



ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - TIN HỌC

LÝ KIM HÀ

GIẢI TÍCH PHỨC NÂNG CAO

(Tài liệu dành cho học viên Cao học ngành Toán)

Tailieu.vn

Mục lục

Mục lục	1
1 Hàm chỉnh hình một biến phức	7
1.1 Sự khả vi phức	7
1.2 Tích phân Cauchy	16
1.3 Các kết quả định tính cơ bản	41
1.4 Thác triển giải tích dọc theo đường cong	50
1.5 Công thức Pompeiu	56
2 Lý thuyết mặt Riemann	65
2.1 Định nghĩa và Ví dụ	65
2.2 Hàm chỉnh hình và Ánh xạ chỉnh hình	69
2.3 Các tính chất cơ bản	70
3 Hàm phức nhiều biến	77
3.1 Hàm chỉnh hình nhiều biến phức	77
3.2 Công thức tích phân Cauchy trên miền đa trụ	89
3.3 Phương trình Cauchy-Riemann trên miền đa trụ	100

Tailieu.vn

Lời nói đầu

Bài giảng “*Giải tích phức nâng cao*” chủ yếu được dùng như là tài liệu học tập chính cho học viên Cao học các ngành Toán lý thuyết và Ứng dụng tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh, với thời lượng 60 đến 90 giờ học. Tài liệu này cung cấp kiến thức nhập môn về lý thuyết hàm chỉnh hình cho học viên cao học mà nội dung cơ bản thực sự tổng quát hóa những gì học viên được học ở bậc Đại học, Cao đẳng. Mục tiêu chính của tài liệu là tập trung vào những kết quả định tính cơ bản nhất của Lý thuyết hàm chỉnh hình mà có thể học viên đã được học hay áp dụng trong tính toán trước đó. Vì lý do này, những kiến thức định lượng liên quan đến hàm chỉnh hình một biến phức sẽ không được trình bày chi tiết ở đây. Hơn nữa, tài liệu cũng sẽ đề cập đến những vấn đề thuộc nơi giao nhau của các lĩnh vực như Giải tích phức, Phương trình đạo hàm riêng, Hình học và Đại số. Do đó, để đọc được tài liệu, học viên cần có kiến thức cơ bản của Toán lý thuyết bậc đại học như Giải tích hàm, Topo, Đại số đại cương.

Nội dung của tài liệu bao gồm ba phần chính. Phần thứ nhất là nhắc lại cũng như chứng minh chi tiết những kết quả định tính đặc trưng của Hàm phức một biến trên $\mathbb{C}$. Hơn nữa, trong phần này, học viên cũng học thêm hai nội dung mới mà có lẽ ở bậc Đại học chưa tiếp cận, là Thác triển giải tích và Phương trình Cauchy-Riemann không thuần nhất. Đây là hai nội dung liên quan đến những phần sau một cách chặt chẽ. Bài toán thác triển giải tích sẽ dẫn đến việc nghiên cứu không gian tương tự như mặt phẳng phức nhưng không phải mặt phẳng phức, đó là mặt Riemann. Đây chính là nội dung thứ hai của tài liệu. Trong nội dung này, ta cũng xây dựng lý thuyết hàm một biến phức cơ bản trên mặt Riemann. Vì lý do thời lượng, nên ta chỉ nghiên cứu sự khả vi mà không đề cập đến sự khả tích trên mặt Riemann. Phương trình Cauchy-Riemann không thuần nhất lại dẫn ta đến việc nghiên cứu Lý thuyết hàm chỉnh hình trong không gian phức nhiều chiều (tích hữu hạn các mặt phẳng phức). Tại đây, ta sẽ thấy sự khác biệt rõ rệt về tính chất giải tích giữa không gian phức một chiều và nhiều chiều mà được thể hiện bởi phương trình phức bậc nhất này.

Cả ba nội dung trên, thứ nhất chỉ xoay quanh đối tượng hàm chỉnh hình là chính,

và thứ hai là tìm hiểu các liên kết giữa cả ba chương này bởi các kết quả định tính nên Lý thuyết thặng dư hay các vấn đề định lượng khác sẽ không đề cập trong tài liệu. Ngoài ra, cả ba nội dung trên là cơ sở để học viên tiếp tục nghiên cứu và tìm hiểu về lĩnh vực Giải tích phức nhiều biến, Hình học phức về sau. Do đó, tài liệu được biên soạn theo cấu trúc trên là như vậy và cũng phù hợp với hướng nghiên cứu của tác giả. Tuy nhiên, những gì trong tài liệu không phải là tất cả, chỉ là cơ bản nhất để học viên có thể tự đọc những nội dung thuộc ba lĩnh vực được đề cập trên. Do đó, để tìm hiểu chi tiết, học viên tham khảo các tài liệu cốt yếu ở cuối tài liệu.

Mùa hè năm 2016, Thành phố Hồ Chí Minh,

Lý Kim Hà

lkha@hcmus.edu.vn

Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin học,

Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.

Chương 1

Hàm chỉnh hình một biến phức

1.1	Sự khả vi phức	7
1.2	Tích phân Cauchy	16
1.3	Các kết quả định tính cơ bản	41
1.4	Thác triển giải tích dọc theo đường cong	50
1.5	Công thức Pompeiu	56

1.1 Sự khả vi phức

Trong các học phần về giải tích phức bậc đại học, ta biết rằng cấu trúc trường trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ tương thích với với cấu trúc topo trên trường này. Nghĩa là các phép toán đại số hình thành tính chất trường cũng là những ánh xạ liên tục từ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Do đó, từ tính liên tục này, ta có thể định nghĩa được tính khả vi của hàm số trên trường số phức như sau. Cụ thể, với hai số phức $z \neq w$, thì thương $\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ là xác định và ta có thể thực hiện phép tính giới hạn $w \rightarrow z$ cho thương này.

Định nghĩa 1.1.

Giả sử rằng $D \subset \mathbb{C}$ là một tập con mở không rỗng, $z \in \mathbb{C}$ là một điểm trong của D và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm biến phức xác định trên D . Khi đó, ta nói f **có đạo hàm phức tại z** nếu giới hạn sau

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

tồn tại trên $\mathbb{C}$. Khi giới hạn trên tồn tại, ta gọi giá trị này là *đạo hàm của f tại z* , và ta ký hiệu

$$\frac{df}{dz}(z) = f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Bằng cách áp dụng các đẳng thức cơ bản, ta sẽ thấy rằng các hàm biến phức có dạng mũ nguyên dương ($f(z) = z^m$) có đạo hàm phức tại mọi điểm trên mặt phẳng phức như các đa thức thực. Chẳng hạn như, hàm phức $f : z \mapsto z$ có đạo hàm phức là $f'(z) = 1$; hàm bình phương $f : z \mapsto z^2$ có đạo hàm phức là $f'(z) = 2z$; hàm bậc m là $f : z \mapsto z^m$ có đạo hàm phức $f'(z) = mz^{m-1}$.

Hơn nữa, từ định nghĩa, các tính chất cơ bản của đạo hàm phức như tính tuyến tính trên trường $\mathbb{C}$, đạo hàm của các hàm tích và các hàm thương, công thức đổi biến cho đạo hàm của các hàm hợp hoàn toàn được chứng minh như các kết quả trong hàm biến thực. Ví dụ như đa thức phức $\sum_{m=0}^n a_m z^m$ có đạo hàm phức là

$$f'(z) = \sum_{m=1}^n m a_m z^{m-1};$$

hàm nghịch đảo $z \mapsto 1/z$ có đạo hàm phức là $f'(z) = -1/z^2$

với tất cả các số phức z khác không. Một điều tự nhiên đó là nếu f có đạo hàm phức tại z thì f phải liên tục tại z . Điều này được chứng minh một cách đơn giản từ đẳng thức $f(w) - f(z) = (w - z)((f(w) - f(z))/(w - z))$ và tính chất giới hạn của tích bằng tích các giới hạn.

Chúng ta biết rằng hàm thực $x \mapsto |x|/x$ không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 0$, cũng như vậy, hàm phức $z \mapsto |z|/z$ cũng không tồn tại giới hạn khi $z \rightarrow 0$. Do đó, hàm phức $z \mapsto |z|$ không có đạo hàm phức tại $z = 0$. Tuy nhiên, một điều khác với lý thuyết biến thực, hàm phức $z \mapsto |z|^2 = x^2 + y^2$ lại chỉ có đạo hàm phức tại $z = 0$ trong khi hàm thực $x \mapsto x^2$ lại có đạo hàm thực mọi nơi. Bằng định nghĩa, ta dễ dàng kiểm tra điều này, điều mà đáng lưu ý ở đây là $x^2 = x \cdot x$ trong khi $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Sự khác biệt rõ ràng đến từ khái niệm thành phần liên hợp. Ta sẽ thấy rằng, đại lượng này chính là nguyên nhân làm mất tính chất có đạo hàm của hàm $|z|^2$ khi $z \neq 0$. Ngoài ra, bản thân hàm liên hợp này $z \mapsto \bar{z}$ lại không có đạo hàm tại mọi nơi, chứ không phải là có đạo hàm tại một nơi nào đó. Điều này dễ dàng được kiểm chứng từ định nghĩa khi xét giới hạn “trượt” trên trục thực và sau đó là trượt trên trục ảo, ta mất tính duy nhất.

Nhắc lại rằng một không gian vector trên trường số phức thì cũng là không gian vector trên trường số thực khi hạn chế phép nhân ngoài từ $\mathbb{C}$ đến $\mathbb{R}$. Nếu X và Y là các không gian vector trên trường số phức, và $T : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính trên $\mathbb{C}$, khi đó T cũng tuyến tính trên $\mathbb{R}$ giữa các không gian vector X, Y trên $\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, khẳng định ngược lại thì không đúng về tổng quát. Chẳng hạn như, các ánh xạ $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ là tuyến tính trên $\mathbb{R}$ nhưng không tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Mặt phẳng phức chính là không gian vector trên $\mathbb{R}$ có số chiều thực bằng hai với cơ sở thông thường là $\{1 = (1, 0), i = (0, 1)\}$. Trong cơ sở này, với mỗi T là ánh xạ $\mathbb{C}$ -tuyến tính $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, thì ta luôn có biểu diễn $T(1) = a_{11} + ia_{21}$, $T(i) = a_{12} + ia_{22}$. Bởi vì $T(z) = zT(1)$ (do tính tuyến tính), nên với $\alpha = T(1) = a_{11} + ia_{21}$ thì $a_{12} + ia_{22} = T(i) = i(a_{11} + ia_{21}) = -a_{21} + ia_{11} = i\alpha$. Do đó,

$$a_{11} = a_{22}, a_{12} = -a_{21}.$$

Lưu ý rằng $T(z) = \alpha z$, nên đây cũng là ánh xạ $\mathbb{R}$ -tuyến tính. Do đó, định thức của ánh xạ này là $\det(T) = |\alpha|^2$.

Nếu X, Y là hai không gian vector định chuẩn trên $\mathbb{C}$, $D \subset X$ là tập con không rỗng, ta xét $f : D \rightarrow Y$ là một ánh xạ, và z là một điểm trong của D , ta nói rằng f khả vi phức tại z nếu và chỉ nếu tồn tại ánh xạ $\mathbb{C}$ -tuyến tính liên tục $T : X \rightarrow Y$ sao cho

$$\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in D}} \frac{f(w) - f(z) - T(w - z)}{\|w - z\|_X} = 0$$

với giới hạn lấy theo chuẩn trong Y . Trong trường hợp này, ta còn nói f khả vi thực tại z nếu ánh xạ T tìm được là chỉ $\mathbb{R}$ -tuyến tính, không cần thiết thỏa $\mathbb{C}$ -tuyến tính. Đặc biệt trong trường hợp $X = Y = \mathbb{C}$, chúng ta có

Mệnh đề 1.1.

Giả sử $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm phức, và z là một điểm trong của D . Khi đó f có đạo hàm phức tại z nếu và chỉ nếu f khả vi phức tại z .

Chứng minh.

Giả sử f có đạo hàm phức tại z , nghĩa là ta có

$$\alpha = f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Giới hạn này tương đương

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z) - \alpha(w - z)}{|w - z|} = 0.$$

Do đó $T(z) = \alpha z$ là ánh xạ $\mathbb{C}$ -tuyến tính cần tìm.

Giả sử f khả vi phức tại z , nghĩa là

$$\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in D}} \frac{f(w) - f(z) - T(w - z)}{|w - z|} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z) - T(1)(w - z)}{|w - z|} = 0.$$

Như trên, giới hạn này tương đương với

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = T(1).$$

Dạng thức này cũng khẳng định $f'(z) = T(1)$. $\square$

Nói cách khác, trong trường hợp $X = Y = \mathbb{C}$, thì giá trị đạo hàm phức chính là giá trị $T(1)$. Ánh xạ T trong định nghĩa trên chính là vi phân của f tại z , ta biết rằng vi phân là duy nhất. Do đó, sự khả vi phức cũng chính là sự khả vi thực tại cùng một điểm và ánh xạ vi phân T tương ứng là $\mathbb{C}$ -tuyến tính.

Mệnh đề 1.2.

Xét $D \subset \mathbb{C}$ là một tập mở, và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm phức, với $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, với u, v là các hàm thực, $z = x + iy$. Giả sử $z \in D$, khi đó, f khả vi phức tại z nếu và chỉ nếu u, v là hai hàm khả vi thực tại (x, y) sao cho Hệ thức Cauchy-Riemann sau cũng thỏa

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Chứng minh.

Ta cần chứng minh rằng f là $\mathbb{R}$ -khả vi tại $z = x + iy$ nếu và chỉ nếu u, v khả vi tại (x, y) , theo nghĩa $\mathbb{C}$ được xem như là không gian $\mathbb{R}$ -vector, f là hàm giá trị vector với hai thành phần là u và v . Ma trận Jacobi thực của f trong cơ sở thông thường $\{1 = (1, 0), i = (0, 1)\}$ chính là

$$[T(1) \quad T(i)] = [\nabla u \quad \nabla v] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Do đó, ma trận này là ma trận biểu diễn của T sao cho cho T là ánh xạ $\mathbb{C}$ -tuyến tính nếu và chỉ nếu $a_{11} = a_{22}, a_{12} = -a_{21}$. Nói cách khác điều này tương đương với

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

$\square$

Lưu ý, đạo hàm phức chính xác bằng với đạo hàm riêng thực theo hướng $(1, 0)$ và đạo hàm riêng theo hướng $i = (0, 1)$. Thật vậy, nếu f có đạo hàm phức tại $z = x + iy$ là $f'(z)$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w = z+h, h \in \mathbb{R}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h}, \\ f'(z) &= \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w = z+ih, h \in \mathbb{R}}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{1}{i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{h}. \end{aligned}$$

Thay $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ vào các giới hạn trên, ta được

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \\ f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Nếu $f'(z)$ tồn tại, thì tất cả các đạo hàm thực theo hướng vector $w \in \mathbb{C}$ cũng tồn tại và ta cũng có một công thức về đạo hàm theo hướng như trong hàm thực

$$\frac{\partial f}{\partial w} := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+tw) - f(z)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} w \left(\frac{f(z+tw) - f(z)}{wt} \right) = wf'(z).$$

Nếu $f'(z)$ tồn tại, thì ma trận Jacobian thực của $f = (u, v)$ chính là bằng với

$$\partial_x u(x, y) \partial_y v(x, y) - \partial_x v(x, y) \partial_y u(x, y) = (\partial_x u(x, y))^2 + (\partial_x v(x, y))^2 = |f'(z)|^2.$$

Bây giờ, ta sẽ khảo sát khái niệm đạo hàm hàm phức với hai hàm quan trọng : hàm $z \mapsto e^z$ và hàm ngược của nó.

Bởi các công thức trên, ta kiểm tra được rằng $(e^z)' = e^z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Ngoài ra, hàm mũ e^z sinh ra một song ánh từ dãy vô hạn nửa mở $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi\}$ vào mặt phẳng thủng $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Song ánh này lại sinh ra một hàm ngược của hàm e^z được gọi là hàm logarithm chính:

$$\text{Log}(z) = \log(|z|) + i\text{Arg}(z) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i\text{Arg}(x, y),$$

với $z = x + iy \neq 0$, $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(x, y) \in (-\pi, \pi]$. Tuy nhiên, hàm ngược này có một nhược điểm là không liên tục tại mọi điểm thuộc nửa trục thực âm $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Vì vậy, hàm $\exp$ dù là khả vi phức trên $\mathbb{C}$, nhưng không thể trở thành một đồng phôi trên $\mathbb{C}$. Tập hợp $(-\infty, 0]$ làm cho hàm ngược của e^z không liên tục được gọi là nhánh cắt của hàm logarithm phức.

Ta hãy tìm hiểu hàm logarithm phức này trên mặt phẳng bị cắt $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Ta có, với $\text{Log}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\partial_x u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \partial_y u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

và bên ngoài nửa trục thực âm thì

$$\partial_x v(x, y) = \partial_x [\arctan(y/x)] = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \partial_y v(x, y) = \partial_y [\arctan(y/x)] = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Do đó, ta có hệ thức Cauchy-Riemann, và

$$(\text{Log}(z))' = \partial_x u(x, y) + i\partial_y v(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$$

với mọi $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Định nghĩa 1.2.

Xét D là tập mở trong $\mathbb{C}$, và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm phức; khi đó f là hàm chỉnh hình nếu và chỉ nếu f có đạo hàm phức tại mọi điểm thuộc D và các đạo hàm phức này là hàm liên tục trên D .

Ta cũng định nghĩa hàm nguyên là hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức.

Nói cách khác, hàm chỉnh hình là hàm thuộc lớp C^1 theo nghĩa phức.

Mối liên hệ giữa khái niệm hàm chỉnh hình, khả vi phức và đạo hàm phức được mô tả như sau:

Mệnh đề 1.3.

Xét D là tập mở trong $\mathbb{C}$, và xét $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm phức; khi đó f là hàm chỉnh hình nếu và chỉ nếu các đạo hàm $\partial_x f, \partial_y f$ tồn tại và liên tục, và thỏa hệ thức Cauchy-Riemann tại mọi điểm thuộc D , nghĩa là

$$\partial_x f(x + iy) = \partial_y f(x + iy)/i \quad \text{với mọi } z = x + iy \in D.$$

Trong định nghĩa và mệnh đề trên, chúng ta yêu cầu một điều kiện rất ngặt cho các đạo hàm riêng đó là chẳng những tồn tại, thỏa mãn hệ thức Cauchy-Riemann, mà còn phải liên tục. Tuy nhiên, đòi hỏi này chỉ là tạm thời. Trong những nội dung sau, chúng ta thấy rằng, điều kiện liên tục này có thể bỏ được, nghĩa là chỉ cần các đạo hàm riêng tồn tại và thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, đó là nội dung của Định lý Goursat. Thật ra, với những hàm chỉnh hình cụ thể, ta thấy được rằng kết quả này

là dễ dàng. Lý do, sau khi tính được đạo hàm phức, ta có thể kiểm tra trực tiếp đạo hàm này tự nhiên cũng liên tục. Chẳng hạn như chuỗi lũy thừa là hàm chỉnh hình tại những điểm trong thuộc miền hội tụ của chuỗi. Sự thật tại những điểm này, đạo hàm phức của chuỗi chính là chuỗi của các đạo hàm phức của các số hạng và hội tụ trên cùng một miền hội tụ của chuỗi ban đầu. Hơn nữa, chuỗi mới này là một hàm liên tục.

Chẳng hạn như, ta biết rằng $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, lấy đạo hàm phức từng thành phần ta được $(\exp z)' = \exp z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Các hàm cơ bản như đa thức hữu hạn, hàm mũ, hàm cosine và sine, hàm hyperbolic và hàm Gauss $z \mapsto e^{z^2}$, được khai triển thành các chuỗi lũy thừa có bán kính hội tụ là $+\infty$, và do đó chúng là các hàm nguyên, nghĩa là chỉnh hình trên toàn $\mathbb{C}$. Tuy nhiên, cũng như hàm mũ e^z , các hàm ngược của những hàm này lại không chỉnh hình trên toàn bộ $\mathbb{C}$. Chẳng hạn như, hàm căn bậc hai số phức (là hàm ngược của hàm bình phương $z \mapsto z^2$) có một nhánh cắt, hàm căn bậc ba số phức lại có hai nhánh cắt, và các hàm này không chỉnh hình trên các nhánh cắt của chúng.

Từ nay trở về sau, ta sẽ ký hiệu $\mathcal{O}(D)$ là tập hợp gồm các hàm chỉnh hình trên $D \subset \mathbb{C}$. Với phép cộng và phép nhân từng điểm, $\mathcal{O}(D)$ là một $\mathbb{C}$ -đại số¹.

Tiếp theo, chúng ta liệt kê vài tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình trên một tập mở, liên thông. Với X là một không gian topo và Y là một tập hợp, ta nói $h : X \rightarrow Y$ là một hàm hằng địa phương xung quanh $c \in X$ nếu và chỉ nếu có một lân cận $U \subset X$ của c sao cho $h(x) = h(c)$ với mọi $x \in U$. Ta có thể kiểm chứng được rằng một hàm hằng địa phương trên một tập con liên thông đường của X thì cũng là hàm hằng trên toàn tập con này.

Nhắc lại rằng nếu X là một tập con mở liên thông của $\mathbb{R}^n$ và $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm hằng nếu và chỉ nếu tất cả các đạo hàm riêng của h cùng triệt tiêu trên X . Vì thế, ta có

Mệnh đề 1.4.

Nếu $D \subset \mathbb{C}$ là một tập con mở liên thông và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm hằng nếu và chỉ nếu đạo hàm phức của nó triệt tiêu trên toàn D .

Chứng minh.

Rõ ràng nếu f là hàm hằng trên D thì đạo hàm phức của f cần bằng không trên

¹đây là một đại số trên trường $\mathbb{C}$ với phép cộng và phép nhân các hàm thông thường (tạo thành một vành), phép nhân với vô hướng trên $\mathbb{C}$ thông thường (tạo thành không gian vector trên $\mathbb{C}$), các phép nhân có tính chất kết hợp.

toàn D . Bây giờ, nếu f có đạo hàm phức bằng không trên toàn D , khi đó, các đạo hàm riêng theo hướng 1 và i cùng triệt tiêu đồng thời trên D . Vì vậy, từ tính liên thông, ta có f là hàm hằng trên D . $\square$

Nhắc lại rằng một hàm $w : E \rightarrow \mathbb{C}$, với $E \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở, là hàm điều hòa nếu w thuộc lớp $C^2(E)$ và Laplacian của w triệt tiêu trên E , nghĩa là

$$\Delta w := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{trên } E.$$

Nếu $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình trên D , với $D \subset \mathbb{C}$ là tập mở, và giả sử rằng $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, với $z = x + iy \in D$, u, v là hai hàm thuộc lớp $C^2(D)$. Khi đó, bởi hệ thức Cauchy-Riemann và Định lý Clairaut, cả u và v là hai hàm điều hòa trên D . Chiều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Chẳng hạn như hàm $\text{Log}(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \text{Arg}(x, y)$ là hàm chỉnh hình trên mặt phẳng bị cắt $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, nhưng trong khi cả hai phần thực và phần ảo của nó lại là hàm điều hòa trên mặt phẳng thủng $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ta biết rằng mặt phẳng thủng không phải là miền đơn liên, còn mặt phẳng bị cắt là miền đơn liên. Thật ra, khẳng định ngược lại là đúng nếu ta thêm điều kiện rằng D là miền đơn liên. Định lý này không có chứng minh dễ dàng. Tuy nhiên, ta có thể xét trường hợp cơ bản nhất là hình chữ nhật có các cạnh song song với hai trục tọa độ.

Mệnh đề 1.5.

Xét $D \subset \mathbb{C}$ là hình chữ nhật mở có các cạnh song song với hai trục tọa độ và $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm điều hòa trên D . Khi đó, tồn tại hàm điều hòa $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f = u + iv$ là hàm chỉnh hình trên D .

Chứng minh.

Ta tìm hàm v từ hệ thức Cauchy-Riemann. Cố định bất kỳ $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Ta tìm hàm $v(x, y)$ sao cho

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \quad (x, y) \in D \quad (1.1.1)$$

bằng cách lấy nguyên hàm hai vế theo biến thứ hai. Điều này thực hiện được là bởi vì đoạn thẳng nối (x, y_0) và (x, y) nằm bên trong D . Khi đó, ta có

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, \xi) d\xi + C(x)$$

với $C(x)$ là hàm khả vi thực chỉ phụ thuộc vào biến x .

Tiếp theo, ta tìm hệ số $C(x)$ từ đẳng thức thứ hai

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (1.1.2)$$

Bởi Định lý hội tụ Lebesgue,

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \xi) d\xi + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Từ tính điều hòa của u , ta lại có

$$C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(x, \xi) d\xi = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0).$$

Do đoạn thẳng nối (x_0, y) với (x, y) nằm bên trong D , nên

$$C(x) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta, y_0) d\zeta.$$

Vậy, ta tìm được hàm v có dạng, với C là hằng số thực,

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, \xi) d\xi - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(\zeta, y_0) d\zeta + C. \quad (1.1.3)$$

□

Nếu trên một miền $D \subset \mathbb{C}$, hàm $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm điều hòa sao cho tồn tại hàm điều hòa v trên D mà $u + iv$ chỉnh hình trên D , khi đó ta nói v là liên hợp điều hòa của u trên D . Hàm v này là duy nhất theo nghĩa sai khác nhau một hằng số.

Bài tập.

Bài 1. Xét $D \subset \mathbb{C}$ là tập mở liên thông, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm phức, $z \in D$ và $f'(z)$ tồn tại. Ta định nghĩa hàm liên hợp của f bởi $\bar{f}(w) := \overline{f(w)}$ với mọi $w \in D$. Chứng minh rằng $\bar{f}$ có đạo hàm phức tại z nếu và chỉ nếu $f'(z) = 0$.

Từ đó, chứng minh rằng nếu cả f và $\bar{f}$ là hàm chỉnh hình trên D thì f là hàm hằng trên D .

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $D \subset \mathbb{C}$ là một tập mở liên thông và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình trên D sao cho tập ảnh của f chỉ thuộc trục thực hoặc chỉ thuộc trục ảo, thì khi đó f là hàm hằng.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu $D \subset \mathbb{C}$ là một tập mở liên thông và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình trên D sao cho tập ảnh của f chỉ thuộc một đường tròn nào đó, thì f là hàm hằng trên D . Hãy tìm phản ví dụ để chứng tỏ rằng điều kiện chỉnh hình là không thể bỏ được.

Bài 4. Xét $D \subset \mathbb{C}$ là một tập mở liên thông, $D^* := \{\bar{z} : z \in D\}$ là ảnh đối xứng của D qua trục thực. Với hàm $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, ta định nghĩa $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, giả sử f có đạo hàm phức tại $z \in D$. Chứng minh rằng hàm f^* cũng có đạo hàm phức tại $\bar{z}$. Hãy biểu diễn $(f^*)'(\bar{z})$ bởi $f'(z)$.

Chứng minh rằng f là hàm chỉnh hình thì $\bar{f}^*$ cũng vậy trên D nếu và chỉ nếu f là hàm hằng trên D .

Ta thấy rằng, tính chất liên thông của tập mở trong $\mathbb{C}$ là nhân tố quan trọng trong một loạt các tính chất trên. Do đó, ta gọi một tập mở như vậy là một miền trong $\mathbb{C}$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu v là liên hợp điều hòa của u thì $-u$ là liên hợp điều hòa của v .

Bài 6. Chứng minh rằng nếu $h(z)$ là hàm phức trên tập mở $D \subset \mathbb{C}$ mà phần thực và phần ảo là các hàm điều hòa sao cho $zh(z)$ cũng là hàm điều hòa, thì $h(z)$ là hàm chỉnh hình trên D . Tìm phản ví dụ chứng tỏ rằng điều kiện cho $zh(z)$ là không thể bỏ được.

1.2 Tích phân Cauchy

Đầu tiên, ta định nghĩa tích phân Cauchy cho hàm biến thực nhưng có giá trị phức. Cụ thể xét $[a, b]$ là khoảng con compact trong $\mathbb{R}$, hàm biến thực $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ xác định liên tục và được phân tích thành $f(t) = u(t) + iv(t)$, với u, v là các hàm thực liên tục trên $[a, b]$. Khi đó, ta định nghĩa

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt. \quad (1.2.1)$$

Mệnh đề 1.6.

Với các ký hiệu và định nghĩa trên, ta có

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Chứng minh.

Xét θ là số thực sẽ được chọn sau. Khi đó, ta có (học viên tự chứng minh các (bất

đẳng thức trong chứng minh)

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta} f(t)) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Cuối cùng, chọn $\theta = \operatorname{Arg} \left(\int_a^b f(t) dt \right)$, ta có được bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Tiếp theo, chúng ta định nghĩa tích phân Cauchy tổng quát trên một đường cong. Cho trước một tập mở $D \subset \mathbb{C}$, chúng ta gọi một đường trong D là mỗi hàm $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ liên tục và khả vi từng khúc, trong đó $[a, b]$ là khoảng con compact trong $\mathbb{R}$. Nghĩa là tồn tại phân hoạch $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ và các hàm $\alpha_k \in C^1([a_{k-1}, a_k] \rightarrow D)$ sao cho $\alpha_k = \alpha|_{[a_{k-1}, a_k]}$, với $k = 1, \dots, m$. Tập ảnh $[\alpha] := \alpha([a, b])$ được gọi là vết của α , và chú ý rằng cơ bản khác với đường α .

Xét f là hàm phức xác định và liên tục trên vết $[\alpha]$ của đường cong α , khi đó Tích phân của f trên đường α được định nghĩa bởi

$$\int_{\alpha} f(z) dz := \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_k} f(z) dz := \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(\alpha_k(t)) \alpha'_k(t) dt, \quad (1.2.2)$$

trong đó vết phải trong cùng được định nghĩa như trên.

Trong mặt phẳng phức, $\{dx, dy\}$ là cơ sở cho dạng vi phân de Rham thực loại 1 trong $\mathbb{R}^2$ và $\{dz, d\bar{z}\}$ là cơ sở cho dạng vi phân de Rham phức loại $(1, 0)$ và $(0, 1)$ trong $\mathbb{C}$, với $dz := dx + idy$, $d\bar{z} := dx - idy$. Tích phân của $|f|$ trên đường cong α theo độ đo dương $|dz|$ được định nghĩa bởi

$$\int_{\alpha} |f(z)| |dz| := \sum_{k=1}^m \int_{\alpha_k} |f(z)| |dz| := \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(\alpha_k(t))| |\alpha'_k(t)| dt, \quad (1.2.3)$$

Từ đó, ta có

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức cơ bản (ML-estimates)).

Giả sử $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm liên tục, và $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ là một đường cong trong D . Khi đó, ta có:

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq \int_{\alpha} |f(z)| |dz| \leq ML,$$

với $M = \sup\{|f(z)| : z \in [\alpha]\}$ và $L = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\alpha'_k(t)| dt$ là độ dài của α .

Chứng minh.

Bất đẳng thức này là kết quả trực tiếp của

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\alpha(t))| |\alpha'(t)| dt = \int_{\alpha} |f(z)| |dz|.$$

Thành phần cuối cùng lại bị chặn trên bởi

$$\int_{\alpha} |f(z)| |dz| \leq M \cdot \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\alpha'_k(t)| dt = ML.$$

□

Định lý 1.2 (Định lý hội tụ).

Giả sử $D \subset \mathbb{C}$ là một tập mở và $f, f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ là các hàm liên tục, $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ là một đường cong trong D , và giả sử rằng dãy hàm f_n hội tụ đều về f trên $[\alpha]$. Khi đó, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz.$$

Chứng minh.

Xem như bài tập cho người học viên.

□

Bổ đề 1.1 (Bổ đề cung nhỏ - cung lớn).

Giả sử $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$. Xét $A := A(z_0, [\alpha, \beta]) := \{z_0 + r.e^{i\theta} : r \geq 0, \theta \in [\alpha, \beta]\}$ là góc vô hạn đỉnh tại z_0 , quét từ góc lượng giác α đến β .

Xét $f : A(z_0, [\alpha, \beta]) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm liên tục và cung bị chặn $\gamma_r(\theta) = \{z_0 + r.e^{i\theta} : \theta \in [\alpha, \beta]\}$, với $r > 0$ cho trước.

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Nếu } \lim_{z \rightarrow z_0, z \in A} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{thì} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= i\lambda(\beta - \alpha). \\ \text{Nếu } \lim_{z \rightarrow \infty, z \in A} zf(z) = \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{thì} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= i\lambda(\beta - \alpha). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Chứng minh.

Ta quan sát thấy rằng nếu giới hạn của hàm $zf(z)$ là hữu hạn khi z tiến ra vô cùng thì dẫn đến $f(z)$ phải tiến về không khi z tiến ra vô cùng. Do đó,

$$\lim_{z \rightarrow \infty, z \in A} zf(z) = \lambda \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \rightarrow \infty, z \in A} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ta xét hàm $g(z) = f(z) - \frac{\lambda}{z - z_0}$, với $z \in A \setminus \{z_0\}$, khi đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $(z - z_0)g(z) \rightarrow 0$. Bây giờ, ta xét tích phân

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} \left(\frac{\lambda}{z - z_0} + g(z) \right) dz = \int_{\gamma_r} \frac{\lambda}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_r} g(z)dz.$$

Với tích phân thứ nhất, trong cả hai trường hợp, ta luôn có

$$\int_{\gamma_r} \frac{\lambda}{z - z_0} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = i\lambda(\beta - \alpha).$$

Bởi Ước lượng ML, ta lại có

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z)dz \right| \leq \int_{\gamma_r} |g(z)||dz| \leq \int_{\gamma_r} \|g\|_r |dz| = (\beta - \alpha)r\|g\|_r,$$

trong đó $\|g\|_r := \max\{|g(z_0 + re^{i\theta})| : \theta \in [\alpha, \beta]\}$. Ta thấy rằng $(z - z_0)g(z)$ tiến về 0 khi $z \rightarrow z_0$ hay $z \rightarrow \infty$. Trong trường hợp nếu $z \in \gamma_r$ thì $z \rightarrow z_0 \iff r \rightarrow 0^+$ (cung nhỏ). Khi đó vì $(z - z_0)g(z) = re^{i\theta}g(z) \rightarrow 0$ khi $z \rightarrow z_0$ và lưu ý rằng $z \rightarrow z_0$ theo mọi hướng với argument thuộc $[\alpha, \beta]$, nên dẫn đến ta có $\lim_{r \rightarrow 0^+} r\|g\|_r = 0$. Hoàn

toàn tương tự trong trường hợp $z \in \gamma_r$, $z \rightarrow \infty \iff r \rightarrow +\infty$ (cung lớn), khi đó ta cũng có $\lim_{r \rightarrow +\infty} r\|g\|_r = 0$. Kết hợp các điều này lại, ta có giới hạn cần chứng minh trong cả hai trường hợp cung nhỏ và cung lớn. $\square$

Tiếp theo, ta quan tâm đến mối liên hệ giữa đối tượng tích phân phức và đạo hàm phức. Cụ thể, ta quan tâm đến câu hỏi: điều gì xảy ra nếu xét tích phân của hàm khả vi phức?

Giả sử $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, với $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, u và v là hai hàm số thực, đường cong trơn tham số $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t))dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))dt + i \int_a^b (v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t))dt \\ &= \int_a^b u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_a^b v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (\text{tích phân đường loại 2}). \end{aligned}$$

Do đó, một cách hình thức, ta có thể định nghĩa

$$f(z)dz = (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) := u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy).$$

Một dạng vi phân thực cấp 1 có dạng $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, trong đó P và Q là các hàm thực hai biến thông thường. Dạng vi phân này được gọi là thuộc lớp C^1 nếu các hàm hệ số $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ thuộc C^1 . Một dạng vi phân thực cấp một $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ thuộc lớp C^0 gọi là khớp nếu tồn tại hàm thực $f(x, y)$ thuộc lớp C^1 sao cho $df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ (hay $\nabla f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$). Trong trường hợp này, f còn được gọi là nguyên hàm của dạng vi phân $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Một dạng vi phân thực cấp một $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ thuộc C^1 gọi là dạng vi phân đóng nếu và chỉ nếu $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Vì $d(df) = 0$, nên nếu một dạng vi phân thực cấp một thuộc lớp C^1 là khớp thì nó phải là dạng đóng.

Rõ ràng $f(z)dz$ được phân rã thành hai thành phần: $f(z)dz = (\text{dạng vi phân thực cấp một}) + i(\text{dạng vi phân thực cấp một})$ được gọi là dạng vi phân phức loại $(1, 0)$. Ký hiệu thứ hai được định $f(z)d\bar{z} := (u(x, y) + iv(x, y))(dx - idy) := u(x, y)dx - v(x, y)dy - i(v(x, y)dx + u(x, y)dy)$ được gọi là dạng vi phân phức loại $(0, 1)$. Các dạng vi phân phức này đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết về Phương trình Cauchy-Riemann không thuần nhất mà ta sẽ tìm hiểu trong chương sau.

Điều mà ta đang quan tâm là $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng nếu và chỉ nếu phần thực $u(x, y)dx - v(x, y)dy$ và phần ảo $v(x, y)dx + u(x, y)dy$ của $f(z)dz$ là đóng, nghĩa là $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ và $u_x(x, y) = v_y(x, y)$. Và tính chất đóng này rõ ràng tương đương với hệ thức Cauchy-Riemann. Ta biết rằng trong Giải tích vector, tích phân đường loại hai của một dạng vi phân thực cấp một thuộc lớp C^1 đóng thì không phụ thuộc vào đường đi, chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi. Do đó, áp dụng tính độc lập vào đường này cho $u(x, y)dx - v(x, y)dy$ và $v(x, y)dx + u(x, y)dy$, ta có kết quả cơ bản trong Giải tích phức một biến sau: tích phân phức của hàm chỉnh hình thì không phụ thuộc vào đường lấy tích phân, chỉ phụ thuộc vào điểm bắt đầu và điểm kết thúc.

Định lý 1.3.

Xét D là một tập con mở trong $\mathbb{C}$, và hàm $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ chỉnh hình. Nếu α và β là hai đường cong nằm trong D sao cho điểm bắt đầu và điểm kết thúc của hai đường là trùng nhau, khi đó ta có

$$\int_{\alpha} f(z)dz = \int_{\beta} f(z)dz$$

Xét đường cong γ định hướng dương. Ta chọn hai điểm bất kỳ khác nhau A và B trên γ . Giả sử rằng hướng của γ là hướng từ A đến B . Rõ ràng, γ là hội của hai