Chương 3

KHÔNG GIAN VECTƠ

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Định nghĩa

Cho tập hợp $V \neq \emptyset$ trên đó có hai phép toán; một phép toán trong mà ta gọi là *phép cộng* và một phép toán ngoài mà ta gọi là *phép nhân với số thực,*

$$\begin{array}{llll} + : V \times V \to V & & \times : \mathbb{R} \times V \to V \\ \quad (u, v) \mapsto u + v & & \quad (k, u) \mapsto k \cdot u \equiv ku \end{array}$$

Tập V cùng với hai phép toán trên được gọi là một *không gian vectơ* trên $\mathbb{R}$ nếu các phép toán trên V thỏa các tính chất sau, với mọi $u, v, w \in V$, $h, k \in \mathbb{R}$,

i) $u + v = v + u$, (tính giao hoán)

ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$, tính kết hợp)

iii) tồn tại duy nhất phần tử của V, ký hiệu $\mathbf{0}$, sao cho $u + \mathbf{0} = u$ ($\mathbf{0}$ được gọi là *phần tử trung hòa* của phép cộng, đọc là *vectơ không*),

iv) ứng với mỗi $u \in V$, tồn tại duy nhất phần tử của V, ký hiệu $-u$, sao cho $u + (-u) = 0$ (phần tử $-u$ được gọi là *phần tử đối* hay *vectơ đối* của u),

v) $h(ku) = (hk)u$,

vi) $h(u + v) = hu + hv$,

vii) $(h + k)u = hu + ku$,

viii) $1 \cdot u = u$.

Không gian vectơ V còn được ký hiệu đầy đủ là $(V, +, \cdot)$.

Ví dụ 1. i) Tập các ma trận vuông cấp 2, $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ với hai phép toán, cộng hai ma trận và nhân một số thực với một ma trận, là một không gian vectơ.

ii) Tập $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với hai phép toán,

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3),$$

thỏa các điều kiện để trở thành một không gian vectơ.

Tổng quát : Tập $\mathbb{R}^n = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \middle| x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\right\}$, với hai phép toán

$$\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\right),$$

$$k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \left(kx_1, kx_2, ..., kx_n\right),$$

là một không gian vectơ.

1.2. Định nghĩa. Cho $\left(V, +, \cdot\right)$ là một không gian vectơ và $u_1, u_2, ..., u_n \in V$. Với mỗi dãy số $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$, ta gọi

$$k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n$$

là một *tổ hợp tuyến tính* các vectơ $u_1, u_2, ..., u_n$.

Ví dụ 2. i) Cho $V = M_2\left(\mathbb{R}\right)$. Với

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V,$$

và $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$, ta có một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, u_4 là

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & k_2 + k_3 \\ k_1 + k_4 & k_2 + k_4 \end{pmatrix} \in V$$

ii) Với $V = \mathbb{R}^3$, $u_1 = \left(1,1,0\right)$, $u_2 = \left(0,1,1\right)$, $u_3 = \left(1,0,1\right)$, ta có các tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 là

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \left(k_1 + k_3, k_1 + k_2, k_2 + k_3\right), \text{ với } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

1.3. Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ, $W \subset V$, $W \neq \varnothing$. Nếu với mỗi $u, v \in W$, $k \in \mathbb{R}$, ta đều có $u + v,\ ku \in W$, ta nói W là một *không gian vectơ con* hay vắn tắt là *không gian con* của V, ký hiệu $W \leq V$.

Ví dụ 3. i) Với $V = \mathbb{R}^2$ và $W_1 = \left\{\left(x, 0\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$, ta có $W_1 \subset V$, $W_1 \neq \varnothing$ và với mọi $\left(x, 0\right)$, $\left(y, 0\right) \in W_1$, $k \in \mathbb{R}$,

$$\left(x, 0\right) + \left(y, 0\right) = \left(x + y, 0\right) \in W_1,$$

$$k\left(x, 0\right) = \left(kx, 0\right) \in W_1.$$

Do đó $W_1 \leq V$.

Với $W_2 = \left\{\left(m, 2m\right) : m \in \mathbb{R}\right\}$, ta có $W_2 \subset V$, $W_2 \neq \varnothing$ và với mọi $\left(m, 2m\right)$, $\left(n, 2n\right) \in W_2$, $k \in \mathbb{R}$,

$$\left(m,\ 2m\right) + \left(n,\ 2n\right) = \left(m + n,\ 2\left(m + n\right)\right) \in W_2,$$

$$k(m, 2m) = (km,\ 2km) \in W_2.$$

Vậy W_2 cũng là một không gian vectơ con của V.

ii) Xét không gian vectơ các ma trận vuông cấp 2, $V = M_2(\mathbb{R})$, và W là tập hợp các ma trận chéo cấp 2,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset V.$$

Do $W \neq \varnothing$, tổng của hai ma trận chéo cũng là một ma trận chéo và tích của một ma trận chéo với một số thực cũng là một ma trận chéo. Nói khác đi, tổng hai phần tử của W là một phần tử của W, tích của phần tử thuộc W với một số cũng là phần tử của W nên tập hợp tất cả các ma trận chéo cấp 2 là một không gian vectơ con của không gian các ma trận vuông cấp hai.

iii) Xét $V = \mathbb{R}^3$ và $W = \left\{ (m+n, m-n, n) \middle| m, n \in \mathbb{R} \right\}$. Ta có W là một tập con không rỗng của V và với mọi $k \in \mathbb{R}$, $u_1 = (m_1 + n_1, m_1 - n_1, n_1)$, $u_2 = (m_2 + n_2, m_2 - n_2, n_2) \in W$, ta có

$$u_1 + u_2 = \big((m_1 + m_2) + (n_1 + n_2), (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2), n_1 + n_2\big) \in W,$$

$$ku_1 = (km_1 + kn_1, km_1 - kn_1, kn_1) \in W.$$

Do đó $W \leq V = \mathbb{R}^3$.

1.4. Định lý. *Cho* V *là một không gian vectơ và hệ các vectơ* $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$. *Tập* W *các tổ hợp tuyến tính của* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *là một không gian vectơ con của* V,

$$W = \{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n : k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}\} \leq V.$$

Ta nói W *là không gian vectơ con sinh bởi* S, *hay* S *sinh ra* W, *ký hiệu*

$$W = \langle S \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle.$$

Ví dụ 4. Với V và W cho trong ví dụ 3, phần iii), ta có

$$W = \{(m+n, m-n, n) | m, n \in \mathbb{R}\} = \{(m, m, 0) + (n, -n, n) | m, n \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{m(1,1,0) + n(1,-1,1) | m, n \in \mathbb{R}\}$$

nên $W = \langle (1,1,0), (1,-1,1) \rangle$ và do đó nó là một không gian vectơ con của V.

Xuất phát từ nhận xét rằng tập nghiệm W của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất theo n ẩn số là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$ và tổng hai nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất cũng như tích một nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với một hằng số cũng là nghiệm của hệ phương trình đó, ta được

Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất theo n *ẩn số là một không gian vectơ con của* $\mathbb{R}^n$.

Hơn nữa, bằng phương pháp Gauss, ta còn tìm được một tập sinh của không gian nghiệm một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta nhận được nghiệm

$$(8m - 7n, -6m + 5n, m, n);\ m, n \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ này là

$$W = \{(8m - 7n, -6m + 5n, m, n) \mid m, n \in \mathbb{R}\} = \langle (8,-6,1,0), (-7,5,0,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4.$$

Đặc biệt, khi $\langle S \rangle = V$, ta nói S *sinh ra* V. Khi đó, mọi vectơ của V đều là một tổ hợp tuyến tính các phần tử của S, nghĩa là ứng với mỗi vectơ $v \in V$, ta tìm được $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n.$$

Ví dụ 6. Xét $V = \mathbb{R}^3$ và $S = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$, với $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (0,1,1)$.

a) Với $v = (2,4,6) \in \mathbb{R}^3$ và $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, ta có

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 \Leftrightarrow (2,4,6) = k_1(1,1,0) + k_2(1,0,1) + k_3(0,1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + k_3 = 4 \\ k_2 + k_3 = 6 \end{cases} \tag{3.1}$$

Chú ý rằng, nếu hệ (3.1) có nghiệm, nghĩa là tồn tại $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$, thì v là một tổ hợp tuyến tính các phần tử của S. Nếu hệ (3.1) vô nghiệm, nghĩa là không tồn tại k_1, k_2, k_3 sao cho $v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$, thì v không là một tổ hợp tuyến tính các phần tử của S.

Do hệ (3.1) có nghiệm

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 4 \end{cases}$$

nghĩa là $v = 0e_1 + 2e_2 + 4e_3$ nên v là một tổ hợp tuyến tính các phần tử của S.

b) Nếu mọi vectơ $v \in \mathbb{R}^3$ đều là một tổ hợp tuyến tính các vectơ của S thì S sinh ra $\mathbb{R}^3$. Ngược lại, nếu tồn tại vectơ $v \in \mathbb{R}^3$ sao cho v không là một tổ hợp tuyến tính của S thì S không sinh ra $\mathbb{R}^3$. Do đó, để kiểm tra xem S có sinh ra $\mathbb{R}^3$ hay không, ta xét vectơ bất kỳ $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Do

v là một tổ hợp tuyến tính các vectơ của S

$\Leftrightarrow$ tồn tại $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $v = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = a \\ k_1 + k_3 = b \\ k_2 + k_3 = c \end{cases}, \text{ có nghiệm.}$$

Hệ phương trình nêu trên là hệ Cramer nên nó luôn luôn có nghiệm bất chấp các tham số a, b, c. Do đó mọi vectơ $v \in \mathbb{R}^3$ đều là tổ hợp tuyến tính các phần tử của S. Vậy S sinh ra $\mathbb{R}^3$.

1.5. Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và hệ các vectơ $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$. Ta nói S là *độc lập tuyến tính* khi với mọi $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$, nếu

$$k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_ne_n = \mathbf{0}$$

thì $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$.

Khi S không độc lập tuyến tính, ta nói S *phụ thuộc tuyến tính*, nghĩa là tồn tại $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 (có ít nhất một $k_i \neq 0$) sao cho $k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_ne_n = \mathbf{0}$.

Ví dụ 7. Cho $V = \mathbb{R}^3$ và $S = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ với $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (0,1,1)$. Với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất theo các ẩn k_1, k_2, k_3. Nếu hệ phương trình này chỉ có nghiệm tầm thường $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, thì S độc lập tuyến tính. Ngược lại, nếu hệ này có ít nhất một nghiệm tầm thường, nghĩa là có k_1, k_2, k_3 không đồng thời bằng 0 sao cho $k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = \mathbf{0}$, thì S phụ thuộc tuyến tính.

Trong ví dụ này, hệ thuần nhất (3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Vậy S độc lập tuyến tính.

Ví dụ 8. Cho $V = \mathbb{R}^3$ và $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ với

$$u_1 = (1, -2, 1),\ u_2 = (2, 1, -1),\ u_3 = (7, -4, 1).$$

Với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 + 7k_3 = 0 \\ -2k_1 + k_2 - 4k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Hệ (3.3) có ít nhất một nghiệm không tầm thường nên ta kết luận S phụ thuộc tuyến tính. Cụ thể, giải hệ (3) bằng phương pháp Gauss, ta nhận được nghiệm tổng quát của hệ là $(-3m, -2m, m)$, $m \in \mathbb{R}$. Với $m = -1$, ta được một nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = -1 \end{cases}.$$

Điều này có nghĩa là $3u_1 + 2u_2 - u_3 = \mathbf{0}$ và do đó S phụ thuộc tuyến tính.

2. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA MỘT KHÔNG GIAN VECTƠ

2.1. Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$. Ta nói S là một *cơ sở* của V nếu

i) $\langle S \rangle = V$, nghĩa là S sinh ra V, và

ii) S độc lập tuyến tính.

Khi đó, ta nói V là một không gian vectơ *hữu hạn chiều*. Người ta chứng minh được rằng bất cứ một cơ sở nào khác của V cũng phải có đúng n vectơ và giá trị n duy nhất này được gọi là *số chiều* của V, ký hiệu $\dim V = n$.

Khi đó, ứng với mỗi vectơ $v \in V$, tồn tại duy nhất $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ sao cho $v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$. Bấy giờ, $k_1, k_2, ..., k_n$ được gọi là các *tọa độ* của v đối với cơ sở S, ký hiệu

$$[v]_S = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 9.

i) Cho $V = \mathbb{R}^2$. Ta có $S = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, với $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ là một cơ sở của V và với mọi vectơ $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, ta có $v = a\vec{i} + b\vec{j}$ và do đó ta được

$$[v]_S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

S được gọi là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}^2$. Tọa độ của một bộ thứ tự trong cơ sở chính tắc này chính là các thành phần của bộ thứ tự đó.

Hệ các vectơ $S' = \{e'_1, e'_2\} \subset \mathbb{R}^2$, với $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (-1,1)$, cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và vì với mọi vectơ $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - k_2 = a \\ k_1 + k_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{a+b}{2} \\ k_2 = \frac{b-a}{2} \end{cases}.$$

Do đó,

$$[v]_{S'} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{b-a}{2} \end{pmatrix}$$

Tổng quát. Xét $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = \overline{1,n}\}$. Ta có $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, với

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,...,0) \\ e_2 = (0,1,...,0) \\ ... \\ e_n = (0,0,...,1) \end{cases}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, gọi là *cơ sở chính tắc*. Khi đó, với mọi vectơ $v = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, do

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

ta suy ra

$$[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ví dụ 10. Xét $V = \mathbb{R}^3$ và $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$,

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1).$$

Với $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lấy $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$, với $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1)$, là một cơ sở khác của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$[v]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Vậy

$$[v]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Định lý. *Cho* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *là hai cơ sở của một không gian vectơ* V. *Khi đó, với mọi* $v \in V$ *ta có* $[v]_{\mathscr{B}} = A[v]_{\mathscr{B}'}$, *trong đó*

$$A = \left([f_1]_{\mathscr{B}} \quad [f_2]_{\mathscr{B}} \quad \cdots \quad [f_n]_{\mathscr{B}}\right).$$

Ma trận A *được gọi là ma trận đổi cơ sở từ* $\mathscr{B}$ *qua* $\mathscr{B}'$, *ký hiệu* $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$.

Ví dụ 11. Với hai cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$ trong ví dụ 10, ta được ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ là

$$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \left([f_1]_{\mathscr{B}} \quad [f_2]_{\mathscr{B}} \quad [f_3]_{\mathscr{B}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

và tọa độ của $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ đối với hai cơ sở này liên hệ với nhau qua đẳng thức

$$[v]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}'} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Từ định lý 2.2, ta suy ra rằng với hai cơ sở $\mathscr{B}$ và $\mathscr{B}'$ cho trước của một không gian vectơ, nếu ta biết ma trận đổi cơ sở từ cơ sở này qua cơ sở kia và tọa độ của một vectơ bất kỳ trong một cơ sở thì ta suy ra tọa độ của nó trong cơ sở còn lại,

$$[v]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}[v]_{\mathscr{B}'},$$

$$[v]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}[v]_{\mathscr{B}}.$$

Hơn nữa, ta có các tính chất sau

2.3. Tính chất. *Với ba cơ sở* $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ *và* $\mathscr{B}''$ *của một không gian vectơ* V, *ta có*

i) $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1}$,

ii) $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}.P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}$

Ví dụ 12. Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ cho trong ví dụ 11.

Cách 1. Dùng tính chất 2.3, với

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ta suy ra

$$P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cách 2. Dùng định nghĩa của ma trận đổi cơ sở :

$$\left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \left(\left[e_1\right]_{\mathscr{B}'} \quad \left[e_2\right]_{\mathscr{B}'} \quad \left[e_3\right]_{\mathscr{B}'}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, với $v = (4,-2,0)$, tọa độ của v đối với cơ sở $\mathscr{B}$ là

$$\left[v\right]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

và do đó tọa độ của v đối với cơ sở $\mathscr{B}'$ là

$$\left[v\right]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}\left[v\right]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 13. Ngoài các cơ sở $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ cho trong ví dụ 11, xét cơ sở

$$\mathscr{B}'' = \left\{g_1 = (1,0,0), g_2 = (1,1,0), g_3 = (1,1,1)\right\}.$$

Tìm ma trận đổi cơ sở $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}$.

Dùng tính chất 2.3, với

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ta được

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''} &= P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}.P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = \left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1}.P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. HẠNG CỦA MỘT HỆ VECTƠ

3.1. Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một hệ các vectơ của V. Khi đó, số chiều của không gian con sinh bởi S được gọi là *hạng* của hệ vectơ S, ký hiệu $\operatorname{rank} S$.

Đặt $W = \langle S \rangle \leq V$. Nếu S độc lập tuyến tính thì S trở thành một cơ sở cho W và do đó $\dim W = n = \operatorname{rank} S$. Nếu S không độc lập tuyến tính, nghĩa là tồn tại $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = \mathbf{0}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $k_1 \neq 0$. Bấy giờ do $v_1 \in \langle v_2, ..., v_n \rangle$ nên nếu bỏ bớt vectơ v_1 khỏi S, ta nhận được một hệ S' gồm $n-1$ vectơ sinh ra W. Nếu hệ S' độc lập tuyến tính thì nó trở thành một cơ sở của W và khi đó $\dim W = \operatorname{rank} S = n-1$, ...

Vì vậy, hạng của hệ S chính là số vectơ độc lập tuyến tính tối đại trong S, nghĩa là nếu $\operatorname{rank} S = r$ thì S có r vectơ độc lập tuyến tính và bất kỳ hệ con nào của S có nhiều hơn r vectơ đều phụ thuộc tuyến tính.

Nhận xét rằng với S là một hệ các vectơ trong một không gian vectơ V, nếu ta thay đổi các vectơ của S bằng cách

- đổi chỗ (hoán vị) hai vectơ,

- nhân một vectơ của S với một số khác 0,

- thay một vectơ của S bằng vectơ đó cộng một hằng số nhân với vectơ khác của S,

thì ta nhận được một hệ các vectơ mới S' với $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Từ đó, ta có giải thuật tìm hạng của một hệ vectơ như sau

3.2. Giải thuật tìm hạng của một hệ vectơ

Cho V là một không gian vectơ với một cơ sở $\mathscr{B}$ và một hệ các vectơ $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$. Đăt $W = \langle S \rangle$. Ta có giải thuật tìm hạng của hệ vectơ S

• Lập ma trận A, với

$$A = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathscr{B}}^T \\ [v_2]_{\mathscr{B}}^T \\ \dots \\ [v_n]_{\mathscr{B}}^T \end{pmatrix}.$$

• Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến A thành ma trận bậc thang theo dòng, ta nhận được hệ mới sinh ra cùng không gian con W. Loại trừ các vectơ sinh bởi các hàng không, các vectơ còn lại tạo thành một hệ các vectơ độc lập tuyến tính sinh ra W và do đó số các vectơ này chính là số chiều của của W và cũng là hạng của hệ S.

Ví dụ 13. Trong $\mathbb{R}^3$ xét họ $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, với

$$v_1 = (1,3,0),\ v_2 = (0,2,4),\ v_3 = (1,5,4),\ v_4 = (1,1,-4).$$

Tìm $\operatorname{rank} S$.

Với $\mathscr{B}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} [u_1]_{\mathscr{B}}^T \\ [u_2]_{\mathscr{B}}^T \\ [u_3]_{\mathscr{B}}^T \\ [u_4]_{\mathscr{B}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-(1)]{(3):=(3)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4):=(4)-(2)]{(3):=(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$W = \langle S \rangle = \langle v_1 = (1,3,0), v_2 = (0,2,4) \rangle.$$

Do v_1, v_2 độc lập tuyến tính nên $\operatorname{rank} S = \dim W = 2$.

Tiếp theo, ta xác định một cơ sở cũng như số chiều của một số không gian vectơ con nhận được khi khảo sát các hệ phương trình tuyến tính.

3.3. Cơ sở và số chiều của không gian nghiệm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta tìm được tập nghiệm, từ đó suy ra hệ vectơ sinh ra tập nghiệm. Khảo sát hệ này, ta nhận được cơ sở và số chiều của không gian nghiệm.

Ví dụ 14. Xét không gian nghiệm W của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng phương pháp Gauss,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3):=(3)-2(1)]{(2):=(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3):=(3)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Chọn x_1, x_4, x_5 làm ẩn cơ sở; x_2, x_3 là ẩn tự do và cho $x_2 = m, x_3 = n$, ta nhận được hệ phương trình theo các ẩn cơ sở

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 - 4x_5 = -2m + n \\ x_4 + 13x_5 = 0 \\ 32x_5 = 0 \end{cases}$$

Từ đó, ta được nghiệm tổng quát của hệ là $(-2m + n,\ m,\ n,\ 0,\ 0)$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Suy ra

$$\begin{aligned} W &= \{(-2m + n, m, n, 0, 0) \mid m, n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{m(-2,1,0,0,0) + n(1,0,1,0,0) \mid m, n \in \mathbb{R}\} = \langle u_1, u_2 \rangle \end{aligned}$$

với

$$u_1 = (-2,1,0,0,0),\ u_2 = (1,0,1,0,0).$$

Do u_1, u_2 độc lập tuyến tính nên chúng tạo thành một cơ sở của W và do đó, $\dim W = 2$.

3.4. Cơ sở và số chiều của không gian các số hạng tự do để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm

Với một hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình theo n ẩn số cho trước viết dưới dạng ma trận

$$AX = B, \tag{3.4}$$

trong đó $A \in M_{m\times n}$ là ma trận các hệ số, $B \in M_{m\times 1}$ là ma trận cột các hệ số tự do và $X \in M_{n\times 1}$ là ma trận các ẩn số, xét tập hợp W các vectơ $v = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$ sao cho phương trình (3.4), với

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = [v]_{\mathscr{B}},$$

trong đó $\mathscr{B}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^m$, có nghiệm.

Dễ thấy rằng với mọi $v_1, v_2 \in W$, nghĩa là tồn tại $X_1, X_2 \in M_{m\times 1}$ sao cho $AX_1 = [v_1]_{\mathscr{B}}$, $AX_2 = [v_2]_{\mathscr{B}}$ và với mọi $k \in \mathbb{R}$, ta có

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = [v_1]_{\mathscr{B}} + [v_2]_{\mathscr{B}} = [v_1 + v_2]_{\mathscr{B}},$$

$$A(kX_1) = kAX_1 = k[v_1]_{\mathscr{B}} = [kv_1]_{\mathscr{B}},$$

nghĩa là $v_1 + v_2, kv_1 \in W$. Do đó W trở thành một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^m$.

Để tìm số chiều cũng như một cơ sở cho W, ta tìm cách biểu diễn W như sau

Phương pháp 1 : Xem W như là không gian sinh bởi các vectơ cột của ma trận các hệ số, và

Phương pháp 2 : Dùng phương pháp Gauss, ta xác định được W (là không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất).

Ví dụ 15. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = a \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = b \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = c \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 9x_4 = d \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 = e \end{cases} \tag{3.5}$$

Xét $W = \{(a, b, c) \mid \text{hệ phương trình (3.5) có nghiệm}\}$.

Phương pháp 1 : Ta có $v = (a, b, c, d, e) \in W$ nếu tồn tại $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} a = k_1 + k_2 + 2k_4 \\ b = 2k_1 + 4k_2 - k_3 + 5k_4 \\ c = k_1 + 3k_2 + 5k_4 \\ d = 3k_1 + 7k_2 - 3k_3 + 9k_4 \\ e = 2k_1 + 8k_2 - 4k_3 + 2k_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v = k_1(1,2,1,3,2) + k_2(1,4,3,7,8) + k_3(0,-1,0,-3,-4) + k_4(2,5,5,9,2)$$

Do đó

$$W = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle,$$

với $u_1=(1,2,1,3,2)$, $u_2=(1,4,3,7,8)$, $u_3=(0,-1,0,-3,4)$ và $u_4=(2,5,5,9,2)$.

Tìm hạng của hệ $S=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\1&4&3&7&8\\0&-1&0&-3&-4\\2&5&5&9&2\end{pmatrix}\xrightarrow[(4):=(4)-2(1)]{(2):=(2)-(1)}\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&2&2&4&6\\0&-1&0&-3&-4\\0&1&3&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(3):=(3)+(2)\\(4):=(4)-(2)}]{(2):=\frac{1}{2}(2)}\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&1&1&2&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&2&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{(4):=(4)-2(3)}\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&1&1&2&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4):=\frac{1}{3}(4)}\begin{pmatrix}1&2&1&3&2\\0&1&1&2&3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

ta được

$$W=\langle(1,2,1,3,2),(0,1,1,2,3),(0,0,1,-1,-1),(0,0,0,1,-1)\rangle.$$

Do $\{(1,2,1,3,2),(0,1,1,2,3),(0,0,1,-1,-1),(0,0,0,1,-1)\}$ độc lập tuyến tính nên nó tạo thành một cơ sở cho W và do đó $\dim W=4$.

Phương pháp 2 : Khảo sát hệ (3.5) bằng phương pháp Gauss, ta có

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&a\\2&4&-1&5&b\\1&3&0&5&c\\3&7&-3&9&d\\2&8&-4&2&e\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{(4):=(4)-3(1)\\(5):=(5)-2(1)}]{\substack{(2):=(2)-2(1)\\(3):=(3)-(1)}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&a\\0&2&-1&1&b-2a\\0&2&0&3&c-a\\0&4&-3&3&d-3a\\0&6&-4&-2&e-2a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(4):=(4)-2(2)\\(5):=(5)-3(2)}]{(3):=(3)-(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&a\\0&2&-1&1&b-2a\\0&0&1&2&c-b+a\\0&0&-1&1&d-2b+a\\0&0&-1&-5&e-3b+4a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(5):=(5)+(3)]{(4):=(4)+(3)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&a\\0&2&-1&1&b-2a\\0&0&1&2&c-b+a\\0&0&0&3&d+c-3b+2a\\0&0&0&-3&e+c-4b+5a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(5):=(5)+(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 2 & -1 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c-b+a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & d+c-3b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e+d+2c-7b+7a \end{array}\right)$$

Hệ (3.5) có nghiệm nếu và chỉ nếu $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$, nghĩa là

$$7a - 7b + 2c + d + e = 0.$$

Nói khác đi, W là không gian nghiệm của phương trình tuyến tính

$$7x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

và ta được

$$\begin{aligned} W &= \left\{(m, n, p, q, -7m + 7n - 2p - q) \mid m, n, p, q \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\langle(1,0,0,0,-7),(0,1,0,0,7),(0,0,1,0,-2),(0,0,0,1,-1)\right\rangle \end{aligned}$$

Do $\left\{(1,0,0,0,-7),(0,1,0,0,7),(0,0,1,0,-2),(0,0,0,1,-1)\right\}$ độc lập tuyến tính nên chúng tạo thành một cơ sở cho W và do đó $\dim W = 4$.

Bài tập

1. Hỏi các tập dưới đây có là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không ?

a) $W_1 = \left\{(a,0,0) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$.

b) $W_2 = \left\{(a,1,1) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Cho không gian vectơ V và a là một vectơ cố định thuộc V. Chứng minh rằng tập hợp $W = \left\{ka \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$ là một không gian vectơ con của V.

3. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,-2,3)$, $u_2 = (0,1,-3)$. Xét xem vectơ $u = (2,-3,3)$ có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2 hay không ?

4. Trong $\mathbb{R}^3$, xét xem vectơ u có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không

a) $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)$, $u = (1,2,1)$.

b) $u_1 = (-2,1,0)$, $u_2 = (3,-1,1)$, $u_3 = (2,0,-2)$, $u = (0,0,0)$.

5. Trong không gian vectơ các ma trận vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho bốn vectơ

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hỏi vectơ u có phải là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không ?

6. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ $u_1 = (1,-2,3)$, $u_2 = (0,1,-3)$. Tìm m để vectơ $u = (1,m,-3)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2.

7. Trong $\mathbb{R}^3$, các hệ vectơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,0,1)$.

b) $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (2,3,1)$.

c) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,2)$, $u_3 = (1,2,3)$.

d) $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,2,5)$, $u_3 = (0,1,3)$.

8. Chứng minh rằng hệ vectơ $v_1, v_2, ..., v_r$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ v_i, $i \in \{1,2,...,r\}$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

9. Trong không gian vectơ các ma trận vuông cấp hai $M_2(\mathbb{R})$, cho bốn vectơ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng hệ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ độc lập tuyến tính.

10. Mỗi hệ vectơ sau đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không ?

a) $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,0), v_3 = (3,0,0)$.

b) $v_1 = (2,-1,3), v_2 = (4,1,2), v_3 = (8,-1,8)$.

11. Hệ vectơ nào trong các hệ vectơ sau đây là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $\mathscr{B}_1 = \{(1,2,3),(0,2,3)\}$.

b) $\mathscr{B}_2 = \{(1,2,3),(0,2,3),(0,0,5)\}$.

c) $\mathscr{B}_3 = \{(1,1,2),(1,2,5),(0,1,3)\}$.

d) $\mathscr{B}_4 = \{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,-1,1),(2,0,5)\}$.

12. Tìm hạng của các hệ vectơ sau (trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$)

a) $u_1 = (-1,2,0,1)$, $u_2 = (1,2,3,-1)$, $u_3 = (0,4,3,0)$.

b) $v_1 = (-1,4,8,12)$, $v_2 = (2,1,3,1)$, $v_3 = (-2,8,16,24)$, $v_4 = (1,1,2,3)$.

13. Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ

$$v_1 = (1,2,0,-1),\ v_2 = (0,1,3,-2),\ v_3 = (-1,0,2,4),\ v_4 = (3,1,-11,0)$$

14. Xác định số chiều và tìm một cơ sở cho không gian nghiệm của các hệ sau

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$

15. Tìm tọa độ của vectơ u trong cơ sở chính tắc $\mathscr{B}$ và trong cơ sở $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$, với $f_1 = (1,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1)$.

a) $u = (3,1,-4)$. b) $u = (1,3,1)$.

16. Trong $\mathbb{R}^4$, xét tập

$$W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$$

a) Kiểm chứng rằng W là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^4$.

b) Kiểm chứng các vectơ sau nằm trong W

$$v_1 = (1,0,0,-1),\ v_2 = (0,1,0,-1),\ v_3 = (0,0,1,-1),\ v_4 = (1,1,-1,-1)$$

c) Xác định số chiều và tìm một cơ sở cho W.

17. Trong $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở chính tắc

$$\mathscr{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

và cơ sở

$$\mathscr{B}' = \{f_1 = (2,1,1), f_2 = (1,2,1), f_3 = (1,1,2)\}.$$

Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

18. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở $\mathscr{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$ và $\mathscr{B}' = \{v_1 = (2,1,1), v_2 = (1,2,1), v_3 = (1,1,2)\}$.

Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

19. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathscr{B} = \{u_1 = (1,2,0), u_2 = (1,3,2), u_3 = (0,1,3)\}$$

$$\mathscr{B}' = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (1,4,6)\}$$

và vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a) Tìm tọa độ của vectơ u trong cơ sở $\mathscr{B}$ và cơ sở $\mathscr{B}'$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$ và ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}'$ qua $\mathscr{B}$.

c) Kiểm chứng $[u]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}[u]_{\mathscr{B}'}$ và $[u]_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}}$.

20. Trong $\mathbb{R}^3$, cho các hệ vectơ

$$\mathscr{B}_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,3)\}$$

và

$$\mathscr{B}_2 = \{v_1 = (2,1,-1), v_2 = (3,2,5), v_3 = (1,-1,m)\}$$

a) Chứng minh rằng $\mathscr{B}_1$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c)$ trong cơ sở $\mathscr{B}_1$.

c) Tìm m để $\mathscr{B}_2$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

d) Với $m = 0$, tìm các ma trận đổi cơ sở $P_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}$ và $P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}$.

21. Cho hai hệ vectơ trong không gian $\mathbb{R}^4$

$\mathscr{B}$: $a_1 = (0,1,0,2)$, $a_2 = (1,1,0,1)$, $a_3 = (1,2,0,1)$, $a_4 = (-1,0,2,1)$,

$\mathscr{B}'$: $b_1 = (1,0,2,-1)$, $b_2 = (0,3,0,2)$, $b_3 = (0,1,3,1)$, $b_4 = (0,-1,0,1)$

a) Chứng minh chúng là hai cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $\mathscr{B}$ qua $\mathscr{B}'$.

c) Tìm tọa độ của $v = (2,0,4,0)$ đối với cơ sở $\mathscr{B}'$.

d) Tìm tọa của v đối với cơ sở $\mathscr{B}$.

22. Xác định số chiều và tìm một cơ sở của không gian con W sinh bởi hệ vectơ sau

a) $u_1 = (1,0,0,-1)$, $u_2 = (2,1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u_4 = (1,2,3,4)$, $u_5 = (0,1,2,3)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $u_1 = (1,1,1,1,0)$, $u_2 = (1,1,-1,-1,-1)$, $u_3 = (2,2,0,0,-1)$, $u_4 = (1,1,5,5,2)$, $u_5 = (1,-1,-1,0,0)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ. Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* nếu :

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$,

ii) $f(ku) = kf(u)$,

với mọi $u, v \in V$ và $k \in \mathbb{R}$.

Khi $W \equiv V$, ánh xạ tuyến tính f được gọi là một phép *biến đổi tuyến tính* hay một *toán tử tuyến tính* trên V. Khi $W \equiv \mathbb{R}$, ánh xạ tuyến tính f còn được gọi là một *phiếm hàm tuyến tính* của V.

Ví dụ 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(u) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3), \text{ với } u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Với $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$, và $k \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \big((x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) + (x_3+y_3), (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3)\big) \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3) + (y_1 - 2y_2 + y_3) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$f(ku) = (kx_1 - 2kx_2 + kx_3) = k(x_1 - 2x_2 + x_3) = kf(u).$$

Do đó f là một ánh xạ tuyến tính.

1.2. Tính chất.

i) Ánh xạ $f : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi*

$$f(hu + kv) = hf(u) + kf(v),$$

với mọi $u, v \in V$*;* $h, k \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu $f : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính thì*

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \text{ và } f(-u) = -f(u),$$

với mọi $u \in V$

Cho V, W là hai không gian vectơ và $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, với $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, mọi vectơ bất kỳ $u \in V$ được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \ , \ x_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1,2,...,n \ .$$

Do f là ánh xạ tuyến tính, nên

$$f(u) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n).$$

Vậy f được hoàn toàn xác định bởi các vectơ trong W, $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$. Hơn nữa, ta có

1.3. Mệnh đề. *Cho* $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *là một cơ sở của* V *và* v_1, $v_2, ..., v_n$ *là* n *vectơ trong* W. *Khi đó, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $f : V \to W$ *thỏa* $f(e_i) = v_i$, $i = \overline{1,n}$.

Chú ý. Các ánh xạ tuyến tính đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Xuất phát từ định nghĩa, một ánh xạ giữa hai không gian vectơ là một ánh xạ tuyến tính khi *ảnh của tổng hai vectơ là tổng của hai ảnh* và *ảnh của tích vectơ với một số là tích của ảnh vectơ với số đó*. Chẳng hạn với V và W là không gian vectơ các hàm khả vi thì phép lấy đạo hàm là một ánh xạ tuyến tính từ V đến W do đạo hàm của tổng hai hàm bằng tổng hai đạo hàm và đạo hàm của tích một hàm với một số bằng tích của đạo hàm với số đó. Tương tự, với V là không gian vectơ các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $W = \mathbb{R}$ thì phép lấy tích phân xác định là một ánh xạ tuyến tính từ V đến W do tích phân của tổng hai hàm bằng tổng hai tích phân và tích phân của một hàm nhân với một số bằng tích phân của hàm nhân với số đó.

Tuy nhiên, ta chỉ tập trung khảo sát các không gian vectơ hữu hạn chiều, cụ thể là các không gian $\mathbb{R}^n$. Khi đó, bằng cách áp dụng mệnh đề 1.3, với $\mathscr{B}$ là cơ sở chính tắc, một ánh xạ

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{gathered}$$

là một ánh xạ tuyến tính khi tồn tại n vectơ $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n \ .$$

Do đó, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một vectơ trong $\mathbb{R}^m$ mà mỗi thành phần là một biểu thức bậc nhất thuần nhất theo $x_1, x_2, ..., x_m$, nghĩa là biểu thức có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m \ , \ a_i \in \mathbb{R} \ .$$

Ví dụ 2. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi $f(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2, -2x_2, x_1 - x_2)$ là một ánh xạ tuyến tính vì các thành phần của $f(x_1, x_2)$ là $4x_1 + 3x_2, -2x_2$ và $x_1 - x_2$ đều là các biểu thức bậc nhất thuần nhất theo x_1, x_2, x_3.