hai, và hệ đào tạo giáo viên dạy chỉ một môn Toán). Yêu cầu đối với mỗi hệ có khác nhau. Đối với hệ đào tạo giáo viên dạy hai

môn, chương trình chỉ yêu cầu sinh viên nắm được những điều rất cơ bản. Chẳng hạn, đối với chương Định thức yêu cầu chỉ là hiểu được định nghĩa định thức, nắm vững các tính chất để tính được các định thức thông thường, không cần hiểu kĩ chứng minh của các tính chất này. Song đối với hệ đào tạo giáo viên chỉ dạy Toán thì đòi hỏi cao hơn cả về nội dung và cả về rèn luyện và phát triển tư duy toán học. Tuy nhiên những đòi hỏi này được thực hiện đến đâu còn tùy thuộc vào trình độ sinh viên ở từng địa phương. Đó là phần mềm dẻo mà các trường vận dụng linh hoạt. Phần Quy hoạch tuyến tính ở đây chỉ dùng cho hệ đào tạo giáo viên dạy hai môn.

Mỗi chương đều có phần mở đầu nêu lên những yêu cầu và cách học tập của chương ấy. Cuối mỗi chương có phần tóm tắt đôi nét chính nội dung của chương để bạn đọc có dịp ôn tập lại. Phần bài tập có một số lượng có thể vượt quá yêu cầu chung đôi chút vì các tác giả cuốn sách mong muốn giúp cho những bạn đọc ham thích môn học này có thêm cơ hội rèn luyện kĩ năng. Vì vậy, đối với số đông sinh viên thì giảng viên cần chỉ dẫn cho họ những bài cụ thể. Tuy nhiên bạn đọc cố gắng giải càng nhiều bài tập càng tốt. Các phần in chữ nhỏ không đòi hỏi sinh viên phải đọc. Chúng chỉ dành cho những ai thích thú tìm hiểu.

Để học được giáo trình này, người học cần được bổ sung kiến thức về số phức khi mà chương trình Toán ở THPT chưa đề cập tới; hơn nữa cũng cần có khái niệm về các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường để tiện diễn đạt và bắt nhịp được với cách trình bày giáo trình; cần củng cố vững vàng kiến thức toán học bậc THPT.

Giáo trình này được học vào năm thứ nhất sau phần cấu trúc đại số của giáo trình Nhập môn Toán học Cao cấp.

Khi giảng dạy giáo trình này, có thể kết hợp nhiều hình thức như thuyết trình của giảng viên, hướng dẫn sinh viên tự đọc sách, tổ chức xêmina, v.v... Chẳng hạn, có thể tổ chức xêmina ở các mục: Các phương pháp tính định thức; Giải hệ phương trình tuyến tính; Các phép tính về ma trận. Một điều mà các tác giả muốn lưu ý thêm đối với các giảng viên là: vì giáo trình còn được sử dụng để tự học nên có nhiều chỗ phải đặt vấn đề dẫn dắt người học, có nhiều ví dụ. Do đó khi giảng bài ở lớp, các giảng viên nên lựa chọn những điều cần thiết nhất để có đủ thời gian truyền đạt những kiến thức cơ bản, những phần còn lại dành cho sinh viên tự học. Cũng như đã nói trên, Đại số tuyến tính có nhiều ứng dụng, do đó sinh viên cần có kĩ năng vận dụng kiến thức và kỹ năng tính toán.

Muốn thế việc thực hành của sinh viên cần được coi trọng. Nên cố gắng giảm bớt thời gian học lý thuyết ở lớp để giành thêm thời gian cho việc giải bài tập của sinh viên, và nếu có thể thu xếp được một tỉ lệ giữa thời gian dạy lý thuyết và thời gian làm bài tập là 1/1 thì càng tốt.

Đối với người học, khi học giáo trình này luôn luôn có giấy và bút trong tay để tự mình mô tả các khái niệm dựa theo những định nghĩa; tự mình chứng minh các định lý sau khi đã tìm hiểu kỹ giả thiết và kết luận; vận dụng các khái niệm, các định lý để tự mình trình bày các ví dụ cho trong sách. Cuối mỗi chương có phần tóm tắt, bạn đọc nên tận dụng nó để củng cố và hệ thống lại kiến thức đã học được ở chương ấy. Cũng cần nói thêm rằng Đại số tuyến tính là một trong những ngành khoa học cổ nhất nhưng cũng rất hiện đại. Những điều được trình bày ở đây chỉ là những điều cơ bản nhất, mở đầu của Đại số tuyến tính trên trường số (mà chủ yếu là trường số thực). Còn nhiều vấn đề nội dung chưa thể đề cập tới.

Trong cuốn sách này chữ **K** được kí hiệu chung cho cả ba trường số, trường số hữu tỉ **Q**, trường số thực **R** và trường số phức **C**, mỗi khi muốn nói một điều gì chung cho cả ba trường số ấy.

Cuối cùng, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách đáp ứng được những đòi hỏi của chương trình, những mong muốn của bạn đọc. Tuy nhiên, cuốn sách chưa tránh khỏi hết mọi khiếm khuyết. Vì thế, các tác giả mong nhận được nhiều ý kiến của bạn đọc để có thể sửa chữa những sai sót làm cho cuốn sách ngày càng hoàn thiện và ngày càng hữu ích hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Các tác giả

CÁC KÍ HIỆU

X_n	Tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ gồm n số tự nhiên từ 1 đến n .
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$	Phép thế σ biến phần tử 1 thành $\sigma(i)$.
S_n	Tập hợp các phép thế trên tập X_n
$\text{sgn}(\sigma)$	Dấu của phép thế σ .
$\sum_{i=1}^n a_i$	Tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
$\sum_{j \in J} a_j$	Tổng các số a_j , với j thuộc tập chỉ số J .
$\prod_{i=1}^n a_i$	Tích $a_1 a_2 \dots a_n$.
$\prod_{j \in J} a_j$	Tích các thừa số a_j , với j thuộc tập chỉ số J .
$A = (a_{ij})_{(m,n)}$	Ma trận A có m dòng, n cột, với các thành phần a_{ij} ở dòng thứ i , cột thứ j .
$A = (a_{ij})_n$	Ma trận vuông cấp n .
$\text{Mat}_n(\mathbf{K})$	Tập hợp các ma trận vuông cấp n với các thành phần thuộc trường $\mathbf{K}$.
${}^t A$	Ma trận chuyển vị của ma trận A .
A^{-1}	Ma trận nghịch đảo của ma trận A .
$ A $	Định thức của ma trận A .
I	Ma trận đơn vị.
$\tilde{M}_{ij}$	Định thức con bù của thành phần a_{ij} trong ma trận vuông (a_{ij}) .

A_{ij}	Phần bù đại số của thành phần a_{ij} .
$M_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$	Định thức con xác định bởi các dòng $i_1, \dots, i_r$ và các cột $j_1, \dots, j_r$.
$\tilde{M}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$	Định thức con bù của định thức con $M_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$.
$A_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$	Phần bù đại số của định thức con $M_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$.
$\text{hạng}(A)$	Hạng của ma trận A .
$A + B$	Tổng của hai ma trận A và B .
AB	Tích của hai ma trận A và B .
$\vec{\alpha}$	Vectơ, là một phần tử của không gian vectơ.
$-\vec{\alpha}$	Vectơ đối của $\vec{\alpha}$.
$\vec{0}$	Vectơ không.
$\mathcal{A} = \{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m\}$	Hệ vectơ gồm các vectơ $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_m$.
$\text{hạng}(\mathcal{A})$	Hạng của hệ vectơ $\mathcal{A}$.
$(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$	Cơ sở (ε) của không gian vectơ.
$\dim_K V$	Số chiều của K -không gian vectơ V .
$f: V \rightarrow W$	Ánh xạ tuyến tính từ không gian V đến không gian W .
$f(X)$	Ảnh của tập X qua ánh xạ tuyến tính f .
$\text{Im} f$	Ảnh của không gian V hay ảnh của ánh xạ tuyến tính f .
$f^{-1}(Y)$	Ảnh ngược của tập Y .
$\text{Ker} f$ hay $f^{-1}(0)$	Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f .
$\text{Hom}_K(V, W)$	Tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V đến W .
$f + g$	Tổng của hai ánh xạ tuyến tính f và g .
gf	Tích của hai ánh xạ tuyến tính f và g .
$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	Tích vô hướng của hai vectơ.

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

$\vec{\alpha}$ trực giao với $\vec{\beta}$.

$$H \perp G$$

Không gian H trực giao với không gian G.

$$\|\vec{\alpha}\|$$

Chuẩn của $\vec{\alpha}$.

$$\text{hch}_W \vec{\alpha}$$

Hình chiếu của $\vec{\alpha}$ lên không gian W.

$$|z|$$

Môđun của số phức z.

$$\bar{z}$$

Số phức liên hợp của số phức z.

$$“\Rightarrow”$$

Chứng minh điều kiện cần.

$$“\Leftarrow”$$

Chứng minh điều kiện đủ.

$$x^*$$

Phương án tối ưu.

$$X^*$$

Tập phương án tối ưu.

$$A_i$$

Vectơ dòng thứ i của ma trận A.

$$A_j$$

Vectơ cột thứ j của ma trận A.

Chương I

ĐỊNH THỨC

MỞ ĐẦU

Ở lớp 9, ta giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế. Những phương pháp này đã giúp ta dễ dàng giải các hệ phương trình với hệ số bằng số. Nhưng lên lớp 10, khi phải biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ta thấy hai phương pháp trên kém tổng quát. Song nếu dùng khái niệm *định thức cấp hai* thì việc trình bày trở nên sáng sủa, gọn gàng.

Ta sẽ thấy rằng khi khái niệm định thức cấp n , (với n là một số nguyên dương tùy ý) được xây dựng, thì nó có một vai trò rất to lớn. Nó còn được áp dụng vào hầu hết các chương trong giáo trình này; đặc biệt, nó góp phần đưa vấn đề giải hệ phương trình bậc nhất trở thành một lý thuyết. Nó còn được áp dụng trong nhiều bộ môn khoa học khác như Hình học, Giải tích, Vật lý, Hoá học, v.v...

Chính vì thế mà ta cần nắm vững các tính chất của định thức và các phương pháp tính định thức, làm nhiều bài tập rèn luyện kỹ năng tính định thức để có thể vận dụng tốt khi học tập và nghiên cứu bộ môn Đại số tuyến tính này cũng như những môn khoa học khác.

Để định nghĩa định thức cấp n ta cần các khái niệm phép thế và ma trận.

Yêu cầu chính của chương này là:

- Hiểu rõ và nắm vững các tính chất của định thức.
- Nắm vững các phương pháp tính định thức để có thể tính thành thạo những định thức cần thiết.

Hơn nữa, trong chương này ta cần dùng một vài kí hiệu sau: Tổng của n số: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$, ($n \geq 1$), được viết gọn là $\sum_{i=1}^n a_i$, đọc là "xích ma a_i , i chạy từ 1 đến n ". Tổng quát hơn, nếu chỉ số chạy khắp một tập I nào đó thì ta viết là $\sum_{i \in I} a_i$, và đọc là "xích ma a_i , thuộc I ".

Ví dụ : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \sum_{i=1}^7 a_i$, đọc là “xích ma a_i , i chạy từ 1 đến 7”.

- Tích của n số: $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, ($n \geq 1$), được viết gọn là $\prod_{i=1}^n a_i$, và đọc là “pi a_i , i chạy từ 1 đến n ”. Nếu chỉ số chạy khắp một tập I nào đó thì ta viết là $\prod_{i \in I} a_i$ và đọc là “pi, a_i , i thuộc I ”.

Ví dụ: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = \prod_{i=1}^5 a_i$, đọc là “pi a_i , i chạy từ 1 đến 5”.

- Cuối cùng trong cuốn sách này ta dùng từ “trường **K**” mỗi khi muốn nói đến một điều nào đó chung cho cả trường số hữu tỉ **Q**, trường số thực **R** và trường số phức **C**.

Ta hãy tìm hiểu khái niệm phép thế.

§1. PHÉP THẾ

Ở đây ta chỉ dùng khái niệm phép thế như một phương tiện để nghiên cứu định thức chứ chưa nghiên cứu sâu về nó. Để học chương này bạn đọc chỉ cần hiểu và nhớ định nghĩa các dạng phép thế và tính chất về dấu của nó, không cần nhớ chứng minh.

1.1. Định nghĩa phép thế

a) Giả sử tập hợp $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, ($n \geq 1$). Một song ánh $\sigma : X_n \rightarrow X_n$ được gọi là một phép thế trên tập X_n .

Nói riêng, song ánh đồng nhất được gọi là phép thế đồng nhất.

b) Một phép thế τ trên tập X_n được gọi là một chuyển trí hai phần tử i, j thuộc X_n nếu $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ và $\tau(k) = k$, với mọi $k \in X_n$, $k \neq i$, $k \neq j$. Nó còn được kí hiệu bởi (i, j) .

Nói một cách đơn giản, một chuyển trí chỉ hoán vị hai phần tử nào đó của X_n , còn giữ nguyên mọi phần tử khác.

Tập hợp tất cả các phép thế trên tập X_n được kí hiệu bởi S_n .

Phép thế $\sigma : X_n \rightarrow X_n$ được biểu diễn như sau:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

trong đó $\sigma(i)$ là ảnh của phần tử $i \in X_n$ được viết ở dòng dưới, trong cùng một cột với i .

Ví dụ 1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ là phép thế trên tập $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ xác định bởi:

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1.$$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ là một chuyển trí hoán vị hai số 2 và 4. Nó được viết gọn là $\tau = (2, 4)$.

Chú ý. Ảnh của các phần tử của tập X_n qua mỗi phép thế cho ta một hoán vị trên tập X_n . Ngược lại, mỗi hoán vị lại xác định một phép thế,

(chẳng hạn, hoán vị (3, 4, 1, 2) xác định phép thế $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ trên tập X_4). Vì thế số các phép thế trên tập X_n bằng số các hoán vị trên tập ấy; nghĩa là bằng $n!$. Như vậy, tập S_n có $n!$ phần tử.

Ví dụ 2. S_3 có $3! = 1.2.3 = 6$ phần tử. Đó là những phép thế sau:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Nghịch thế

Định nghĩa. Giả sử mà một phép thế trên tập X_n . Với $i, j \in X_n$, $i \neq j$, ta nói cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ là một nghịch thế của σ nếu $i < j$ nhưng $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ví dụ. Trên X_3 , phép thế $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Có 2 nghịch thế là: (2, 1), (3, 1), phép thế $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ có 3 nghịch thế là: (3, 2), (3, 1), (2, 1).

1.3. Dấu của phép thế

Định nghĩa. Ta gọi phép thế σ là một phép thế chẵn nên nó có một số chẵn nghịch thế. σ được gọi là phép thế lẻ nếu nó có một số lẻ nghịch thế.

Ta gán cho mỗi phép thế chẵn một giá trị bằng +1, mỗi phép thế lẻ một giá trị bằng -1.

Giá trị này của phép thế σ được gọi là dấu của σ và được kí hiệu bởi $\text{sgn}(\sigma)$.

Như vậy, theo định nghĩa, $\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \sigma \text{ chẵn} \\ -1, & \text{nếu } \sigma \text{ lẻ} \end{cases}$

Ví dụ. Trong ví dụ ở mục 1.2, ta thấy phép thế $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ là một